

Градиент плотности энергии электрического поля частицы как причина возникновения силы Кулона

В. Д. Гончаров[✉], Н. А. Ермолаев, М. А. Гореликова, Р. В. Яшкардин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

[✉]vdgoncharov@rambler.ru

Аннотация. Приведены результаты исследований распределения плотности энергии электрического поля уединенной заряженной сферической частицы и системы из двух заряженных частиц сферической формы. На основе аналитического и численного расчета градиента пространственного распределения плотности энергии электрического поля вблизи поверхности сферической частицы определено распределение плотности сил, действующих на единицу ее поверхности. Суммарная сила, приложенная к заряженной сферической частице, определялась посредством интегрирования поверхностной плотности сил. Получены результаты численных расчетов сил, действующих в системе двух сферических частиц одинакового радиуса, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, которым сообщены одинаковые по модулю заряды разных знаков. Полученные результаты показали, что сила, рассчитанная с использованием градиента плотности энергии, равна силе Кулона.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, электрическое поле, сила Кулона, плотность энергии

Для цитирования: Градиент плотности энергии электрического поля частицы как причина возникновения силы Кулона / В. Д. Гончаров, Н. А. Ермолаев, М. А. Гореликова, Р. В. Яшкардин // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2025. Т. 18, № 1. С. 71–79. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-1-71-79.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Energy Density Gradient of the Electric Field of a Particle as a Cause of the Coulomb Force

V. D. Goncharov[✉], N. A. Ermolaev, M. A. Gorelikova, R. V. Yashkardin

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

[✉]vdgoncharov@rambler.ru

Abstract. This article presents the results of studying the density distribution of electric field of a solitary charged ball and a system of two charged spherical particles. The equal charges of different signs are transferred to particles. On the basis of analytical and numerical calculation of the gradient of spatial distribution of the electric field density near the surface of a spherical particle, the distribution of the density of forces acting per unit of its surface is determined. The total force applied to a charged spherical particle is determined by integrating the surface density of forces. The results of numerical calculations of forces acting in the system of two spherical particles of the same radius, located at a distance from each other, which have the same modulus charges of different sign, are presented. The results obtained indicate that the force calculated using the energy density gradient is equal to the Coulomb force.

Keywords: Maxwell's equations, electric field, Coulomb force, energy density

For citation: Energy Density Gradient of the Electric Field of a Particle as a Cause of the Coulomb Force / V. D. Goncharov, N. A. Ermolaev, M. A. Gorelikova, R. V. Yashkardin // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2025. Vol. 18, no. 1. P. 71–79. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-1-71-79.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Градиент плотности энергии электрического поля частицы как причина возникновения силы Кулона. Закон Кулона описывает взаимодействие зарядов, находящихся на значительном расстоянии друг от друга. Однако этот закон не объясняет, как может происходить такое взаимодействие, и в этом его главная проблема. Над ней размышлял еще Ньютон в отношении гравитационных сил, считая, что одно тело не может действовать на другое «без взаимного прикосновения». Естественным образом появляется среда «эфир», через которую происходит это взаимодействие [1]–[3]. Решению данной проблемы не помогает и третье уравнение Максвелла, которое утверждает, что вокруг любого заряда есть электрическое поле, напряженность которого выражается в силовом действии на заряды.

Основанное на третьем уравнении Максвелла определение электрического поля приведено, в частности, в [4]: «Электрическое поле (ЭП) – вид материи, которая окружает каждый электрический заряд, а также возникает при наличии изменяющегося во времени магнитного поля и оказывает силовое воздействие на все покоящиеся заряды, притягивая или отталкивая их».

Подобное определение можно уже рассматривать как первый шаг в осознании того, что такое электрическое поле, однако вопрос о том, как поле влияет на заряд, остается открытым.

Решение этого вопроса возможно в случае, если сила возникает не из-за влияния другого заряда (закон Кулона) или из-за действия поля на заряд (вышеприведенное определение), а из-за изменения в пространственном распределении энергии электрического поля самого тела, которое возникает при изменении внешних условий (появление покоящихся зарядов, изменение электромагнитных свойств в некоторых областях, переменного магнитного поля).

Покажем допустимость подобного подхода на простейших примерах. Для определения плотности энергии электрического поля ω будем использовать формулу [5]

$$\omega = \frac{\varepsilon E^2}{2}, \quad (1)$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; E – напряженность электрического поля.

Для определения силы \mathbf{f} , действующей со стороны поля на каждую точку поверхности, будем использовать формулу [4]

$$\mathbf{f} = -\text{grad } \omega. \quad (2)$$

Силовое действие электрического поля на уединенную заряженную сферическую частицу. В этом случае заряд равномерно распределен по поверхности сферы, и возникающую силу обычно рассчитывают как силу кулоновского отталкивания.

При проведении расчетов будем использовать сферическую систему координат – R, φ, θ (рис. 1).

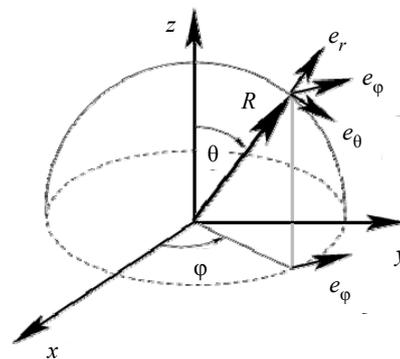


Рис. 1. Сферическая система координат
Fig. 1. Spherical coordinate system

Посмотрим, как изменяются в данном случае параметры электрического поля. Вокруг заряженной частицы присутствует электрическое поле, распределение напряженности которого можно найти по классической формуле [5] для точечного заряда q , расположенного в центре сферы (начале координат) (рис. 1):

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon R^3}. \quad (3)$$

Вокруг частицы образуется градиентное электрическое поле. Его напряженность имеет только одну компоненту, направленную по радиусу, и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

С учетом (3) выражение для плотности энергии (1) распределенного вокруг частицы электрического поля можно записать в виде

$$\omega = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon} \right)^2}{2R^4}. \quad (4)$$

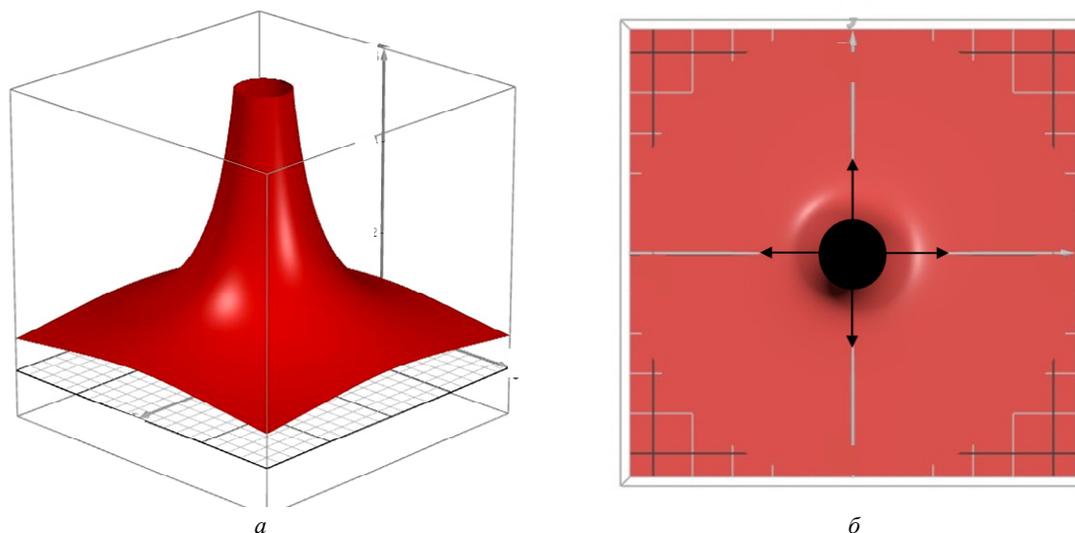


Рис. 2. Пространственные распределения нормированных значений потенциала (а) и плотности энергии (б)
 Fig. 2. Spatial distributions of normalized values of potential (a) and energy density (b)

Полное значение энергии заряженной сферы можно получить, вычислив тройной интеграл в сферической системе координат от плотности энергии электрического поля (4):

$$W_E = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{\infty} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon R^4} R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dR = \frac{q^2}{4\pi\epsilon R_0},$$

где $R^2 \sin \varphi$ – определитель якобиана для сферической системы координат (коэффициент масштабирования); R_0 – радиус частицы.

На рис. 2 приведены пространственные распределения нормированных значений потенциала (а) и плотности энергии (б) вокруг уединенной заряженной сферической частицы. Стрелками на данном рисунке указаны направления сил, приложенных к поверхности сферической частицы (б).

На каждую точку поверхности уединенной заряженной частицы действует сила, которую можно определить, исходя из градиента плотности энергии (2) собственного ЭП этой частицы, приведенного к площади поверхности (коэффициент $R_0/3$):

$$\mathbf{f}(R = R_0) = \frac{-R_0}{3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) = \frac{2}{3} \epsilon \left(\frac{q}{4\pi\epsilon} \right)^2 \mathbf{e}_R.$$

В сферической системе координат все силы, действующие на поверхности уединенной заряженной сферической частицы, равны и направлены перпендикулярно ее поверхности (рис. 2, б).

В результате сумма этих сил равна нулю. При малых размерах частицы силы, которые приложены к единице площади поверхности заряженной частицы, очень велики. При сохранении заряда частицы сила, действующая на единицу ее поверхности, пропорциональна $1/R_0^4$, т. е. очень быстро растет с уменьшением радиуса частицы. В частности, при заряде сферической частицы $q = 3.6 \cdot 10^{-6}$ Кл и ее радиусе $R_0 = 0.3$ мм плотность сил, приложенных к ее поверхности, составит 0.76 Н/м². Если заряженная частица представляет собой каплю проводящей жидкости, возможен вариант, когда эти силы превышают силу поверхностного натяжения. В результате капля распадается на капли меньшего размера (рэлеевская неустойчивость заряженной капли) [6].

Этот эффект, который обычно связывают с силами кулоновского отталкивания, хорошо известен и часто используется при электрораспылении [7].

Покажем, как, используя теорию Максвелла, можно получить силу, действующую на заряженную сферическую частицу, возникающую за счет изменения пространственного распределения плотности энергии ее электрического поля. В частном случае к изменению пространственного распределения плотности энергии электрического поля частицы приводит наличие другой заряженной частицы.

Будем рассматривать простейший случай – две сферические частицы одинакового радиуса R_0 , расположенные на расстоянии D друг от друга, которым сообщены одинаковые по модулю заряды разных знаков q . Эти частицы находятся в идеальной диэлектрической среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{отн}} = 1$.

Эту задачу можно решить с использованием традиционного подхода, в котором для определения изменений в распределении потенциала вблизи поверхности сферы необходимо разложить по сферическим функциям выражение для потенциала невозмущенного электрического поля. В результате распределение потенциала в окрестности сферы определяется рядом [5]

$$U = U_0 \left[1 - \frac{R_0}{R} \right] + U_1 \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] + \\ + U_2 \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^5 \right] + \dots,$$

где R_0 – радиус сферы; $U_n = R^n S_n$, S_n – сферическая функция n -го порядка.

Для получения результатов с использованием данного метода приходится использовать компьютерные расчеты. Гораздо более наглядно выглядит решение, полученное с помощью численного моделирования на математической модели, описывающей пространственное распределение параметров электрического поля.

Пространственное распределение потенциала U в однородном диэлектрике подчиняется уравнению Лапласа [5]:

$$\Delta U = 0.$$

Это уравнение необходимо дополнить соответствующими граничными условиями (значения напряжений на границах рассматриваемой области и на поверхности проводящих элементов).

Трехмерное численное моделирование решения уравнения Лапласа выполнялось с помощью программы ANSYS.

Адекватность результатов, полученных численным моделированием, доказана с помощью сравнения результатов аналитических и численных решений для уединенной заряженной сферы. В этом случае в численных экспериментах использовались граничные условия: на поверхности сферы $U_1 = 100$ В, на удаленных от области расчета поверхностях $U = 0$. Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\epsilon_{\text{отн}} = 1$.

На рис. 3 показана зависимость напряженности электрического поля от радиуса сферы, заряд которой $q = 3.3 \cdot 10^{-6}$ Кл. Значения напряженности электрического поля в разных точках поверхности сферы при численных решениях методом конечных элементов незначительно отличаются. Именно из-за этого на рисунке приведена кривая для средних значений напряженности электриче-

ского поля, которые получены на поверхности сферы, и определены допустимые отклонения. Среднее значение и отклонения от него вычислялись по значениям функции в 36 точках, взятых произвольно на поверхности частицы. Отличия в значениях напряженности при правильном разбиении области расчета не превышают 1–2 %, что практически не сказывается на результатах расчетов сил, возникающих при изменении пространственного распределения плотности энергии электрического поля самой частицы, вызванного наличием еще одной сферической заряженной частицей. Квадратиками на рис. 3 отмечены результаты, которые были получены аналитически. Максимальное отклонение полученных численным методом результатов от результатов аналитического решения не превышает 2 %.

На рис. 4 показана зависимость от радиуса частицы среднего значения плотности энергии электрического поля и отклонений от него, точками отмечены результаты, которые были получены аналитически. На рис. 5 приведена зависимость от радиуса частицы среднего значения и отклонений от него плотности сил, приложенных к поверхности сферической частицы.

Хорошее совпадение результатов численных и аналитических расчетов позволяет утверждать, что численная реализация математической модели решения уравнения Лапласа и определение на этой основе напряженности электрического поля и пространственного распределения сил, приложенных к поверхности, адекватно описывает реальные процессы и позволяет определить интересные для нас распределения в более сложных случаях.

При расчетах пространственного распределения потенциала двух заряженных сферических частиц использовались следующие граничные условия:

- на поверхности сфер $U_1 = 100$ В, $U_2 = -100$ В;
- на удаленных от области расчета поверхностях $U = 0$.

Предварительные эксперименты показали, что расположение границ не оказывает влияния на решение задачи в случае, если расстояние до них было равно трем расстояниям между частицами.

На рис. 6 стрелками показано распределение напряженности электрического поля для частиц радиусом 0.3 мм при расстоянии между ними $D = 2$ мм. Для данного случая плотность электрических сил, приложенных к поверхности левой сферы, приведена на рис. 7, а пространственное распределение плотности энергии электрического

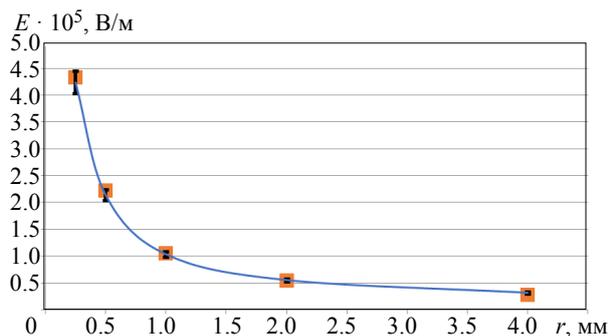


Рис. 3. Результаты аналитического и численного определения зависимости напряженности электрического поля от радиуса частицы. Заряд сферы $3.3 \cdot 10^{-6}$ Кл
 Fig. 3. The results of analytical and numerical calculation of the electric field strength dependence on the radius of a particle. Sphere charge is $3.3 \cdot 10^{-6}$ C

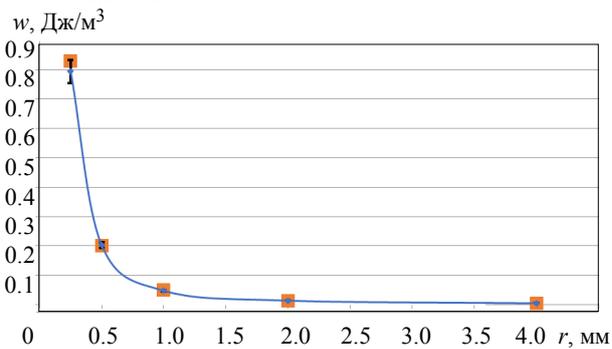


Рис. 4. Результаты аналитического и численного определения зависимости от радиуса сферической частицы плотности энергии электрического поля на ее поверхности. Заряд частицы $3.3 \cdot 10^{-6}$ Кл
 Fig. 4. Analytical and numerical calculations of the dependence of the electric field density of the sphere surface on its radius. Sphere charge is $3.3 \cdot 10^{-6}$ C

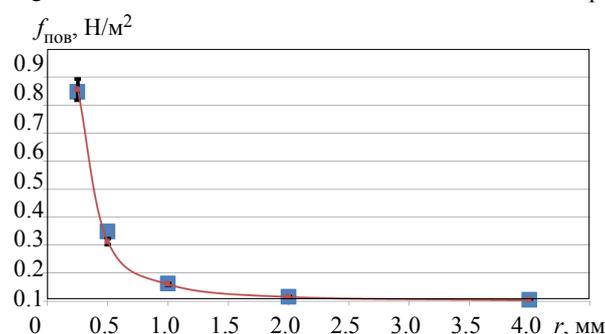


Рис. 5. Результаты аналитического и численного определения зависимости поверхностной плотности сил электрического поля $f_{\text{пов}}$ от радиуса сферической частицы. Заряд частицы $3.3 \cdot 10^{-6}$ Кл
 Fig. 5. Analytical and numerical calculations of the dependence of the surface density of electric field forces $f_{\text{пов}}$ on the radius of a spherical particle. Sphere charge is $3.3 \cdot 10^{-6}$ C

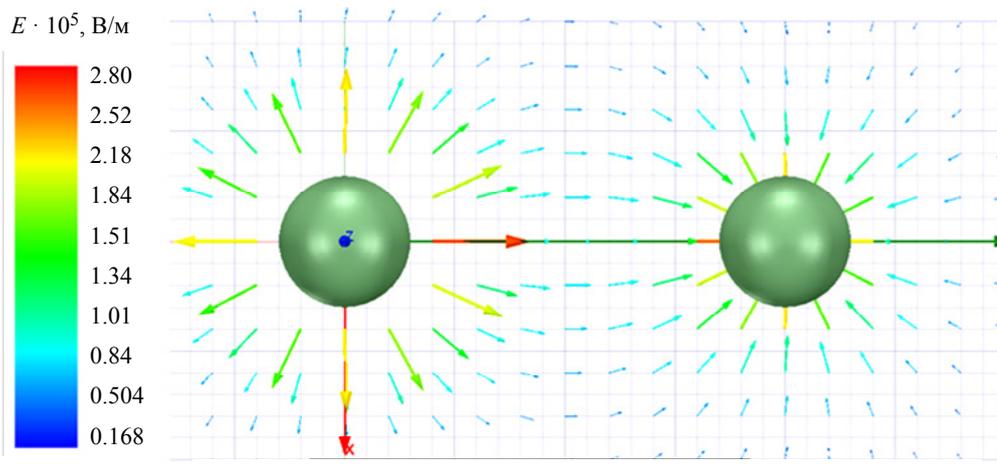


Рис. 6. Распределение напряженности электрического поля. $R_0 = 0.3$ мм; $D = 2$ мм

Fig. 6. Distribution of electric field strength. The radius of particles is 0.3 mm; the distance between them is 2 mm

поля – на рис. 8. Из рис. 8 очевидно, что плотность энергии и ее градиент выше в тех частях

заряженных сферических частиц, которые находятся напротив друг друга. В результате наличия

этого градиента плотность сил, приложенных к этим поверхностям, выше по сравнению с противоположащей поверхностью. Это видно также на рис. 7, где для наглядности приведена только левая сферическая частица. Стрелками показаны силы, приложенные к ее поверхности. На рис. 9 показан случай для частиц радиусом 0.3 мм при меньшем расстоянии между ними (1 мм). Эти результаты более наглядно демонстрируют отличия в распределении плотности энергии и ее градиента в разных областях поверхности частиц.

Суммарная сила, действующая на заряженную частицу, определялась интегрированием плотности сил по поверхности сферы. Проведенные расчеты показали, что сила, действующая в направлении оси OY , на два порядка больше, чем силы в перпендикулярных этой оси направлениях. Появление сил в перпендикулярных направлениях связано с особенностями построения сетки при численном решении методом конечных

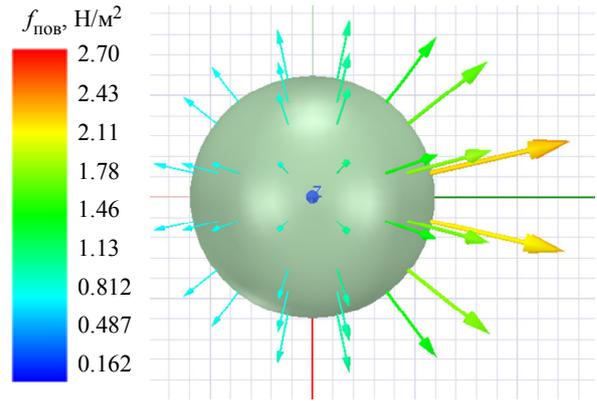


Рис. 7. Графическое представление значений и направлений сил, приложенных к единице поверхности левой сферической частицы
Fig. 7. Graphical representation of the values and directions of forces applied to the unit surface of the left spherical particle

разностей. На рис. 10 показаны зависимости от расстояния значений силы, действующей на ча-

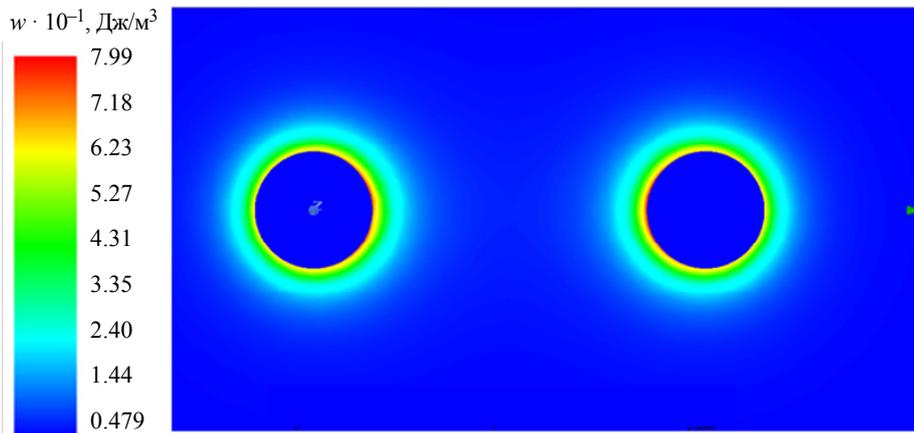


Рис. 8. Пространственное распределение плотности энергии электрического поля.
 $R_0 = 0.3$ мм; $D = 2$ мм

Fig. 8. Spatial distribution of the energy density of the electric field.
 $R_0 = 0.3$ мм; $D = 2$ мм

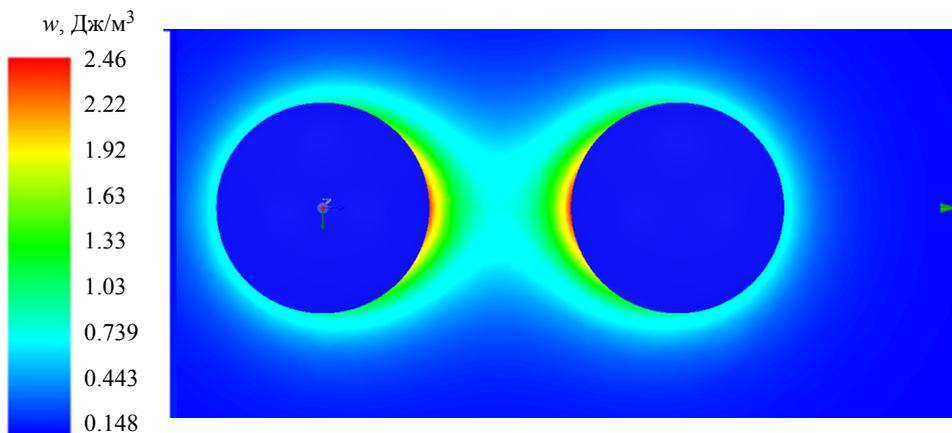


Рис. 9. Пространственное распределение плотности энергии электрического поля.
 $R_0 = 0.3$ мм; $D = 1$ мм

Fig. 9. Spatial distribution of the energy density of the electric field.
 $R_0 = 0.3$ мм; $D = 1$ мм

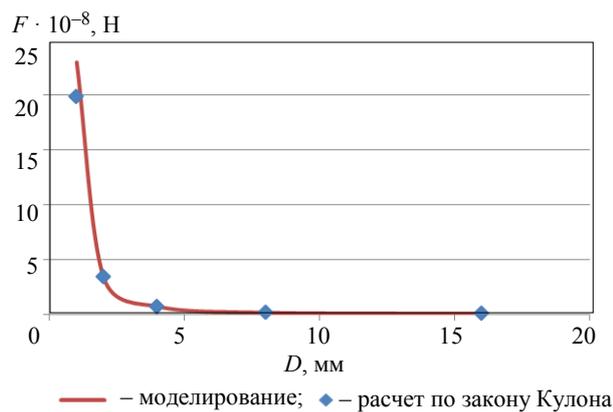


Рис. 10. Результаты аналитического и численного определения зависимости сил притяжения F от расстояния между центрами сферических частиц. Напряжения на их поверхностях: $U_1 = 100$ В, $U_2 = -100$ В

Fig. 10. Analytical and numerical determination of the dependence of attraction forces F on the distance between the centers of spherical particles. Voltages on the surfaces: $U_1 = 100$ V, $U_2 = -100$ V

стицу радиусом 0.3 мм при напряжении на поверхности сфер $U_1 = 100$ В, $U_2 = -100$ В. Кривая построена по результатам численных расчетов. Точки на рис. 10 показывают значения, полученные по формуле Кулона. Отличия в результатах связаны с тем, что в задаче определяется сила, приложенная к объемной фигуре (сфере), а закон Кулона описывает силу взаимодействия между двумя точечными частицами. К тому же результаты расчетов зависят от размеров элементов, на которые разбивается область расчета при численном моделировании. Особенно это влияние сказывается вблизи поверхности частиц, поскольку значение плотности сил обратно пропорционально четвертой степени расстояния. При увеличении расстояния между сферическими частицами отличия в значениях силы, рассчитанной с помощью численного моделирования и по закону Ку-

лона, уменьшаются. При расстоянии между сферическими частицами $D > 5$ мм значения, полученные с помощью численного моделирования и с использованием закона Кулона, отличаются менее, чем на 1 %.

В ходе работы были проведены численные расчеты для частиц с разными радиусами с разными и одинаковыми знаками заряда. Во всех проведенных экспериментах значения сил, действующих на частицу, рассчитанных с использованием градиента плотности энергии и по закону Кулона, отличались на 3 % и меньше.

Заключение. Показано, что силы электрического взаимодействия возникают вследствие изменения пространственного распределения напряженности электрического поля в непосредственной близости от поверхности частицы и для их определения необходимо проинтегрировать по поверхности частицы градиент плотности энергии электрического поля, окружающего данную частицу.

Выводы. Силу, действующую на каждую единицу поверхности заряженной сферической частицы, можно найти, используя выражение для градиента плотности энергии ЭП, окружающего данную частицу.

1. Сила, действующая на каждую единицу поверхности сферической уединенной заряженной частицы, при сохранении ее заряда обратно пропорциональна радиусу этой частицы в 4-й степени.

2. Результирующая всех сил, действующих на поверхность уединенной заряженной частицы, равна нулю.

3. Рассчитанная с использованием градиента плотности энергии сила, действующая в системе двух заряженных сферических частиц, равна силе Кулона.

Список литературы

1. Ацюковский В. А. Популярная эфиродинамика, или Как устроен мир, в котором мы живем. М.: Знание, 2006. 288 с.
2. Николаев Г. В. Электродинамика физического вакуума. Новые концепции физического мира. Томск: изд-во НТЛ, 2004. 700 с.
3. Волосатов В. И. Физика эфира. Ч. 1: Некоторые закономерности эволюции материи. М.: Белые Альвы, 2007. 224 с.
4. Purcell E. M., Morin D. J. Electricity and magnetism. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2013. 853 p.
5. Шимони К. Теоретическая электротехника / пер. с нем.; под. ред. проф. К. М. Поливанова. М.: Мир, 1964. 773 с.
6. Li K.-Y., Tu H., Asit K. Charge limits on droplets during evaporation // Langmuir. 2005. Vol. 21, iss. 9. P. 3786–3794.
7. О зарядовой неустойчивости и метастабильном состоянии равновесия заряженной проводящей капли при электрораспылении жидкости / Ю. В. Самухина, Д. Д. Матюшин, П. А. Поляков, А. К. Буряк // Коллоидный журн. 2021. Т. 83, № 4. С. 449–455.

Информация об авторах

Гончаров Вадим Дмитриевич – д-р техн. наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vdgoncharov@rambler.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6627-4723>

Ермолаев Николай Андреевич – студент гр. 1503 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: nikolay.ermolaev03@gmail.com

Гореликова Мария Андреевна – аспирант гр. 2941, ассистент кафедры теоретических основ электротехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: gorelikovam27@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8640-4609>

Яшкардин Ростислав Владимирович – канд. техн. наук, доцент кафедры теоретических основ электротехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: yashkardin.rv@ya.ru

Вклад авторов:

Гончаров В. Д. – теоретическое обоснование статьи и аналитические расчеты.

Ермолаев Н. А. – численные расчеты.

Гореликова М. А. – оформление текста и иллюстративного материала.

Яшкардин Р. В. – анализ литературы по теме статьи.

References

1. Acjukovskij V. A. Populjarnaja jefirodinamika, ili Kak ustroen mir, v kotorom my zhivjom. M.: Znanie, 2006. 288 с. (In Russ.).

2. Nikolaev G. V. Jelektrodinamika fizicheskogo vakuuma. Novye koncepcii fizicheskogo mira. Tomsk: izd-vo NTL, 2004. 700 s. (In Russ.).

3. Volosatov V. I. Fizika jefira. Ch. 1: Nekotorye zakonomernosti jevoljucii materii. M.: Belye Al'vy, 2007. 224 s. (In Russ.).

4. Purcell E. M., Morin D. J. Electricity and magnetism. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2013. 853 p.

5. Shimoni K. Teoreticheskaja jelektrotehnika / per. s nem.; pod red. prof. K. M. Polivanova. M.: Mir, 1964. 773 s. (In Russ.).

6. Li K.-Y., Tu H., Asit K. Charge limits on droplets during evaporation // Langmuir. 2005. Vol. 21, iss. 9. P. 3786–3794.

7. O zarjadovoj neustojchivosti i metastabil'nom sostojanii ravnovesija zarjazhennoj provodjashhej kapli pri jelektroaspjlenii zhidkosti / Ju. V. Samuhina, D. D. Matjushin, P. A. Poljakov, A. K. Burjak // Kolloidnyj zhurn. 2021. T. 83, № 4. S. 449–455. (In Russ.).

Information about the authors

Vadim D. Goncharov – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: vdgoncharov@rambler.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6627-4723>

Nikolay A. Ermolaev – student gr. 1503, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: nikolay.ermolaev03@gmail.com

Maria A. Gorelikova – graduate student gr. 2941, Assistant of the Department of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: gorelikovam27@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8640-4609>

Rostislav V. Yashkardin – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: yashkardin.rv@ya.ru

Author contribution statement:

Goncharov V. D. – theoretical substantiation of the article and analytical calculations.

Ermolaev N. A. – numerical calculations.

Gorelikova M. A. – preparation of text and illustrative material.

Yashkardin R. V. – analysis of the literature on the topic of the article.

Статья поступила в редакцию 12.06.2024; принята к публикации после рецензирования 19.11.2024; опубликована онлайн 27.01.2025.

Submitted 12.06.2024; accepted 19.11.2024; published online 27.01.2025.
