



УДК 520.628

Д. А. Бабичев, В. А. Тупик, А. В. Селуянова

РАСЧЕТ АНТЕНН НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПЛЕНОК

Рассматривается расчет антенн на основе нового подхода для вычисления дифференциальных уравнений поля во фрактальных средах. Эти уравнения описывают распределение электрических и магнитных полей в любых фрактальных средах. Концептуальное описание электромагнитной теории в фрактальной среде имеет большое значение для изучения распространения волн в таких средах.

Фрактальная антенна, метаматериал, электродинамические уравнения

Антенны на основе фрактальных пленок часто называют антеннами на основе метаматериалов. Первая антенна была исследована экспериментально в 2005 г. Использование в излучателе антенны метаматериала привело к увеличению коэффициента направленного действия по сравнению с антенной, в которой в качестве излучателя использовался стандартный металлический микрополосок. Этот эффект основан на изменении особенностей распространения электромагнитных волн в таких средах. Примеры дизайна антенн на основе метаматериалов приведены в [1]–[3].

Для получения уравнений электродинамики во фрактальных средах рассмотрим понятия дробного интегрирования и дифференцирования.

Для n -кратного интеграла известна [4] формула

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt.$$

Заметим, что при $(n-1)! = \Gamma(n)$, где $(n-1)! = \Gamma(n)$ – гамма-функция. Гамма-функцией называется интеграл Эйлера второго рода следующего вида:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Интегрирование возможно при нецелых значениях n . Таким образом, операции дробного интегрирования можно записать в виде

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a;$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b,$$

где $\alpha > 0$. Приведенные интегралы называются интегралами дробного порядка α . Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним. Операторы $I_{a+}^{\alpha}, I_{b-}^{\alpha}$ называют операторами дробного интегрирования.

Аналогично, операторы дробной производной можно записать следующим образом:

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x > a;$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x < b,$$

$$n = [\alpha] + 1,$$

где $[\alpha]$ – целая часть; $\{\alpha\}$ – дробная часть α . Тогда $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$.

Достаточное условие существования дробных производных состоит в следующем:

$$\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\langle\alpha\rangle}} \in AC^{[\alpha]},$$

где $AC^{[\alpha]}([a, b])$ – непрерывная функция.

Для описания электромагнитных явлений в пространстве с дробной размерностью в статье [5] приведена запись (таблица) для основных уравнений Максвелла с учетом вышеуказанных особенностей.

№	Для целочисленной размерности	Для дробной размерности
1	$\text{curl}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{curl}(c_1(\gamma, r)\vec{E}) = -c_2(d, r)\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\text{div}(c_2(d, r)\vec{B}) = 0$
3	$\text{curl}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{curl}(c_1(\gamma, r)\vec{H}) = c_2(d, r)\vec{j} + c_2(d, r)\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
4	$\text{div}(\vec{D}) = \rho$	$\text{div}(c_2(d, r)\vec{D}) = c_3(D, r)\rho$

Примечание. \vec{E} – вектор напряжённости электрического поля; \vec{B} – вектор индукции магнитного поля; $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ – вектор электрического смещения; $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ – напряжённость магнитного поля; \vec{M} – намагниченность вещества; \vec{P} – поляризованность; \vec{j} – вектор плотности тока; ρ – объёмная плотность заряда.

Первое из уравнений связывает значение \vec{E} с изменениями вектора \vec{B} во времени и является по существу выражением закона электромагнитной индукции. Оно показывает, что источником вихревого поля вектора \vec{E} является меняющееся со временем вихревое

магнитное поле. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т. е. магнитных зарядов, как в вакууме, так и в намагниченном веществе.

Третье уравнение устанавливает связь между токами проводимости и токами смещения и порождаемым ими магнитным полем. Четвертое показывает, что источниками вектора \vec{D} служат сторонние заряды.

Вышеперечисленные уравнения представляют собой дифференциальную форму уравнений Максвелла. В первую пару уравнений входят только основные характеристики поля \vec{E} и \vec{B} , во второй паре фигурируют только вспомогательные величины \vec{D} и \vec{H} .

По определению Рисса [1], для пространства дробной размерности можно записать следующие уравнения:

$$dV_D - \text{элемент } D\text{-размерного пространства } dV_D = c_3(D, r)dV_3;$$

$$dS_d - \text{элемент } d\text{-размерного пространства } dS_d = c_2(d, r)dS_2;$$

$$dL_\gamma - \text{элемент } \gamma\text{-размерного пространства } dL_\gamma = c_1(\gamma, r)dL_1;$$

r – радиус-вектор в сферической системе координат.

Тогда

$$c_3(D, r) = \frac{|xyz|^{D/3-1}}{\Gamma^3(D/3)},$$

где $c_3(3, r) = 1$ для $D = 3$;

$$c_2(d, r) = \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)} |r|^{2-d},$$

где $c_2(2, r) = 1$ для $d = 2$;

$$c_1(\gamma, r) = \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(1/2)}{\Gamma(\gamma/2)} |r|^{\gamma-1},$$

где $c_1(1, r) = 1$ для $\gamma = 1$.

Введем электромагнитные уравнения для микрополосковой линии на основе фрактальной пленки. Уравнение скалярного потенциала для области $|x| \leq a/2$, $0 \leq y < \infty$ (рис. 1) имеет вид

$$\nabla_t^2 \Phi(x, y) = 0.$$

Граничные условия:

$$\Phi(x, y) = 0 \text{ при } x = \pm a/2;$$

$$\Phi(x, y) = 0 \text{ при } y = 0, \infty.$$

Уравнение скалярного потенциала для воздушной и диэлектрической областей:

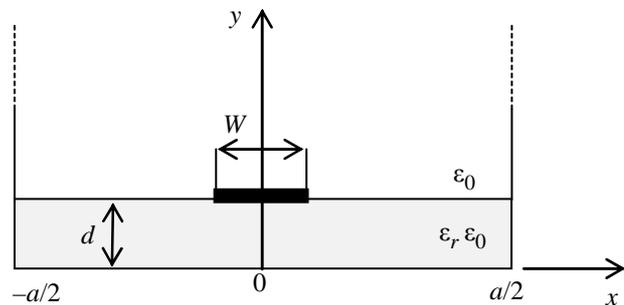


Рис. 1

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{b}, & 0 \leq y \leq d; \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{\pi n x}{a} e^{-\pi n y/a}, & d \leq y \leq \infty. \end{cases}$$

В книге [6] получено следующее выражение:

$$A_n = \frac{4a \sin(\pi n W/2a)}{(\pi n)^2 \varepsilon_0 [\operatorname{sh}(\pi n d/a) + \varepsilon_r \operatorname{ch}(\pi n d/a)]}.$$

Тогда напряжение между микрополоском и металлическим экраном можно вычислить по формуле

$$V = -\int_0^d E_y(x=0, y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(\pi n d/a).$$

Совокупный заряд микрополосковой линии определяется как

$$Q = \int_{-W/2}^{W/2} \rho_s(x) dx = \rho W.$$

В случае если металлическая пленка является фрактальной, то указанное уравнение перепишем с учетом выражений Рисса:

$$Q = \int_{-W/2}^{W/2} \rho_s(x) c_1(\gamma, x) dx = \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(1/2)}{\Gamma(\gamma/2)} \int_{-W/2}^{W/2} \rho_s(x) |x|^{\gamma-1} dx = \rho \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(1/2)}{\Gamma(\gamma/2)(\gamma-2)} |W|^{\gamma-2},$$

где γ – дробная размерность поверхности по оси x (значения от 0 до 1).

Тогда емкость полученного конденсатора запишется следующим образом:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{4a \sin \left(\frac{\pi n \rho \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(1/2)}{\Gamma(\gamma/2)(\gamma-2)} |W|^{\gamma-2}}{2a} \right) \frac{(\pi n)^2 \varepsilon_0 [\operatorname{sh}(\pi n d/a) + \varepsilon_r \operatorname{ch}(\pi n d/a)]}{1}}.$$

Диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon_0 = C/C_0.$$

Тогда характеристическое сопротивление линии определяется как

$$Z_0 = 1/v_p C = \sqrt{\varepsilon_0}/c C,$$

где v_p – фазовая скорость волны; c – скорость света.

В микрополосковых антеннах толщина подложки $h \ll \lambda$, поэтому существуют главным образом нормальная к пластине составляющая напряженности электрического поля E_Z , а также касательные к пластине x -, y -компоненты магнитного поля. Если считать за-

висимость гармонических полей от времени в виде $e^{i\omega t}$, то связь между E_Z и током J_Z в точке (x_0, y_0) следующая:

$$(\nabla_p^2 + k^2)E_z = -i\omega\mu_0 J_Z(x_0, y_0),$$

где $\nabla_p^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; $k^2 = k_0^2 \varepsilon_{\text{эф}}$ (k – волновое число в диэлектрике, k_0 – волновое число в свободном пространстве); ω – угловая частота.

Граничное условие для E_Z выглядит как $\partial E_Z/\partial n = 0$ на периферической магнитной стенке S_n , совпадающей с эффективными размерами пластины резонатора (n – единичный вектор внешней нормали).

В книге [7] показано, что для резонаторной модели микрополосковой антенны поле E_Z выражается через ток J_Z с помощью функции Грина $G(x, y; x_0, y_0)$ при помощи уравнения

$$E_Z(x, y) = \iint G(x, y; x_0, y_0) J_Z(x_0, y_0) dx_0 dy_0.$$

Перепишем данное уравнение для микрополосковой линии в виде фрактальной пленки:

$$E_Z(x, y) = \int G(x, y; x_0, y_0) J_Z(x_0, y_0) c_2(d, r) dS_0;$$

$$E_Z(x, y) = \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)} \int G(x, y; x_0, y_0) J_Z(x_0, y_0) |r|^{2-d} dS_0,$$

где интегрирование распространяется на область задания тока J_Z .

Функция Грина записывается для каждой формы микрополоска. Имеются формулы для прямоугольной, кольцевой, треугольной форм, а в более общем случае они определяются лишь численными методами.

Дробные интегродифференциальные уравнения позволяют применить уравнения Максвелла для описания электродинамических процессов во фрактальных средах. Получены уравнения для микрополосковых линий передачи с фрактальными пленками, позволяющие оценить значения элементов эквивалентной схемы микрополосковой линии передачи с сосредоточенными элементами. Получены также уравнения для описания поля в дальней зоне от микрополосковой антенны с фрактальной пленкой. Это создаёт основу для применения их в практических задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fangming Zhu, Qingchun Lin, Jun Hu. A Directive Patch Antenna with a Metamaterial Cover // Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings. 2005. Vol. 3. P. 1.
2. Efficient Design of Directive Patch Antennas in Mobile Communications Using Metamaterials / Wang Rui, Yuan Bo, Wang Gaofeng, Yi Fan // International J. of Infrared and Millimeter Waves. 2007. Vol. 28, Iss. 8. P. 639–649.
3. Subwavelength, Compact, Resonant Patch Antennas Loaded With Metamaterials / Andrea Alu, Filiberto Bilotti, Nader Engheta, Lucio Vegni // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2007. Vol. 55. P. 13.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
5. Tarasov V. E. Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles // American Institute of Physics: Physics of plasmas. 2005. Vol. 12, Iss. 8. P. 1–9.
6. Pozar D. M. Microwave Engineering. 2nd-ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1998.

7. Лось В. Ф. Микрополосковые и диэлектрические резонаторные антенны. САПР-модели: методы математического моделирования / под ред. чл.-кор. РАН Л. Д. Бахрака; ИПРЖР. М.; 2002.

D. A. Babichev, V. A. Tupik, A. V. Seluyanov

CALCULATION OF ANTENNA BASED ON THE FRACTAL SKINS

This article discusses calculation of antennas based on a new approach to calculate the differential electromagnetic equations in fractal media. These equations describe the distribution of the electric and magnetic fields in any fractal media. Conceptual description of the electromagnetic theory in a fractal medium is of great importance for the study of wave propagation in such media.

Fractal antenna, metamaterial electromagnetic equations