

## Использование аппарата сопряженных переменных для идентификации и управления электромеханическими объектами

А. Ю. Омельченко

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

alex1957.12@mail.ru

**Аннотация.** В электромеханических системах часто встречаются переменные, имеющие общие измерительные или управляющие каналы. Этими переменными приходится управлять и изменять их одновременно, а также плавно переключать. Таковы, например, пары переменных: момент и положение, положение и скорость, ток и напряжение и т. д. Эти переменные называются сопряженными. В статье рассматриваются вопросы построения математических моделей для идентификации и управления электромеханическими и электронными объектами, содержащими сопряженные переменные. Для построения указанных моделей используются методы и элементы теории операторов в функциональных пространствах. Рассмотрен редуцированный подход к построению моделей, допускающий простую аналитику. Представлен пример расчета в рамках редуцированной модели. Проанализированные результаты исследования вытекают из концепций обменной механики, рассмотренных в предыдущих работах автора. Полученные результаты могут быть использованы для построения систем идентификации и управления электромеханическими объектами.

**Ключевые слова:** импульсно-энергетический обмен, сопряженные переменные, квант действия, функция Грина, система «прибор–объект», прямая и обратная задачи обменной механики, редуцированная модель, функциональное пространство, коммутатор, вейвлет

**Для цитирования:** Омельченко А. Ю. Использование аппарата сопряженных переменных для идентификации и управления электромеханическими объектами // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 1. С. 87–99. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-1-87-99.

Original article

## Using the Apparatus of Conjugate Variables to Identify and Control Electromechanical Objects

A. Yu. Omelchenko

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

alex1957.12@mail.ru

**Abstract.** Electromechanical systems often contain variables that share common measurement or control channels. These variables must be controlled and changed simultaneously, as well as smoothly switched. Examples of such pairs of variables include torque and position, position and speed, current and voltage, etc. These variables are called conjugate. This article examines the construction of mathematical models for the identification and control of electromechanical and electronic objects containing conjugate variables. These models are constructed using methods and elements of operator theory in functional spaces. A reduced approach to model construction, allowing simple analytics, is considered. An example of a calculation within the framework of the reduced model is presented. The analyzed research results follow from the concepts of exchange mechanics discussed in the author's previous works. The results obtained in the article can be used to construct systems for the identification and control of electromechanical objects.

**Keywords:** pulse-energy exchange, conjugate variables, quantum of action, Green's function, «device-object» system, direct problem and inverse problem of exchange mechanics, reduced model, functional space, commutator, wavelet

**For citation:** Omelchenko A. Yu. Using the Apparatus of Conjugate Variables to Identify and Control Electromechanical Objects // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 1. P. 87–99. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-1-87-99.

---

**Введение.** Идея сопряженности переменных в математических моделях физических процессов широко используется в физико-математической литературе.

Математически свойство сопряженности переменных может быть выявлено из особенностей некоторых интегральных преобразований, например Фурье или Лапласа. В этих преобразованиях произведение дисперсий функции в разных представлениях остается постоянным.

В физике свойство переменных быть в сопряжении рассматривается как природное явление, например:

– в классической механике (в механике Гамильтона и, особенно, в принципе максимума) понятие «сопряженные переменные» проистекает из концепции дуализма и является более общим, чем понятие «переменные состояния»;

– в квантовой и статистической механиках сопряженность указывает на определенные фундаментальные явления, происходящие в моделях и связанные с процессом измерения [1]–[2].

В технической кибернетике идея сопряженности ассоциируется с каналом связи, имеющим ограничения на пропускную способность, когда один канал разделяют несколько сигналов.

Из приведенных примеров видно: сопряженность – особая связь переменных, отличающаяся от функциональной связи степеней свободы, возможной в многомерных моделях объектов классической электромеханики.

Значение сопряженности переменных при решении инженерных задач идентификации и управления электромеханическими объектами (ЭМО) трудно переоценить.

К таким задачам следует отнести одновременное управление:

– по вектору силы и положения в технологиях робототехники;

– скоростью и положением в электроприводах различных промышленных механизмов;

– током и напряжением в электронных силовых преобразователях электроприводов, и т. д.

Указание на одновременность в приведенных примерах принципиально, так как раздельное во

времени управление каждой из сопряженных переменных исключает рассматриваемое здесь явление. Однако и при раздельном управлении переменными, находящимися в сопряжении, часто требуется плавное (квазистатическое) переключение управления с одной переменной на другую, что может сделать полезными предлагаемые здесь модели.

Применительно к обменной механике (ОМ) [3]–[4] явление сопряженности переменных обусловлено свойствами измерительно-управляющего прибора (ИУП). При одновременном управлении несколькими сопряженными переменными ИУП может иметь для них общий измерительный или общий управляющий канал. Общими также могут быть оба канала.

Если для каждой из двух или трех переменных имеются отдельные измерительный и управляющий каналы, то эти переменные не сопряжены и следует считать, что для каждой переменной в системе «прибор–объект» (СПО) имеется свой ИУП.

Как отмечено в [3], фундаментальными свойствами ИУП служат ограничения, которые выражаются, например, в не равном нулю кванте действия. При этом управляемая или идентифицируемая переменная в СПО будет иметь статистический разброс, мерой которого может служить дисперсия.

Кроме собственной дисперсии исследуемых переменных в СПО, в случае их сопряжения появляется дисперсия связи, отражающая ограничения совместно используемых этими переменными каналов в ИУП.

Математическим средством для моделирования статистических процессов, протекающих в СПО с учетом импульсно-энергетического (ИЭ) обмена, служат операторы в гильбертовом пространстве. Условие сопряженности переменных в СПО формально представляется операцией коммутирования соответствующих этим переменным операторов.

Пусть  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  – операторы первой и второй сопряженных переменных соответственно;  $\hat{C}$  – коммутатор. Тогда

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \equiv [\hat{A}\hat{B}] \neq 0, \quad (1)$$

где  $[\dots]$  – скобки Пуассона.

Условие (1) означает, что СПО не может быть управляема или измерима одновременно по двум переменным  $A$  и  $B$  с такой же предельной для ИУП точностью, с какой эта система может быть управляема или измерима по каждой переменной в отдельности. В частности, если коммутатор  $\hat{C}$  постоянен, точности при одновременном измерении либо управления сопряженными переменными могут находиться в обратной зависимости.

И обратно, из равенства коммутатора (1) нулю следует, что переменные  $A$  и  $B$  одновременно измеримы и управляемы с предельной для ИУП точностью, т. е. не сопряжены. В этом случае исходный ИУП можно функционально разделить на две независимых и равноценных в известном смысле части.

Для выявления факта сопряженности двух и более переменных в СПО требуется решать обратную задачу ОМ (выполнить идентификацию) [3]. Но иногда сопряженность переменных видна из самой постановки задачи.

В известных ранее постановках задач управления и идентификации принималось, что взаимозависимость переменных в объекте связана с его свойствами, которые детерминированы в классическом понимании. В ОМ эта взаимосвязь может быть перенесена на операторы, происхождение которых связано с ИУП. Действительно, всегда можно себе представить, что ИУП подключен к любой из переменных объекта, при этом у операторов этих переменных будут разные спектральные свойства. Эти свойства дадут о себе знать при возникновении условий сопряжения.

После того как модель сопряжения переменных в процессе идентификации установлена, ее следует использовать при решении прямой задачи ОМ (управления СПО) [3].

Далее рассмотрены вопросы описания и применения аппарата сопряженных переменных для решения задач идентификации и управления электромеханическими объектами.

**Постановка задачи.** На основе подходов, изложенных в [3]–[4], требуется:

- построить элементы математической модели СПО, включающие сопряженные переменные, для решения обратной ОМ (идентификации) и прямой ОМ (управления) задач;

- рассмотреть редуцированную модель управления сопряженными переменными в рамках одномерного одноканального варианта;

- полученные результаты применить к расчету примера решения прямой задачи ОМ – системе управления электромеханическим объектом.

**Построение элементов математической модели системы «прибор–объект», включающей в себя сопряженные переменные.** Прямая (ПЗОМ) и обратная (ОЗОМ) задачи обменной механики формулируются в разных представлениях. Прямая задача (задача управления СПО) формулируется в координатно-временном (КВ) представлении при обеспечении максимально возможной точности для ИУП в этом представлении. Обратная задача (задача идентификации или измерения СПО) формулируется в ИЭ-представлении. В этом представлении также должна быть обеспечена предельно возможная для ИУП точность измерения СПО.

Математические модели процессов, обусловленных решением ПЗОМ и ОЗОМ, рассматриваются здесь с привлечением идей, относящихся к линейным функциональным пространствам, в частности, к гильбертовым пространствам [5]. Смена представления в таком пространстве будет означать смену «системы координат». В этом случае переменные, образующие одноименные координаты, при смене представления переходят в операторы. Оператором, таким образом, можно назвать обобщение понятия матрицы преобразования координат в обычном, геометрическом пространстве. Действие оператора на функцию (вектор) переводит ее в другую функцию (вектор) в том же функциональном пространстве.

Импульс и энергия в ИЭ-представлении – это просто числа (собственные значения операторов импульса и энергии), в КВ-представлении – операторы.

Аналогичная ситуация наблюдается и с переменными координаты и времени: в ИЭ-представлении это будут операторы координаты и времени.

Для указанных двух представлений имеем, таким образом, четыре фундаментальных операторных аргумента координаты, времени, энергии и импульса.

От этих операторов, как от аргументов, могут быть образованы функции. В частности, функция Грина СПО представляет собой такую функцию, обусловленную воздействием двумерной функции Дирака на эту систему.

Для получения форм указанных четырех операторов удобно отталкиваться от действия  $S$  материальной точки как функции координат  $x$  и времени  $t$ :  $S = S(x, t)$ . В окрестности точки с координатами  $x, t$  в однородном пространстве и времени (одномерное движение) имеем  $dS = p dx - E dt$ , где  $p$  – сохраняющийся импульс;  $E$  –

сохраняющаяся энергия. Если пространство и время неоднородны, то имеем дополнительно в этой окрестности приращение для действия  $\delta S = x\delta p - t\delta E$ , и тогда в этой окрестности  $\frac{\delta S}{\delta p} = \frac{\partial S}{\partial p}$ ;  $\frac{\delta S}{\delta E} = \frac{\partial S}{\partial E}$ . Таким образом, поведение  $S$  для материальной точки определяется четырьмя производными:  $\frac{\partial S}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial E}$ .

Рассмотрим модель СПО [3], где кроме указанных ранее неоднородностей может присутствовать ИЭ-обмен и не равный нулю квант действия. В этом случае указанные производные от функции действия следует трансформировать в операторы.

Согласно [3], при решении ОЗОМ функция Грина СПО переводится из КВ-представления в ИЭ-представление разложением ее по собственным функциям  $\varphi_s$  оператора действия вида  $\varphi_s = Ae^{-S_z/I}$ ;  $\varphi = A(x, t)e^{S_z/I}$ , где  $A$  – медленно меняющаяся по сравнению с фазой  $S_z/I$  нормировочная амплитуда;  $I$  – квант действия;  $S_z$  – комплексное действие для свободной материальной точки с сохраняющимися значениями  $p_z$ ,  $E_z$ :  $S_z = p_z x_z - E_z t_z$ , где  $p_z$ ,  $x_z$ ,  $E_z$ ,  $t_z$  – комплексные импульс, координата, энергия и время соответственно. Индекс  $z$  указывает здесь и далее на комплексную плоскость. При этом индекс  $z_1$  сопровождает действительную часть комплексного числа или переменной, индекс  $z_2$  – мнимую часть комплексного числа или переменной.

Указанное разложение по собственным функциям без особых натяжек может быть представлено как прямое двумерное преобразование Лапласа. Комплексность элементарных аргументов в собственных функциях – импульса, координаты, энергии и времени – связана с необходимостью учета импульсно-энергетического обмена в ОМ.

Вопрос существования комплексного действия – вне показателя экспоненты, но как самостоятельной модели – в этой статье не обсуждается. Гипотезой в этой работе служит оператор действия, имеющий такой же вид, как комплексное действие в показателе приведенных ранее его собственных функций:

$$\hat{S}_z = \hat{p}_z \hat{x}_z - \hat{E}_z \hat{t}_z. \quad (2)$$

Оператор действия может быть построен на основе уравнения, называемого задачей на поиск собственных значений и собственных векторов:

$\hat{S}_z \varphi_s = S_z \varphi_s$ , где  $S_z$  – собственные значения оператора действия (2). Однако, учитывая структуру (2), можно определить каждый из элементарных операторов  $\hat{p}_z$ ,  $\hat{x}_z$ ,  $\hat{E}_z$ ,  $\hat{t}_z$ . Эти операторы в ряде случаев могут иметь комплексные собственные значения. Если операторы  $\hat{p}_z$ ,  $\hat{x}_z$ ,  $\hat{E}_z$ ,  $\hat{t}_z$  – самосопряженные, то  $\hat{S}_z$  также будет самосопряжен.

В рассматриваемом подходе важны два представления  $\hat{S}_z$ : КВ- и ИЭ-представление. В КВ-представлении (2) будет иметь вид

$$\hat{S}_z = x_z \hat{p}_z - t_z \hat{E}_z. \quad (3)$$

Из (3) видно, что в КВ-представлении операторы координаты и времени переходят в числа – сомножители для операторов импульса и энергии соответственно.

С учетом того, что  $\varphi_s = \varphi_p \varphi_E$ , можно найти операторы импульса и энергии  $\hat{p}_z$ ,  $\hat{E}_z$  из уравнений

$$\hat{p}_z \varphi_p = p_z \varphi_p; \quad \hat{E}_z \varphi_E = E_z \varphi_E, \quad (4)$$

где  $\varphi_p = A_p e^{p_z x_z/I}$ ,  $\varphi_E = A_E e^{-E_z t_z/I}$  – собственные функции операторов импульса и энергии соответственно;  $p_z = p_{z_1} + j p_{z_2}$ ,  $E_z = E_{z_1} + j E_{z_2}$  – в (4) и далее обозначены как собственные значения операторов импульса и энергии соответственно;  $p_{z_1}$ ,  $E_{z_1}$  – диссипативные или контрудиссипативные импульс и энергия соответственно [3];  $p_{z_2}$ ,  $E_{z_2}$  – консервативные импульс и энергия;  $A_p = \varphi_p(x_0)$ ,  $A_E = \varphi_E(t_0)$  – почти постоянные нормировочные амплитуды;  $x_0$ ,  $t_0$  – начальные координата и время в уравнениях (4);  $j = \sqrt{-1}$ .

Собственные функции удовлетворяют уравнениям (4) в том случае, если операторы импульса и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{p}_z &= j \left( p_{z_1} - I \frac{\partial}{\partial x_z} \right); \\ \hat{E}_z &= -j \left( E_{z_1} + I \frac{\partial}{\partial t_z} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Используем аналогичную методику для построения операторов  $\hat{x}_z$  и  $\hat{t}_z$ , входящих в оператор действия  $\hat{S}_z$  в ИЭ-представлении:

$$\hat{S}_z = p_z \hat{x}_z - E_z \hat{t}_z. \quad (6)$$

Операторы координаты и времени  $\hat{x}_z$ ,  $\hat{t}_z$  в (6) найдутся из уравнений

$$\hat{x}_z \varphi_x = x_z \varphi_x; \quad \hat{t}_z \varphi_t = t_z \varphi_t. \quad (7)$$

Будем иметь  $\varphi_x = A_x e^{x_z p_z / I}$ ;  $\varphi_t = A_t \times e^{-t_z E_z / I}$  – собственные функции операторов координаты и времени соответственно;  $x_z = x_{z_1} + jx_{z_2}$ ;  $t_z = t_{z_1} + jt_{z_2}$ ;  $x_{z_1}$ ,  $t_{z_1}$  – линейно изменяющиеся координата и аизоэнтропийное время соответственно, обусловленные изменением энтропии в СПО вследствие обмена;  $x_{z_2}$ ,  $t_{z_2}$  – квазициклическая координата и время, обусловленное изоэнтропийными (адиабатическими) процессами, протекающими в СПО, т. е. обратимое механистическое время.

Выведенные из (7) операторы координаты и времени имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_z &= j \left( x_{z_1} + I \frac{\partial}{\partial p_z} \right); \\ \hat{t}_z &= -j \left( t_{z_1} + I \frac{\partial}{\partial E_z} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Каждый из четырех элементарных операторов (5), (8) получен на основе обобщения четырех производных действия с учетом ИЭ-обмена и ограничений ИУП. Как видно из (5), (8), операторы состоят из неконсервативной (первое слагаемое в скобках) и консервативной частей. Применительно к ЭМО эти слагаемые, с небольшой натяжкой, можно было бы назвать активной и реактивной составляющими оператора.

Идея использования линейных и циклических координат в механике не нова [6], [7]. Однако в этой статье выполнено их агрегирование в комплексные переменные (включая время), расположенные в показателе степени функции обмена, функции Грина и собственных функций элементарных операторов.

В функциях обмена и Грина присутствуют и обменная, и статистическая составляющие, которые феноменологически не разделить. Такая модель позволяет рассмотреть и описать в том числе и немеханические процессы, протекающие в СПО, при решении ПЗОМ и ОЗОМ.

В этой статье обсуждается решение указанных задач для ЭМО, природа которых допускает упрощенное представление ряда элементарных операторов и их собственных функций. В частно-

сти, при решении ОЗОМ может присутствовать только изоэнтропийная составляющая времени  $t_{z_2}$  и квазициклическая составляющая координаты  $x_{z_2}$ , которые в [8] обозначены как  $t$  и  $x$ . Последнее связано с тем, что импульсно-энергетический обмен учитывается в алгоритме решения этой задачи. Аналогично, при решении ПЗОМ функция Грина в координатно-временном представлении будет иметь аргументы  $x_{z_2}$  и  $t_{z_2}$ .

Таким образом, при решении задач ОМ для СПО ЭМО элементарные операторы координаты и времени могут иметь вид  $\hat{x} = jI \frac{\partial}{\partial p_{z_2}}$ ;  $\hat{t} = -jI \frac{\partial}{\partial E_{z_2}}$ , а операторы импульса и энергии

будут представлены как  $\hat{p}_z = j \left( p_{z_1} - I \frac{\partial}{\partial x_{z_2}} \right)$ ;

$\hat{E}_z = -j \left( E_{z_1} + I \frac{\partial}{\partial t_{z_2}} \right)$ . Аргументы с индексом  $z_2$  действительны, поэтому, опуская индексы, получим

$$\begin{aligned} \hat{x} &= jI \frac{\partial}{\partial p}; \quad \hat{t} = -jI \frac{\partial}{\partial E}; \\ \hat{p}_z &= j \left( p_{z_1} - I \frac{\partial}{\partial x} \right); \\ \hat{E}_z &= -j \left( E_{z_1} + I \frac{\partial}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Однако если функция Грина («передаточная» функция)  $W(x, E)$  [3] абсолютно интегрируема по  $x$ , то для вычисления функции Грина  $G(p, E)$  можно воспользоваться разложением по собственным функциям оператора импульса:

$$\hat{p} = -jI \frac{\partial}{\partial x}. \quad (10)$$

Элементарные операторы (10) – самосопряженные, т. е. имеют действительные собственные значения. Для самосопряженных операторов их транспонирование соответствует их комплексному сопряжению. Пусть  $\hat{A}$  – линейный оператор,  $\tilde{\hat{A}}$  – оператор, транспонированный к  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}^*$  – оператор, комплексно сопряженный к  $\hat{A}$ . Тогда оператор  $\hat{A}$  будет самосопряженным (эрмитовым), если

$$\tilde{\hat{A}} = \hat{A}^*. \quad (11)$$

Операция транспонирования состоит в следующем. Пусть  $\phi(x)$  и  $\vartheta(x)$  – функции обмена, обладающие свойством абсолютной интегрируемости. Тогда

$$\int \vartheta(\hat{A}\phi) dx = \int \vartheta(\tilde{A}\phi) dx. \quad (12)$$

С учетом того, что вместо  $\vartheta(x)$  можно выбрать  $\phi^*(x)$ , имеем, согласно [3],  $\int \phi^*(\hat{A}\phi) dx = \int \phi(\hat{A}^*\phi^*) dx$ . Тогда на основании (12) можно получить (11).

Покажем, что хотя бы один из четырех элементарных операторов, например оператор импульса, самосопряженный. Тогда, учитывая их одинаковую структуру, остальные операторы также самосопряжены. Для функций  $\phi(x)$ ,  $\vartheta(x)$  и оператора  $\hat{p}_z$  из (9) получим

$$\int \vartheta(\hat{p}_z\phi) dx = j \int \vartheta p_{z_1} \phi dx - jI \int \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \phi dx. \quad (13)$$

Интегриру второе слагаемое в правой части (13) по частям, будем иметь  $-jI \int \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \phi dx = jI \int \phi \frac{\partial}{\partial x} \vartheta dx$ . Так как в первом слагаемом (13)  $p_{z_1}$  – просто функция, то получим окончательно

$$\int \vartheta(\hat{p}_z\phi) dx = \int \phi(\hat{p}_z^* \vartheta) dx,$$

а это и есть условие самосопряженности оператора импульса.

Рассматривая проблему точности одновременного измерения и управления переменными  $p$ ,  $E$ ,  $x$ ,  $t$  в рамках данного подхода, из собственных функций элементарных операторов можно видеть, что эти переменные сгруппированы в пары  $p$ ,  $x$  и  $E$ ,  $t$ . Например, при решении ОЗОМ [8] произведение погрешностей  $\pi \Delta x \Delta p$  образует площадь виртуального эллипса (с точностью до отношения «сигнал-шум»). Вследствие адиабатической инвариантности действия и импульсно-энергетического обмена площадь эллипса, образованного квантом действия  $I$ , сохраняется, но при этом, соответственно, взаимно изменяются длины его главных осей  $\Delta x$  и  $\Delta p$ .

Покажем, как предлагаемый здесь аппарат функционального анализа позволяет получить указанный результат попарного сопряжения переменных.

Пусть СПО находится в области  $\Delta x$  и при этом среднее значение импульса –  $p_{z_0}$ . Функция обмена  $\phi$  при этом будет ненулевой в указанной

области благодаря амплитуде  $A$  и диссипационной части, определяющей обмен:

$$\phi(x) = A(x) e^{p_{z_0} x / I}. \quad (14)$$

Разложим (14) по собственным функциям оператора импульса (в интеграл Лапласа):

$$\begin{aligned} f(p_z) &= \int \phi(x) \phi_p^*(x) dx = \\ &= \int A(x) e^{-(p_{z_0} - p_z)x / I} dx, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $f(p_z)$  – функция обмена в импульсном представлении;  $\phi_p^*$  – функция, комплексно сопряженная  $\phi_p$ . Чтобы интеграл (15) был заметно отличен от нуля, период колебательной части  $e^{-(p_{z_0} - p_z)x / I}$  должен быть сравним с областью  $\Delta x$ , в которой амплитуда  $A$  не равна нулю, или больше ее. На основании этого для модулей показателя степени будем иметь  $\frac{|p_0 - p_z| |\Delta x|}{I} \approx 1$ .

С учетом того, что  $|p_0 - p_z|$  – суть интервал значений, в который могут попасть реальные значения импульсов при решении прямой и обратной задач при обмене и статистическом разбросе, определяем  $|f(p_z)|^2$ , последнее выражение можно записать так:

$$|\Delta p_z| |\Delta x| \approx I. \quad (16)$$

В случае, если СПО почти консервативная, так, что активная составляющая в обмене отсутствует, то соблюдается условие абсолютной интегрируемости, и будем иметь

$$\Delta p \Delta x \approx I. \quad (17)$$

Таким же образом можно получить условия сопряженности переменных энергии и времени, аналогичные (16), (17):

$$|\Delta E_z| |\Delta t| \approx I; \Delta E \Delta t \approx I. \quad (18)$$

В случае операторов более сложного вида (составных, или функций от элементарных операторов, например функцию Грина можно также рассматривать как оператор) следует понять природу выражения (1), простирающуюся из (16)–(18).

В случае идеального ИУП при отсутствии ИЭ-обмена операторы вырождаются в числа или функции  $a$  и  $b$ , так, что  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \equiv [\hat{A}\hat{B}] = [ab] \rightarrow 0$ .

В следующем приближении с близким к идеальному ИУП, но при наличии ИЭ-обмена, актуальном для высокоточных ЭМО, можно положить

$$[\hat{A}\hat{B}] \approx jIc, \quad (19)$$

где  $c$  – число или функция, в которую вырождается оператор  $\hat{C}$  в (1), так, что такой результат похож на вычисление скобки Пуассона в гамильтоновой механике;  $j$  – мнимая единица, поддерживающая свойство эрмитовости оператора  $[\hat{A}\hat{B}]$ . В форме (19) коммутатор  $[\hat{A}\hat{B}]$  соответствует условиям сопряженности (18) (пропорционален им), так что можно записать:

$$\Delta A\Delta B \approx Ic. \quad (20)$$

В следующем приближении, с неидеальным ИУП, при наличии низкоинтенсивного ИЭ-обмена, когда квант действия сравним с масштабом достоверных результатов, (1) будет иметь вид

$$[\hat{A}\hat{B}] = jI\hat{C}, \quad (21)$$

где  $\hat{C}$  – коммутатор (1), который следует определить экспериментально либо рассчитать.

**Обсуждение одномерного одноканального варианта управления сопряженными переменными в рамках редуцированной модели.** Схема наиболее общего вида, иллюстрирующая ПЗОМ и отвечающая (1), (19)–(21), представлена на рис. 1.

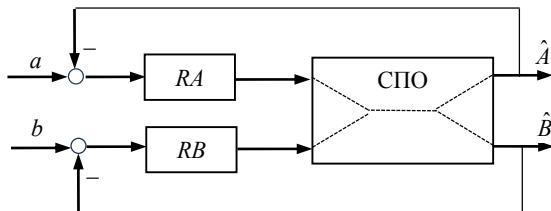


Рис. 1. Схема общего вида решения прямой задачи обменной механики для двух сопряженных переменных

Fig. 1. A general scheme for solving the direct problem of exchange mechanics for two conjugated variables

На рисунке обозначены: СПО – система «прибор–объект», на выходе которой наблюдаются два сопряженных оператора  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , так как СПО имеет фрагмент общего канала для указанных операторов;  $RA$  и  $RB$  – регуляторы соответ-

ствующих сопряженных каналов, обеспечивающих стабилизацию собственных значений операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в соответствии с заданным критерием качества – фильтром нижних частот (ФНЧ), околоидеальных форм сигналов  $a$  и  $b$ .

На основании гипотезы, указанной во введении, о том, что сопряжение операторов в СПО может быть перенесено на ИУП, в нем находится фрагмент общего канала операторов. Таким образом, сопряжение операторов требует согласованного изменения пропускной способности оптимальных фильтров или их среднеквадратичного отклонения (или дисперсии) в соответствии с правилами (1), (19)–(21).

Рассмотрим редуцированную модель [4] обменных процессов при решении ПЗОМ. В частности, для этой модели вводится оператор частоты, имеющий вид

$$\hat{\omega}_z = \lim_{I \rightarrow 0} \frac{\hat{E}_z}{I} = -j \left( \sigma_{z_1} + \frac{\partial}{\partial t_z} \right), \quad (22)$$

где  $\sigma_{z_1} = \lim_{I \rightarrow 0} \frac{E_{z_1}}{I}$ . Собственная функция оператора  $\hat{\omega}_z$  в (22) будет  $\Phi_{\omega} = A_{\omega} e^{\omega_z t}$ , где  $\omega_z = \sigma_{z_1} + j\omega_{z_2}$ ;  $\omega_{z_2}$  – собственные значения оператора частоты. В одномерном случае в окрестности  $x_0$  для ЭМО будем иметь  $\hat{\omega}_z = \hat{s}$  и  $\hat{s} = -j \left( \sigma + \frac{d}{dt} \right)$ . В энергетическом представлении

(в окрестности точки  $x_0$ ) оператор  $\hat{s}$  становится переменной  $s = \sigma + j\omega$ , где  $\sigma$  – диссипативная часть комплексной частоты,  $\omega$  – ее консервативная часть. Функции от  $s$  называются передаточными функциями (ПФ).

Пусть ПФ какого-либо фильтра нижних частот есть  $W(s)$ . Модули ПФ идеальных ФНЧ переменных  $A$  и  $B$  в случае их сопряженности  $|W_{CA}(s)|$  и  $|W_{CB}(s)|$ , сохраняются, а меняются их низкочастотные «полосы пропускания», называемые здесь среднеквадратичными отклонениями,

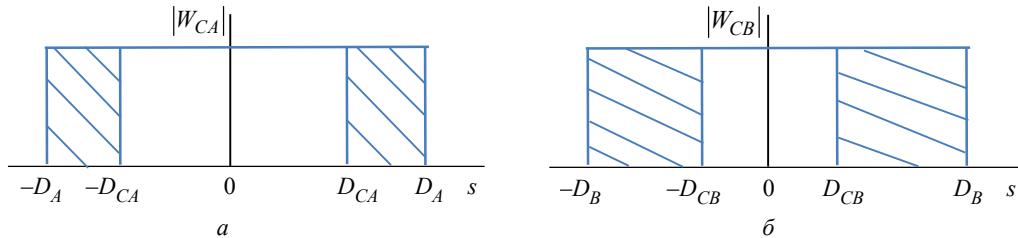


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики идеальных фильтров нижних частот для одноканальной системы управления двумя сопряженными переменными: а –  $A$ ; б –  $B$

Fig. 2. The amplitude-frequency characteristics of ideal low-pass filters for a one-channel control system of two conjugated variables: а –  $A$ ; б –  $B$

квадраты которых есть дисперсии (рис. 2). Для краткости далее употребляется термин «дисперсия», качественно идентичный термину «среднеквадратичное отклонение».

На рис. 2 абсциссы заштрихованных областей показывают изменение дисперсий  $D_A - D_{CA}$  (рис. 2, *a*) и  $D_B - D_{CB}$  (рис. 2, *б*) переменных *A* и *B* соответственно. Дисперсии  $D_A$  и  $D_B$  отражают «полосы» переменных с независимыми каналами,  $D_{CA}$  и  $D_{CB}$  – «полосы» этих же переменных, разделяющих общую часть канала.

Для реальных ФНЧ закон сохранения амплитуды ПФ при изменении дисперсий сопряженных переменных будет почти таким же, как на рис. 2. В частности, для максимально-плоской функции – фильтра Баттервортса 2-го порядка  $H_2(s)$ , имеющего вид

$$H_2(s) = \frac{G_0}{B_2(s)}, \quad (23)$$

где  $G_0$  – коэффициент передачи на нулевой частоте;  $B_2(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$ . Связав  $G_0$  с частотой среза  $\omega_c$ , получим из (23)

$$H_2(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \omega_c \sqrt{2}s + \omega_c^2}. \quad (24)$$

Так как оригинал (24) обладает свойством абсолютной интегрируемости, заменим  $s = \sigma + j\omega$  на  $s = j\omega$ . Взяв далее от (24) модуль, получим

$$|H_2(j\omega)| = \frac{\omega_c^2}{\sqrt{\omega_c^4 + \omega^4}}. \quad (25)$$

Графики (25) при управлении дисперсиями сопряженных переменных для  $\omega_c = 20 \text{ c}^{-1}$  (кривая 1) и  $\omega_c = 5 \text{ c}^{-1}$  (кривая 2) представлены на рис. 3.

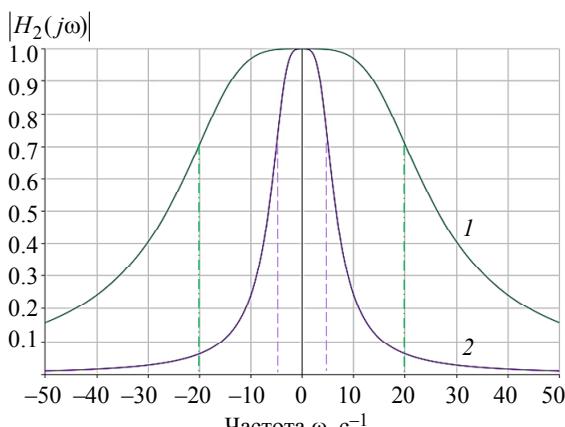


Рис. 3. Управление дисперсиями сопряженных переменных  
Fig. 3. Control of dispersions of conjugated variables

Частоты среза ФНЧ, называемые здесь дисперсиями, соответствуют уменьшению амплитуды на 3 дБ на декаду, т. е. примерно в 0.708 раз (на рис. 3 представлены проекциями на ось абсцисс, штрих-пунктир для кривой 1 и длинный штрих для кривой 2).

В русле редуцированной модели целесообразно обсудить и рассчитать закон управления дисперсиями и границы такого управления. Для определения границ в расчетную схему следует ввести идентичные несопряженные каналы (переменные – степени свободы).

Вследствие того, что идеальные ФНЧ (рис. 2) не удовлетворяют критериям реализуемости и грубости, в отличие от (24), (25) и рис. 3, расчеты следует вести не на основе дисперсий, а в терминах ПФ.

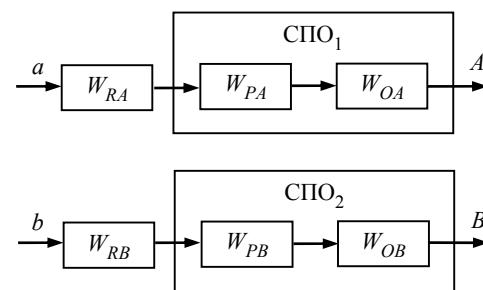


Рис. 4. Расчетная схема несопряженных каналов  
Fig. 4. Calculation scheme of non-conjugated channels

Расчетная схема несопряженных каналов представлена на рис. 4.

На рисунке, вследствие того, что квант действия  $I \rightarrow 0$ , внутри СПО<sub>1</sub> и СПО<sub>2</sub> каналов *A* и *B* выполнено разделение на ПФ приборов  $W_{PA}$ ,  $W_{PB}$  и ПФ объектов  $W_{OA}$ ,  $W_{OB}$ ;  $W_{RA}$ ,  $W_{RB}$  – ПФ регуляторов каналов *A* и *B*. Пусть ПФ регуляторов каналов таковы, что ПФ каналов *A* и *B*,  $W_A$  и  $W_B$  имеют вид, следующий из (24), для «разомкнутых» систем,

$$\frac{\omega_c^2}{s(s + \omega_c \sqrt{2})}, \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} W_A = W_{RA}W_{PA}W_{OA}; \\ W_B = W_{RB}W_{PB}W_{OB}. \end{cases} \quad (26)$$

Так как каналы управления независимы, их дисперсии (частоты среза)  $\omega_c$  можно менять по любому закону в пределах  $[0, \omega_{mA}]$  и  $[0, \omega_{mB}]$  соответственно ( $\omega_m$  – предельно допустимая дисперсия каналов *A* или *B*). Здесь обсуждаем только первый квадрант по рис. 3, полагая, что во втором квадранте все происходит качественно так же. Так что ПФ каналов с управляемой дисперсией  $W_{CA}$  и  $W_{CB}$  можно представить в виде

$$\begin{cases} W_{CA} = \frac{1}{2}(W_A \pm \Delta W_A); \\ W_{CB} = \frac{1}{2}(W_B \pm \Delta W_B), \end{cases} \quad (27)$$

где  $\Delta W_A, \Delta W_B$  – управляемое изменение ПФ ФНЧ вида (24), но для «разомкнутых» независимых каналов  $A$  и  $B$  вследствие изменения их дисперсий  $\omega_{mA}$  и  $\omega_{mB}$ .

Для сопряженных каналов, в условиях указанного разделения, разные схемы сопряжения приводят к одному расчетному результату. Здесь предполагается, что наиболее общий вариант сопряжения представлен на рис. 5.

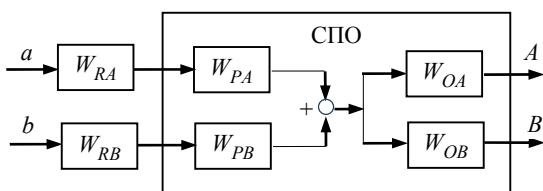


Рис. 5. Расчетная схема сопряженных каналов  
Fig. 5. Calculation scheme of conjugated channels

ПФ сопряженных каналов  $A$  и  $B$  на основании рис. 5 имеют вид

$$\begin{cases} W_{CA} = (W_{RA}W_{PA} + W_{RB}W_{PB})W_{OA}; \\ W_{CB} = (W_{RA}W_{PA} + W_{RB}W_{PB})W_{OB}. \end{cases} \quad (28)$$

Из (28) следует, что переменными  $A, B$  можно управлять только от одного из регуляторов  $RA$  или  $RB$ . Действительно, выполнив деление второго уравнения (28) на первое, получим пропорцию

$$W_{CB} = \frac{W_{OB}}{W_{OA}}W_{CA} \text{ и, если } \frac{W_{OB}}{W_{OA}} \text{ не является коэф-}$$

фициентом пропорциональности, переменными можно управлять от регуляторов  $RA$  либо  $RB$  с разным качеством. Однако здесь интересно раздельное управление переменными  $A$  и  $B$  с той степенью независимости, которую допускает их сопряжение.

Для решения этой задачи в независимых каналах следует выделить аддитивные части  $\Delta W$ , как в (27), возникающие в результате сопряжения переменных. Для этого следует выразить  $W_{PA}$  и  $W_{PB}$  из (26), подставив затем эти выражения в (28). Сохраняя в выражениях  $W_A$  и  $W_B$ , получим

$$\begin{cases} W_{CA} = W_A + \frac{W_{OA}}{W_{OB}}W_B; \\ W_{CB} = W_B + \frac{W_{OB}}{W_{OA}}W_A. \end{cases} \quad (29)$$

Обозначая аддитивные слагаемые в правых частях (29)  $\Delta W_A = \frac{W_{OA}}{W_{OB}}W_B$ ,  $\Delta W_B = \frac{W_{OB}}{W_{OA}}W_A$ , следует отметить, что система (29) будет неустойчива, так как дисперсии этих ФНЧ будут больше, чем  $\omega_{mA}$  и  $\omega_{mB}$ , поэтому следует воспользоваться выражением (27), но с учетом свойства сопряженности. Будем иметь

$$\begin{cases} W_{CA} = \frac{1}{2}(W_A \pm \Delta W_A); \\ W_{CB} = \frac{1}{2}(W_B \mp \Delta W_B). \end{cases} \quad (30)$$

Отличие (30) от (27) заключается как в канальных связях внутри  $\Delta W_A, \Delta W_B$ , так и в противоположных знаках аддитивных слагаемых правых частей, причем из (29), (30) следует  $\Delta W_A \Delta W_B = W_B W_A$ , что представляет собой редукцию из (20), так как ПФ  $W_B, W_A$  в своих дисперсиях неизменны.

Поскольку выражения (27), (29), (30) написаны для ФНЧ, будет полезным рассмотреть их дисперсионный аналог. Как и в (30) для ПФ, для дисперсий имеем

$$\begin{cases} \omega_{CA} = \frac{1}{2}(\omega_{mA} \pm \Delta\omega_A); \\ \omega_{CB} = \frac{1}{2}(\omega_{mB} \mp \Delta\omega_B), \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \Delta\omega_A \leq \omega_{mA}; \\ 0 \leq \Delta\omega_B \leq \omega_{mB}, \end{cases} \quad (31)$$

где  $\omega_{CA}, \omega_{CB}$  – дисперсии сопряженных каналов  $A$  и  $B$ ;  $\omega_{mA}, \omega_{mB}$  – предельно возможные дисперсии эквивалентных несопряженных каналов (рис. 4);  $\Delta\omega_A, \Delta\omega_B$  – управляемое изменение дисперсий сопряженных каналов, являющихся ФНЧ. В частности, если  $\Delta\omega_A = \Delta\omega_B = 0$  и  $\omega_{mA} = \omega_{mB}$ , то  $\omega_{CA}\omega_{CB} = \frac{1}{4}\omega^2$  – управление при одинаковых неизменных дисперсиях сопряженных каналов  $A$  и  $B$ .

Таким образом, для управления сопряженными каналами следует рассчитать ПФ регуляторов так, как будто эти каналы независимы, а затем учесть условия сопряжения (30) или (31).

В процессе управления дисперсиями возникает вопрос о скорости их изменения. В случае взаимного изменения дисперсий сопряженных кан-

лов, например:  $\begin{cases} 0 \rightarrow \omega_A \rightarrow \omega_{mA} \\ \omega_{mB} \rightarrow \omega_B \rightarrow 0 \end{cases}$  либо  $\begin{cases} \omega_{mA} \rightarrow \omega_A \rightarrow 0; \\ 0 \rightarrow \omega_B \rightarrow \omega_{mB}, \end{cases}$  изменения следует проводить

квазистатически, т. е. на порядок дольше среднего времени переходного процесса в каналах управления.

**Построение примера расчета одномерного одноканального варианта управления сопряженными переменными в рамках редуцированной модели.** Здесь, в русле предыдущего раздела с использованием методов функционального анализа, будет приведен расчет регуляторов для управления часто встречающимися в ЭМО сопряженными переменными – скоростью и положением исполнительного механизма (ИМ). Расчетная схема сопряженных каналов скорости (канал  $A$ ) и положения (канал  $B$ ) («разомкнутый» вариант системы) представлена на рис. 6.

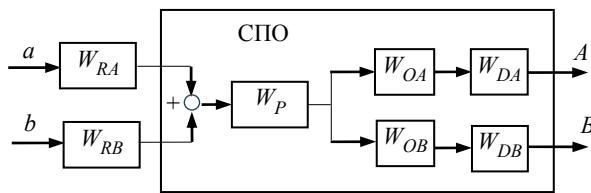


Рис. 6. Расчетная схема сопряженных каналов: скорости и положения  
Fig. 6. Calculation scheme of conjugated channels: velocities and positions

На рис. 6 использованы те же обозначения, что и на рис. 5, но добавлены блоки ПФ датчиков каналов  $W_{DA}$  и  $W_{DB}$ , входящих в СПО, которые здесь для простоты предполагаются равными единице. Система имеет общий блок  $W_P$ , который и сопрягает оба канала.

Пусть, например, оптимальная ПФ системы управления переменной  $A$  имеет вид  $W_{CA}(s) = \frac{\omega_A^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_A s}$ , а функция Грина прибора  $W_P(s) = \frac{K_\mu}{T_\mu s + 1}$ , где  $K_\mu$ ,  $T_\mu$  – коэффициенты ИУП. ПФ объекта  $W_{OA}(s)$  имеет вид  $W_{OA}(s) = \frac{1}{T_{OA}s}$ , где  $T_{OA}$  – постоянная времени объекта по переменной  $A$ . Тогда ПФ регулятора скорости для переменной  $A$ , как переменной независимого канала, имеет вид

$$W_{RA}(s) = \frac{W_{CA}}{W_P W_{OA}} = \frac{\omega_A^2 T_{OA}}{K_\mu} \frac{T_\mu s + 1}{s + \sqrt{2}\omega_A}. \quad (32)$$

Если бы переменной  $B$  не существовало, то следовало бы положить  $\omega_A = \omega_m = 1/\sqrt{2}T_\mu$ , и вместо (32) получилось бы  $W_{RA}(s) = \frac{T_{OA}}{2T_\mu K_\mu}$ . Од-

нако переменная  $B$  существует и находится в со-пряжении с переменной  $A$ , и для  $W_{RB}(s)$  следует получить выражение, аналогичное (32).

Рассчитаем ПФ регулятора положения  $W_{RB}(s)$ .

Полагаем также  $W_{CB}(s) = \frac{\omega_B^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_B s}$ ; ПФ объ-екта  $W_{OB}(s) = \frac{1}{T_{OB}s^2}$ ,  $T_{OB}$  – постоянная времени объекта по переменной  $B$ . Имеем для регулятора независимого канала управления по положению

$$W_{RB} = \frac{W_{CB}}{W_P W_{OB}} = \frac{\omega_B^2 T_{OB}}{K_\mu} \frac{T_\mu s + 1}{s + \sqrt{2}\omega_B}. \quad (33)$$

Если бы переменной  $B$  не существовало, то следовало бы положить  $\omega_B = \omega_m = 1/\sqrt{2}T_\mu$ , и вместо (33) получилось бы  $W_{RB}(s) = \frac{T_{OB}}{2T_\mu K_\mu} s$ .

Для выделения целых частей в дробях (32), (33) выполним деление «углом». Получим:

$$W_{RA}(s) = \frac{\omega_A^2 T_{OA}}{K_\mu} \left( T_\mu + \frac{1 - T_\mu \sqrt{2}\omega_A}{s + \sqrt{2}\omega_A} \right); \quad (34)$$

$$W_{RB}(s) = \frac{\omega_B^2 T_{OB}}{K_\mu} \times \left( T_\mu s + 1 - \sqrt{2}T_\mu \omega_B + \frac{2T_\mu \omega_B^2 - \sqrt{2}\omega_B}{s + \sqrt{2}\omega_B} \right). \quad (35)$$

Для получения (35) дважды выполнено деление «углом», что соответствует разложению дробно-рациональной функции в ряд Лорана с удержанием остаточного слагаемого.

Найдем операторы (функции Грина) регуляторов  $w_{RA}(t, \omega_A)$ ,  $w_{RB}(t, \omega_B)$  во временном представлении:

$$w_{RA}(t, \omega_A) = \frac{\omega_A^2 T_{OA}}{K_\mu} \left[ T_\mu \delta_G^{(0)}(t - t_{u_0}, \omega_u) - \sqrt{2}\omega_A (1 - T_\mu \sqrt{2}\omega_A) \delta_R^{(-1)}(t, \omega_u) e^{-\sqrt{2}\omega_A t} \right], \quad (36)$$

$$w_{RB}(t, \omega_B) = \frac{\omega_B^2 T_{OB}}{K_\mu} \times \left[ T_\mu \delta_G^{(1)}(t - t_{u_1}, \omega_u) + (1 - T_\mu \sqrt{2}\omega_B) \delta_R^{(0)}(t - t_{u_0}, \omega_u) - \sqrt{2}\omega_{mx}^2 (2T_\mu \omega_B - \sqrt{2}) \times \delta_R^{(-1)}(t, \omega_u) e^{-\sqrt{2}\omega_B t} \right]. \quad (37)$$

Функции  $\delta_G^{(0)}, \delta_G^{(1)}, \delta_R^{(-1)}$ , представленные в (36), (37), будут описаны далее.

Выражения (36), (37) – это не оригиналы (34), (35), так как имеют ряд модельных особенностей:

– для последующего расчета скалярного произведения в функциональном пространстве (свертки) требуется, чтобы слагаемые в (36), (37) были производными от оригиналов изображений (34), (35);

– по этой же причине все слагаемые (36), (37) должны обращаться в нуль в начале координат, однако в приведенном примере в операторах регуляторов используются вейвлеты из гауссова волнового пакета и производная экспоненты, которые в начале координат не обращаются в нуль.

Эти особенности реализованы здесь следующим образом. Дисперсия  $\omega_u$  базового вейвлета гауссова волнового пакета  $\delta_G^{(0)}$  в (36), (37) должна быть как минимум на порядок больше максимальной дисперсии каналов  $\omega_m$ , так как в рассматриваемой редукции  $I \rightarrow 0$ . Полагаем поэтому

$\frac{\omega_u}{\omega_m} = 15 = c$ . В свою очередь, интервал квантования  $T$  должен быть настолько мал, чтобы обеспечить достаточно точный расчет вейвлетов. Поэтому

полагаем  $T\omega_u = \frac{1}{c}$ . Временной сдвиг  $t_{u_0}$  для базового вейвлета соответствует половине его дисперсии и рассчитывается по выражению

$$t_{u_0} = \frac{1}{\omega_u} \sqrt{\ln 2}. \quad (38)$$

Для вейвлетов с порядком более нулевого можно, руководствуясь «дисперсионным правилом» (38), определить смещение  $t_{um}$  для финитных функций  $\delta_G^{(m)}$  при  $m = 1, 2, \dots$ . Потребуем для этих функций одинаковой с  $\delta_G^{(0)}$  точности расчета значений. Это требование приводит к уравнению  $\delta_G^{(m)}(t, \omega_u) = \frac{\omega_u}{2\sqrt{\pi}}$ . Так как данное уравнение имеет  $2m$  корней, следует выбрать корень с максимальным по модулю значением  $t$  – это и будет смещение  $t_{um}$ .

В (36), (37) из-за сложности аналитического расчета интеграла  $\delta_G^{(0)}$ , используется  $\delta_R^{(-1)}$  – рациональная аппроксимация интеграла от

$\delta_G^{(0)}(t, \omega_u)$ :  $\delta_R^{(-1)}(t, \omega_u) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \omega_u t$ . Вейвлет

$\delta_R^{(-1)}$  обеспечивает нуль экспонентам при  $t = 0$ . Система вейвлетов гауссова волнового пакета  $\delta_G^{(m)}(t, \omega_u)$  имеет вид  $\delta_G^{(m)}(t, \omega_u) = (-1)^m \frac{\omega_u^{m+1}}{\sqrt{\pi}} H_m(\omega_u t) e^{-\omega_u^2 t^2}$ , где  $H_m$  – полиномы Эрмита порядка  $m$ .

Управления  $u_A(t, \omega_A), u_B(t, \omega_B)$  сопряженными переменными  $A, B$  (скоростью и положением соответственно) будут иметь вид  $u_A(t, \omega_A) = \int_0^t w_{RA}(t - \tau, \omega_A) e_A(\tau) d\tau, u_B(t, \omega_B) = \int_0^t w_{RB} \times$   
 $\times (t - \tau, \omega_B) e_B(\tau) d\tau$ , где  $e_A, e_B$  – рассогласования по соответствующим переменным;  $\tau$  – внутренняя переменная интегрирования по времени в пределах от 0 до  $t$ .

Ранг  $M$  матриц операторов  $w_R(t - \tau, \omega)$  составит  $M = c\omega_u T_\mu$ .

**Обсуждение результатов.** Использование в статье операторных форм  $\hat{S}_z = x_z \hat{p}_z - t_z \hat{E}_z$  и  $\hat{S}_z = p_z \hat{x}_z - E_z \hat{t}_z$ , а также следующих из них четырех фундаментальных операторных аргументов обусловлено возможностью представлять движение СПО в виде материальной квазиточки (квази– потому, что точка «размыта в пятно», в центре которого – среднее положение СПО). Комплексные операторные формы (5), (8) имеют совершенно симметричный вид. Они позволяют объединить не только обменную и статистическую составляющие движения, но и указать на линейную и циклическую части координаты и времени СПО, охватывая тем самым анизоэнтропийную и изоэнтропийную части модели движения.

Решение ПЗОМ для СП значительно выходит за рамки метода Хевисайда, так как этот метод служит подспорьем для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. он построен для детерминированных моделей. Указанная задача, по существу, статистическая, и только редукционная модель позволила применить в части решения аналитику ПФ. При этом одномерный одноканальный вариант редуцированной модели наиболее прост с точки зрения понимания происходящих процессов. Однако остаются сомнения в обоснованности применения аналитики ПФ.

Использование аппарата вейвлетов в расчетном примере не было обязательным. Вейвлеты позволяют избежать сингулярностей при переходе из  $s$ -представления в  $t$ -представление. Можно было бы построить правильные дробно-рациональные выражения для регуляторов, немного изменив исходные критерии качества. В этом случае можно было бы избежать временных сдвигов  $t_{um}$ , однако появились бы небольшие потери в быстродействии.

Проблема выбора числа  $s$  в расчетном примере фундаментальна для этой и других задач управления ЭМО и восходит к неправомерности применения к ним результатов теоремы Котельникова–Шеннона. Возможно, теорема нуждается в расширении на системы с почти разрывным спектром.

**Выводы.** Объединение свойства сопряженности переменных и ИЭ-обмена в СПО позволяет решать важные задачи управления в ЭМО.

Для формализации ИЭ-обмена в случае, когда переменные в системе управления сопряжены, построены сопряженные операторы – аргументы как фундаментальные элементы соответствующих математических моделей.

Построена и обоснована редуцированная модель для одномерного одноканального варианта управления сопряженными переменными в русле управления ЭМО.

С целью верификации результатов выполнен расчет важного для области ЭМО примера управления сопряженными переменными.

Из приведенных результатов видна необходимость разработки нередуцированной модели управления сопряженными переменными по (1), (19)–(21), наряду с совершенствованием аналитического и схемного языков описания моделей.

### Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1984. 752 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 5. Статистическая физика. Т. 1. 5-е изд. М.: Наука, 2002. 616 с.
3. Омельченко А. Ю. Математические модели обменных процессов для идентификации и управления электромеханическими объектами // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 3. С. 67–74. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-3-67-74.
4. Омельченко А. Ю. Редукция модели обменных процессов при идентификации электромеханических объектов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 6. С. 78–83. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-78-83.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, Физматлит, 1981. 544 с.
6. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: в 2 т. Т. 1 / пер. с нем. М. М. Постникова. М.: Наука, 1989. 456 с.
7. Блехман И. И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
8. Омельченко А. Ю. Инженерные методики идентификации электромеханических объектов с учетом моделей обменных процессов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2025. Т. 18, № 2. С. 82–89. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-2-82-89.

### Информация об авторе

**Омельченко Алексей Юрьевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники и автоматизации производственных систем СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: alex1957.12@mail.ru

### References

1. Landau L. D., Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika: v 10 t. T. 3. Kvantovaja mehanika (nereljativistskaja teoriya). M.: Nauka, 1984. 752 s. (In Russ.).
2. Landau L. D., Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika: v 10 t. T. 5. Statisticheskaja fizika. T. 1. 5-е изд. M.: Nauka, 2002. 616 s. (In Russ.).
3. Omel'chenko A. Ju. Matematicheskie modeli obmennyh processov dlja identifikacii i upravlenija elektromechanicheskimi obektami // Izv. SPGJeTU «LJeTI». 2024. T. 17, № 3. S. 67–74. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-3-67-74. (In Russ.).
4. Omel'chenko A. Ju. Redukcija modeli obmennnyh processov pri identifikacii jelektromechanicheskikh obektov // Izv. SPGJeTU «LJeTI». 2024. T. 17, № 6. S. 78–83. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-78-83. (In Russ.).
5. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Jelementy teorii funkciij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, Fizmatlit, 1981. 544 s. (In Russ.).
6. Klejn F. Lekcii o razvitiu matematiki v XIX stoletii: v 2 t. T. 1 / per. s nem. M. M. Postnikova. M.: Nauka, 1989. 456 s. (In Russ.).
7. Blehman I. I. Vibracionnaja mehanika. M.: Fizmatlit, 1994. 400 s. (In Russ.).

- 
8. Omel'chenko A. Ju. Inzhenernye metodiki identifikacii jelektromehanicheskikh ob'ektov s uchjotom modeli obmennyyh processov // Izv. SPbGJeTU «LJeTI». 2025. T. 18, № 2. C. 82–89. doi: 10.32603/2071–8985–2025-18-2-82-89. (In Russ.).

---

Information about the author

**Aleksey Yu. Omelchenko** – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Robotics and Automation of Production Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.  
E-mail: alex1957.12@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26.10.2025; принята к публикации после рецензирования 04.12.2025; опубликована онлайн 29.01.2026.

Submitted 26.10.2025; accepted 04.12.2025; published online 29.01.2026.

---