



УДК 62-581

*В. А. Новиков, А. С. Ануфриев, Р. М. Нуриахметов*

## **ДИНАМИКА МНОГОДВИГАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРИВОДНЫХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ ПОДСИСТЕМАМИ**

*Анализируется динамика многомассовых механических подсистем, находящихся в составе многодвигательных электроприводных систем машин и комплексов. Определены условия для реализации высоких динамических возможностей систем, отвечающих задачам повышения показателей эффективности технологического оборудования.*

**Высокодинамичные электроприводные системы, многомассовые механические подсистемы, эффективность технологического оборудования**

Развитие электроприводной техники идет по пути применения многополюсных линейных и вращательных двигателей, объединения электродвигателей с исполнительными органами рабочей машины, многоосевых систем управления движением для различных технологий, максимального упрощения кинематических передач, создания высокодинамичных электроприводных систем (ЭПС). Общим здесь является тенденция к усилению влияния высокодинамичных электроприводных систем на технологию путем расширения полос пропускания систем регулирования скорости и положения исполнительных органов. Потенциальные динамические возможности современных частотно-регулируемых электроприводов очень высоки. Эффективность рабочих машин и технологических комплексов закладывается на предпроектных и проектных стадиях их создания, а проявляется на эксплуатационной стадии. В связи с этим необходимы обстоятельные исследования динамики многодвигательных ЭПС, чтобы реализовать их высокие динамические возможности при достижении заданных показателей эффективности технологии.

Большинство электротехнических фирм-производителей электроприводной техники приводят данные о полосах пропускания контуров регулирования скорости сервоприводов. Несколько лет тому назад назывались двухзначные числа – 40, 50 Гц, затем – трехзначные – 200, 400 Гц, а в 2012 г. появились уже и четырехзначные – 2000 Гц [1]. Реализации столь высоких частот препятствует динамика механических и технологических частей рабочих машин, проявляющаяся в виде полигармонических колебаний в широком низкочастотном спектре частот, характерном для упругих многомассовых механических подсистем (ММП).

Целью настоящей статьи является исследование динамики ММП, находящихся в составе электроприводных систем машин и комплексов, и определение условий для реализации высоких динамических возможностей систем, отвечающих задачам повышения показателей эффективности технологий.

При исследовании ММП возникают следующие задачи: 1) определения структуры механической модели ММП, обеспечивающей при  $m$  входных и  $r$  выходных переменных оптимальное решение задачи управления ЭПС и соответственно технологией; 2) анализа и синтеза ММП, в соответствии с которыми на стадии проектирования находятся такие сочетания инерционно-жесткостных и демпфирующих параметров, которые обеспечивают динамическую декомпозицию и малую интенсивность колебаний механизмов в заданных полосах частот сепаратных подсистем управления. Рассматривая наиболее общий вариант ММП, при котором отдельные элементы системы имеют несколько степеней свободы, можно получить из уравнений Лагранжа систему линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, характеризующих свободные колебания ММП

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}$  –  $k$ -вектор обобщенных координат;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  – квадратные ( $k \times k$ )-матрицы коэффициентов инерции и коэффициентов жесткостей ( $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ ,  $c_{ij} = c_{ji}$ ) соответственно по полученным таким образом дифференциальным уравнениям целесообразно составить структуру механической модели, которую в дальнейшем удобно использовать для анализа и синтеза ММП.

Подставляя частные решения в уравнение (1), получим

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})\bar{\mathbf{q}}_0 = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{\mathbf{q}}_0$  –  $k$ -вектор относительных амплитуд свободных колебаний  $\lambda = \omega_y^2$ ;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Вектор  $\bar{\mathbf{q}}_0$  можем определить как собственный вектор матрицы  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ , а  $\lambda$  – как ее собственные значения. Здесь и в дальнейшем чертой сверху обозначены относительные значения величин.

Для многих вариантов механизмов уравнение (2) может быть записано в более простом виде

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{I})\bar{\mathbf{q}}_0 = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ .

Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  матрицы  $\mathbf{G}$  определяют собственные частоты колебаний механической подсистемы  $\omega_{y1} = \sqrt{\lambda_1}$ ,  $\omega_{y2} = \sqrt{\lambda_2}$ , ...,  $\omega_{yk} = \sqrt{\lambda_k}$ . Решение уравнения (3) для каждого из найденных  $\lambda_r$  дает собственные векторы матрицы  $\mathbf{G}$ , на основании которых определяются относительные амплитуды колебаний. Если совместно с собственными векторами рассматривать для каждой  $\omega_{yr}$  и распределение относительных значений потенциальной энергии, запасаемой в упругих звеньях  $\bar{\Pi}_{ij}(r) = c_{ij}(\bar{q}_{0ir} - \bar{q}_{0jr})^2$ , где

$\bar{\Pi}_{ij}(r)$  – относительное значение потенциальной энергии, запасаемой в упругом звене  $c_{ij}$  при  $\lambda = \lambda_r$ ;  $\bar{q}_{0ir}, \bar{q}_{0jr}$  – относительные амплитуды колебаний  $i$ -го и  $j$ -го инерционных звеньев, то можно установить принадлежность частот и амплитуд колебаний элементам ММП. Это важно знать в задачах синтеза заданных частот колебаний при варьировании инерционно-жесткостных параметров.

В соответствии с задачами и общим алгоритмом синтеза электромеханических подсистем можно отдельно сформулировать и задачи синтеза электромагнитных и механических подсистем.

*Задача синтеза электромагнитной подсистемы* формулируется из условия получения минимумов динамических ошибок при воспроизведении управляющих воздействий. Синтез электромагнитных подсистем из этого условия сводится к синтезу системы векторного управления частотно-регулируемым асинхронным или синхронным электродвигателем с заданной полосой пропускания управляющих воздействий. В конечном счете, это чаще всего сводится к определению нужного значения частоты модуляции инвертора напряжения.

*Задача синтеза ММП* формулируется по результатам синтеза электромагнитной подсистемы управления из условия получения заданных полос пропускания контуров регулирования механических переменных и соответственно заданных частот упругих колебаний ММП. Необходимо так выбрать параметры ММП, чтобы спектр матрицы  $\mathbf{G}$  находился в заданном соотношении с полосой пропускания системы управления, а относительные амплитуды колебаний принимали заданные значения. При этом достаточно ограничиться нижней частью спектра и рассматривать два-три минимальных значения  $\lambda_r$ , наиболее влияющих на динамику системы управления. Полагая, что кроме колебательных движений элементов ММП, она может совершать движение как единое целое и, следовательно,  $\lambda_1 = 0$ , минимальным значением, характеризующим колебательные движения ММП, будет  $\lambda_2$ . Тогда задача синтеза ММП будет сводиться к синтезу значений инерционно-жесткостных параметров, при которых

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\geq \lambda_{2\text{зад}}; \lambda_3 \geq a_1 \lambda_2; \lambda_4 \geq a_2 \lambda_3; \\ \mu'_{ij} &\leq \mu_{ij} \leq \mu''_{ij}; c'_{ij} \leq c_{ij} \leq c'', \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_1, a_2$  – коэффициенты соотношения собственных значений матрицы  $\mathbf{G}$ ;  $\lambda_{2\text{зад}}$  – заданное собственное значение, устанавливаемое по минимально допустимой для системы управления частоте упругих колебаний  $\omega_{y2\text{зад}} = \sqrt{\lambda_{2\text{зад}}}$ ;  $\mu'_{ij}, \mu''_{ij}, c'_{ij}, c''_{ij}$  – заданные пределы изменения коэффициентов.

Значения коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  могут быть выбраны исходя из двух следующих условий. Первое условие: необходимость исключения биений в ММП, возникающих при близких значениях минимальных частот свободных колебаний. Спектр матрицы  $\mathbf{G}$  для этого случая рассматривается как не соприкасающийся с полосой пропускания системы управления. Второе условие: необходимость обеспечения при соприкасающихся спектрах

по  $\lambda_2$  соотношений  $\lambda_3 \gg \lambda_2$ ;  $\lambda_4 \gg \lambda_2$ ;  $\lambda_4 = a\lambda_3$ , при которых возможна компенсация упругих колебаний на частоте  $\omega_{y2}$  средствами управления. Задача синтеза ММП по условию (4) может быть расширена так, что кроме синтеза заданных значений  $\lambda_r$  выполняется синтез и значений относительных амплитуд свободных колебаний. В частности, возможно выполнение условия

$$\bar{q}_{0jr} \rightarrow 0, \quad (5)$$

где  $\bar{q}_{0jr}$  – относительная амплитуда свободных колебаний  $j$ -го элемента ММП на  $r$ -й частоте, которая приводит к частичному сокращению нулей и полюсов передаточных функций и улучшает динамические свойства ММП.

Распространенной в теории машиностроения задачей синтеза механизмов является задача разделения резонансных частот механизма от частот действующих на него возмущений. Для этой цели на основе варьирования коэффициентов матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{C}$  уравнения (2) или (3) выполняют синтез механизма преимущественно поисковыми методами в различных их модификациях с привлечением методов планирования эксперимента и дисперсионного анализа собственных частот колебаний по всем варьируемым коэффициентам. При этом приходится проводить большой объем исследований, для того чтобы получить достоверную информацию о синтезируемых параметрах из дисперсионного анализа. Если кроме собственных частот колебаний рассматривать также и относительные амплитуды колебаний, то решение задачи синтеза значительно усложняется.

В постановке задачи, рассмотренной выше, возможно использования метода синтеза ММП, который основан на переходе от дифференциальных уравнений (1) в обобщенных координатах к дифференциальным уравнениям в главных координатах [3]

$$\mathbf{M}^* \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}^* \dot{\boldsymbol{\eta}} = 0, \quad (6)$$

где  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_k]^T$  – вектор главных координат  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q}$ , причем  $\mathbf{Q} = [\bar{q}_{0jr}]$  – матрица относительных амплитуд колебаний;  $\mathbf{M}^*$ ,  $\mathbf{C}^*$  – диагональные  $(k \times k)$ -матрицы приведенных коэффициентов инерции и жесткости.

Такой подход, по существу, является декомпозицией на уровне математической модели ММП, так как каждая главная координата совершает только моногармоническое колебательное движение, описываемое уравнением

$$\eta_j = \eta_{j0} \sin(\omega_{yj}t + \Theta),$$

где  $\eta_{j0}$  – амплитуда колебаний  $j$ -й главной координаты.

Поскольку матрицы  $\mathbf{M}^*$  и  $\mathbf{C}^*$  – диагональные, то собственные значения матрицы находятся по формуле

$$\lambda_r = c_{ii}^* / \mu_{ii}^*, \quad r = i.$$

Элементы диагональных матриц  $M^*$  и  $C^*$  определяются из уравнений

$$\mu_{ii}^* = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jl}; \quad (7)$$

$$c_{ii}^* = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{c}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jl}. \quad (8)$$

Кроме того, параметры ММП связаны условием ортогональности главных координат, которые записываются в виде

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jl} = 0; \quad l, f = \overline{1, k}; \quad l \neq f; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{c}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jl} = 0; \quad l, f = \overline{1, k}; \quad l \neq f. \quad (10)$$

На основании уравнений (7)–(10) выполняется математическое описание ММП для решения задачи синтеза по условиям (4) и (5). Это удобно сделать в форме нормированных уравнений, приняв за базовые значения коэффициентов значения  $\mu_{\sigma}$  и  $c_{\sigma}$ . Перейдя к относительным коэффициентам и выполнив преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jl} - \bar{\mu}_{ii}^* &= 0; \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jl} - \bar{c}_{ii}^* &= 0; \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{\mu}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jf} &= 0; \quad l, f = \overline{1, k}; \quad l \neq f; \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{c}_{ii} \bar{q}_{0il} \bar{q}_{0jf} &= 0; \quad l, f = \overline{1, k}; \quad l \neq f; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mu}_{ii}^*/c_{\sigma}) \lambda_i - \bar{c}_{ii}^* &= 0; \\ \bar{\mu}'_{ij} \leq \bar{\mu}_{ij} \leq \bar{\mu}''_{ij}; \\ \bar{c}'_{ij} \leq \bar{c}_{ij} \leq \bar{c}''_{ij}; \\ \lambda_2 &\geq \lambda_{2\text{зад}}; \\ \lambda_r &\geq a_{r-2} \lambda_{r-1}; \quad r = 3, 4; \\ \bar{q}_{0jr} &\leq \varepsilon_{kj}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varepsilon_{kj}$  – малая отличная от нуля величина, определяющая границу в значении  $\bar{q}_{0jr}$  при его устремлении к нулю и обуславливающая значимость системы уравнений по  $\bar{q}_{0jr}$ .

Решение системы нелинейных уравнений (11), удовлетворяющих неравенствам (12), возможно методами нелинейного программирования с ограничениями, ориентированными на применение ПК [2], [3]. Начальный вектор варьируемых параметров  $\mathbf{b}_{\text{нач}}$  определяется по данным ММП, соответствующим исходной конструкции механизма. Алгоритм синтеза основан на итерационной процедуре максимизации значения  $\lambda_2$  в рамках условия (4). На каждом шаге итерации осуществляется минимизация целевой функции. При этом могут возникнуть ситуации, при которых условие (4) не удовлетворяется из-за малых границ варьируемых параметров. Тогда в условии (4) принимается  $\lambda_2 = \lambda_{2\text{max}}$ , остальное сохраняется. Синтез ММП из условия  $\lambda_2 = \lambda_{2\text{max}}$  может быть также выполнен с расширением границ варьируемых параметров. При этом алгоритм синтеза ММП основывается на итерационных процедурах максимизации  $\lambda_2$  вплоть до значения  $\lambda_{2\text{зад}}$  с оценкой чувствительности  $\partial\lambda_2(k)/\partial b_g(k)$  и на последовательном расширении границ параметров, по которым оценки чувствительности максимальны.

При использовании этого метода предельно ясно определяются все взаимосвязи переменных и сохраняется физическая интерпретация промежуточных и конечных результатов синтеза. Трудности применения метода возникают при большой размерности ММП из-за роста числа нелинейных уравнений. Обойти их можно путем упрощения сложной ММП. Для этого можно воспользоваться известными методиками эквивалентирования систем или, используя описание ММП в главных координатах (как и в задаче синтеза), упростить его путем решения системы нелинейных уравнений меньшей размерности с сохранением нижнего спектра частот свободных колебаний.

При положительных решениях задачи синтеза механической подсистемы описанными методами следует отметить относительную сложность математических преобразований уравнений при переходе от обобщенных координат к главным координатам и обратно. При небольшой сложности матричного уравнения (3) альтернативой является метод, основанный на переборе параметров уравнения для приближенного определения желаемых собственных значений и соответствующих им инерционно-жесткостных параметров ММП [4].

Если все же не удастся достигнуть согласования полос пропускания и частот механических резонансов, возможно применение в системах управления скоростью фильтров подавления механических резонансов (ФПМР) и фильтров нижних частот (ФНЧ), ограничивающих амплитуды механических колебаний до значений, допустимых по условию выполнения технологии. Действие подобных устройств, рассчитанных на независимое подавление двух механических резонансов, показано на рис. 1, где ДС, РС, ПР, БУМ – соответственно: датчик и регулятор скорости, переключатель режимов, блок управления моментом [5]. Реализация системы выполняется средствами программируемого контроллера привода. Режим «0» соответствует установочным значениям параметров при отсутствии резонансов, режим «1» – при их наличии. Выполняется вначале ручная, а далее автоматическая настройка на два значения резонансных частот в диапазоне от 0,1 до 100 Гц. Если частоты резонансов изменяются, то соответственно изменяются и частоты фильтров ФПМР1 и ФПМР2, т. е. реализуется адаптивное подавление резонансов.

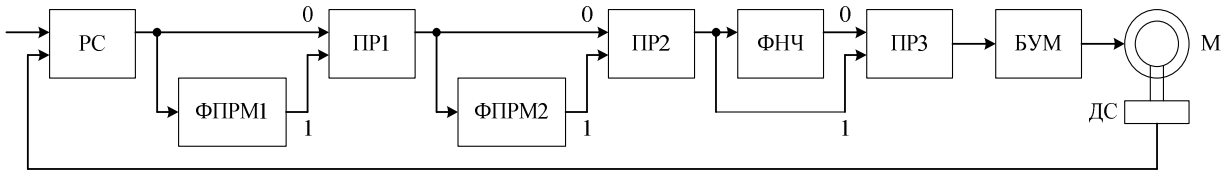


Рис. 1

Идея применения подобных устройств не нова и уже на протяжении многих лет освещается в литературе. Ключевой момент здесь – способ адаптивной настройки фильтров при изменении частоты и амплитуды механических резонансов. Одним из способов такой настройки является фазовая автоподстройка фильтра [6]–[8]. Ранее такие системы реализовывались аналоговыми средствами, в настоящее время – цифровыми, программными средствами. Поясним суть автоподстройки в подобных системах на простом примере. Части механического объекта с упругими связями в первом приближении могут представляться в ограниченной полосе частот двухмассовыми упругими объектами и описываться уравнением колебательного звена с передаточной функцией  $W_y(p) = \frac{2\xi_y T_y p + 1}{T_y^2 p^2 + 2\xi_y T_y p + 1}$ , где

$T_y = 1/\omega_y$  – постоянная времени упругих колебаний;  $\xi_y$  – коэффициент демпфирования. Фильтр подавления вибраций, содержащий полосовые фильтры и модуль компенсации упругой связи с передаточной функцией  $W_k(p) = \frac{\tau_k^2 p^2 + 2\xi_k \tau_k p + 1}{(\tau_k p + 1)^2}$ , настраивается из

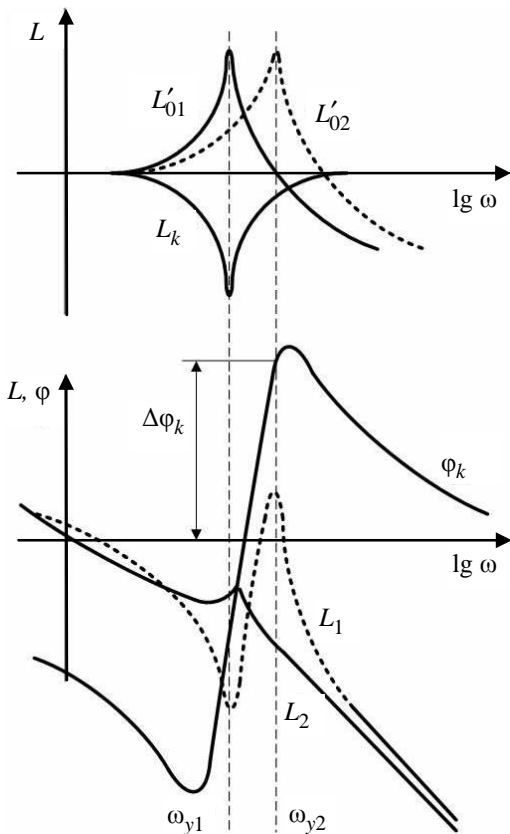


Рис. 2

условия  $\tau_k = T_y$ . Коэффициенты демпфирования  $\xi_y$  и  $\xi_k$  в общем случае могут не совпадать. Значение  $\xi_k$  устанавливается близким  $\xi_y$  из условия нормальной работы компенсационного звена и требуемого качества системы. Производная фазового сдвига сигналов на входе и выходе звена  $\partial\Delta\varphi/\partial\omega$  имеет экстремум на частоте  $\omega_y$ . Фазовый сдвиг  $\Delta\varphi$  при изменении  $\omega_y$  имеет знакопеременную зависимость, что позволяет выполнить автоматическую настройку звена компенсации на частоту  $\omega_y$ .

В функционирующей системе спектров выходного и входного сигналов звена компенсации упругости полосовыми фильтрами выделяются составляющие сигналов на частоте  $\omega_y$  и подаются на два входа фазового дискриминатора. На выходе ФД формируется сигнал, пропорциональный  $\Delta\varphi$  на частоте  $\omega_y$ . Путем воздействия

через регулятор контура самонастройки на управляемые параметры звена компенсации производится автоматическая настройка системы, при которой  $\Delta\varphi = 0$  и соблюдается условие  $\tau_k = T_y$ . Изложенное поясняется амплитудно-частотными (АЧХ) и фазо-частотными (ФЧХ) характеристиками системы (рис. 2). Приняты следующие обозначения:  $L'_{01}$ ,  $L'_{02}$  – АЧХ части объекта в кинематической цепи двигатель–механизм, отражающие упругие свойства при двух значениях частот  $\omega_{y1}$  и  $\omega_{y2}$ ;  $L_k$  – АЧХ модуля компенсации упругой связи при частоте  $\omega_{y1}$ ;  $L_1$ ,  $L_2$  – АЧХ разомкнутого контура регулирования скорости при частотах  $\omega_{y1}$  и  $\omega_{y2}$ ;  $\varphi_k$  – ФЧХ компенсационного модуля;  $\Delta\varphi_k$  – сдвиг по фазе в компенсационном модуле на частоте  $\omega_{y2}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приводная техника Omron. Каталог / Omron, 2012. 236 с.
2. Современная прикладная теория управления: Новые классы регуляторов технических систем / А. А. Колесников, Л. Н. Рассудов, В. Б. Яковлев, В. А. Новиков и др.; под ред. А. А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч. 3. 656 с.
3. Новиков В. А., Путьков В. Ф. Синтез электромеханических систем с заданными динамическими характеристиками упругих механических подсистем // Изв. вузов. Сер. Электромеханика. 1985. № 9. С. 19–25.
4. Balas E., Niehaus W. Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // J. Heuristics. 1998. Vol. 4, № 4. P 107–122.
5. Сервоусилители и серводвигатели MR-J3B. Руководство по эксплуатации. Mitsubishi Electric 2007. 276 с.
6. А. с. № 717717 / В. А. Новиков, Г. Ф. Михальченко, Л. М. Осипов. Система управления с упругой механической связью; 1980. Бюл. № 7.
7. А. с. № 991365 / В. А. Новиков, А. Н. Капустин, И. П. Игнатьев. Устройство коррекции для компенсации упругого резонанса в электромеханических системах; 1983. Бюл. № 3.
8. А. с. № 1188697 / В. А. Новиков, Л. М. Осипов, А. Б. Заходов. Адаптивная система управления с нестационарным упругим механическим объектом; 1984. Бюл. № 40.

*V. A. Novikov, A. S. Anufriev, R. M. Nuriakhmetov*

#### *DYNAMIC OF MULTI-MOTOR ELECTRIC DRIVE SYSTEMS WITH ELASTIC MECHANICAL SUBSYSTEMS*

*The analysis of dynamics of multi-mass mechanical subsystems, which are included in multi-motor electric drive systems of machines and complexes, is given. The conditions for the realization of highly dynamic capabilities of systems that meet the challenges of increasing efficiency indexes of technological facilities are determined.*

**Highly dynamic electric drive systems, multi-mass mechanical subsystems, efficiency of technological facilities**