СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков Н. Б., Грудяева Е. К. Современные сооружения очистки сточных вод от азотно-фосфорных и органических соединений с применением технологии МБР Air-Lift // Водоснабжение и канализация. 2012. № 7–8. С. 90−100.

2. Жмур Н. С. Технологические и биохимические процессы очистки сточных вод на сооружениях с аэротенками. М.: АКВАРОС, 2003.

3. Вавилин В. А., Васильев В. Б. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод с активным илом. М.: Наука, 1979.

4. Monod J. Rechercher sur la croissance des cultures bacterienner. Paris: Herman et Cie, 1942.

E. K. Grudyaeva, S. E. Dushin, N. E. Sholmova

ANALYSIS OF TECHNOLOGICAL PROCESS OF WASTEWATER TREATMENT WITH THE MEMBRANE BIOREACTOR AS CONTROL OBJECT

The description of technological process of wastewater treatment with use of the membrane bioreactor is represented. The mathematical Monod model of interaction a biomass and substrate in the reactor is investigated

Wastewater, biological treatment, membrane bioreactor, activated sludge, substrate, Monod model

УДК 681.513.1

С. А. Романов

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ МАГНИТНОГО ПОДШИПНИКА

Рассматривается нелинейный аффинный объект с неопределенными параметрами. Проведен анализ некоторых методов управления, робастно стабилизирующих систему. Показано, что для исследуемого объекта удовлетворительных результатов можно добиться управлением по линеаризованной модели.

Робастная устойчивость, стабилизация, нелинейные системы, параметрическая неопределенность

Проблема управления при наличии неопределенности, в частности параметрической, является в настоящее время одной из центральных в теории управления. В линейном случае существует множество подходов к ее решению: интервальный, H_∞-оптимизация, μ-синтез, подход на основе линейных матричных неравенств и др. [1]. Для нелинейных систем эффективные методы синтеза при наличии неопределенности в общем случае отсутствуют. Проанализируем на конкретном примере возможные методы синтеза для таких систем.

Рассмотрим систему стабилизации магнитного подшипника [2], описываемую уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{L_0}{m}\left(\dfrac{(x_3+I_0)^2}{(k-2x_1)^2} - \dfrac{(x_4+I_0)^2}{(k+2x_1)^2}\right) \\ -\dfrac{R_1(k-2x_1)x_3}{L_0} - \dfrac{2x_2(x_3+I_0)}{k-2x_1} \\ -\dfrac{R_2(k+2x_1)x_4}{L_0} + \dfrac{2x_2(x_4+I_0)}{k+2x_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{k-2x_1}{L_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{k+2x_1}{L_0} \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – вектор состояния; x_1 – положение ротора; x_2 – скорость ротора; x_3, x_4 – токи; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ – вектор управления, компонентами которого являются напряжения u_1 и u_2. Номинальные значения параметров системы: $m = 2$ кг, $k = 2.0125 \cdot 10^{-3}$ м,

$L_0 = 3 \cdot 10^{-4}$, $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $I_0 = 6 \cdot 10^{-2}$ А (m – масса ротора, I_0 – ток до магнита, R_1, R_2 – сопротивления, L_0 и k – положительные константы, зависящие от конструкции системы). Требуется синтезировать управление, обеспечивающее устойчивость нулевого положения равновесия при заданных интервалах изменения параметров.

В статье [2] синтез управления осуществляется в 2 этапа. На первом этапе методом робастной линеаризации обратной связью (РЛОС) ищется статическое управление, приводящее систему к виду, соответствующему линеаризованной системе в окрестности положения равновесия. Процедура синтеза выглядит следующим образом.

Пусть система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \ldots + \mathbf{g}_m(\mathbf{x})u_m, \\ &y_1 = h_1(\mathbf{x}), \\ &\quad\vdots \\ &y_m = h_m(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где размерность вектора выхода $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ равна размерности вектора входа $\mathbf{u}$. Функции $h_i(\mathbf{x})$ такие, что выполняется условие $r_1 + \cdots + r_m = n$, где $r_1, \ldots, r_m$ – относительные степени, т. е. система не имеет внутренней динамики. Введем обозначение $\partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Символом $L_f^k g$ обозначена производная Ли k-го порядка векторного поля $g(\mathbf{x})$ по векторному полю $f(\mathbf{x})$. Тогда искомое управление имеет вид $\mathbf{u} = \alpha_r(\mathbf{x}) + \beta_r(\mathbf{x})\mathbf{v}$, где $\alpha_r(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1}\varphi(\mathbf{x})$, $\beta_r(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}$, $\varphi_r(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{-1}\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{L} = -\mathbf{M}(0)\partial_x\alpha(0)$, $\mathbf{T} = \partial_x\varphi(0)$, $\mathbf{R} = \mathbf{M}^{-1}(0)$. Матрица $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ и функции $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$ определяются методом линеаризации обратной связью и задаются выражениями $\alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\left[L_f^{r_1}h_1(\mathbf{x}), \ldots, L_f^{r_m}h_m(\mathbf{x})\right]^T$, $\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_1-1}h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{r_m-1}h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_m-1}h_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Преобразование координат задается выражением $\varphi(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x})]^T$, где $\varphi_i(\mathbf{x}) = [h_i(\mathbf{x}) \;\; L_f h_i(\mathbf{x}) \;\; L_f^{r_i-1}h_i(\mathbf{x})]$.

На втором этапе методом H_∞-коррекции синтезируется управление $\mathbf{v}$ для полученной линейной системы.

Проанализируем представленное решение. Результаты численного моделирования, приведенные в [2], показывают, что нулевое положение равновесия локально устойчиво с областью притяжения $x_1^0 \le 5.5 \cdot 10^{-4}$. Замкнутая система робастно устойчива при изменении параметра k на $\pm 5\,\%$, а остальных параметров на $\pm 15\,\%$. Воспроизведя при помощи пакета

Matlab закон управления по представленному алгоритму, получим регулятор 19-го порядка. При непосредственном приложении линейного управления $\mathbf{v}$ к исходной нелинейной системе замкнутая система становится неустойчивой при некоторых значениях параметров.

Рассмотрим другие возможные методы стабилизации заданной системы. Синтезируем управление по линеаризованной модели. Нулевое положение равновесия сохраняется при изменениях параметров, поэтому линеаризованная модель также будет содержать неопределенные параметры.

Уравнение линеаризованной системы: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{8I_0^2 L_0}{mk^3} & 0 & \dfrac{2I_0 L_0}{mk^2} & -\dfrac{2I_0 L_0}{mk^2} \\ 0 & -\dfrac{2I_0}{k} & -\dfrac{kR_1}{L_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{2I_0}{k} & 0 & -\dfrac{kR_2}{L_0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{k}{L_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{k}{L_0} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, задача свелась к стабилизации неопределенной многомерной линейной системы. Будем искать статическое управление в виде $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Существуют различные подходы к решению этой задачи, однако в общем случае данная задача NP-трудная [3].

Наиболее простым является эвристический способ решения, при котором ищется управление для номинальной системы и затем проверяется робастная устойчивость замкнутой системы. Хорошим «кандидатом» для управления является линейно-квадратичный регулятор, обеспечивающий запас устойчивости по модулю $L \geq 2$ и по фазе $\varphi \geq 60^0$ [4]. При выполнении описанной процедуры получили следующий регулятор:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 702.62 & 22.9 & 4.89 & -2.58 \\ -702.62 & -22.9 & -2.58 & 4.89 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования при начальных условиях $\mathbf{x}^0 = [5.5 \cdot 10^{-4}\ 0\ 0\ 0]$ и различных значениях параметров показаны на рис. 1. График управления при номинальных значениях параметров представлен на рис. 2.

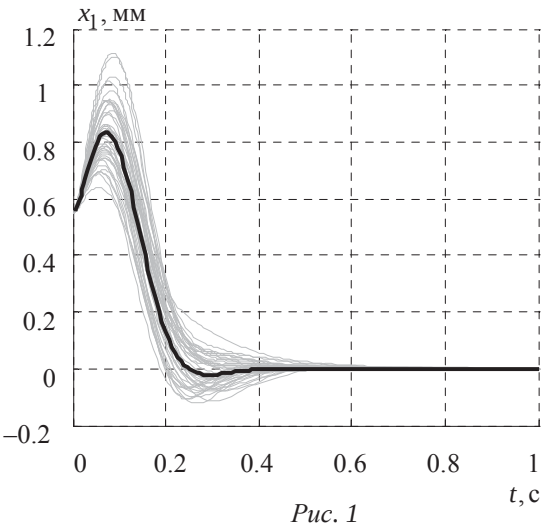

Рис. 1

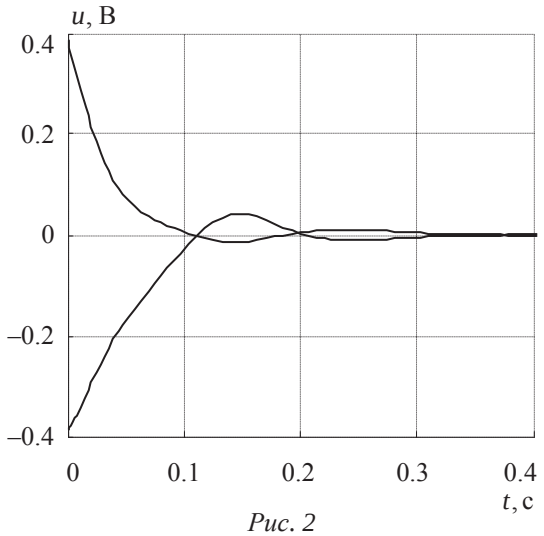

Рис. 2

Применим полученное управление в качестве линейного закона для преобразованной системы при РЛОС. Результаты численного моделирования показывают, что при $x_1^0 \le 4.5 \cdot 10^{-4}$ цель управления достигается. График переходных процессов для различных значений параметров представлен на рис. 3, управления – на рис. 4. При $x_1^0 > 4.5 \cdot 10^{-4}$ управление u_2 в начальные моменты времени обращается в бесконечность. Это объясняется тем, что определитель матрицы $\mathbf{M}$, равный $2(I_0 + x_4)(k - 2x_1) / \left[L_0 m(k + 2x_1)\right]$, в эти моменты обращается в ноль. Добавив звено насыщения, ограничивающее $u_2 = \text{sign}(u_2)$ при $|u_2| > 1$, получим переходные процессы, представленные на рис. 5. График управления показан на рис. 6. Как видно из графиков, в системе присутствует статическая ошибка. Отметим, что положение равновесия разомкнутой и замкнутой систем при отсутствии обращения управления в бесконечность не зависит от параметров.

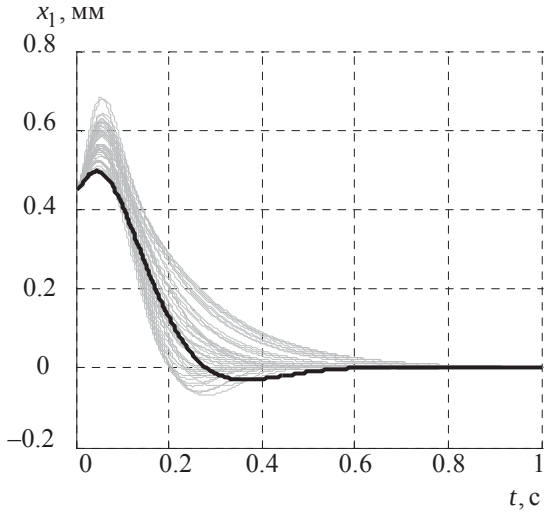

Рис. 3

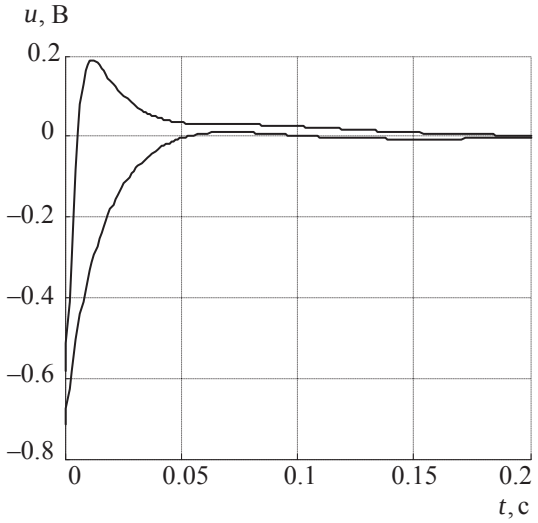

Рис. 4

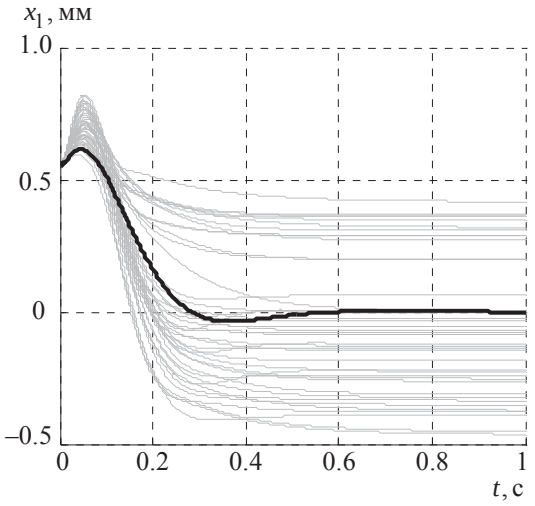

Рис. 5

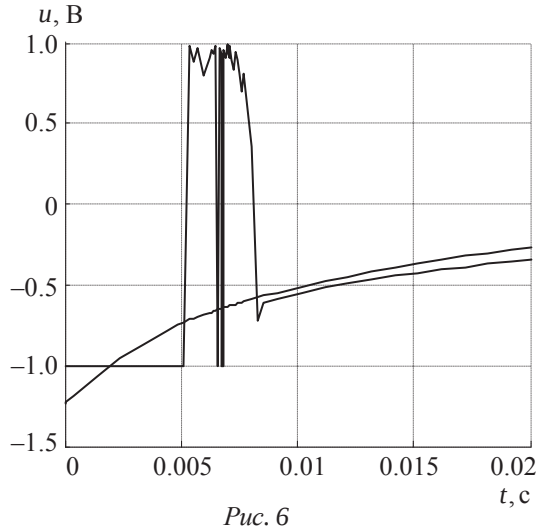

Рис. 6

Рассмотренные ранее методы синтеза сводят исходную задачу к задаче синтеза управления для линейной системы. При этом обычная линеаризация аппроксимирует исходную нелинейную систему лишь в некоторой окрестности рабочей точки. При робаст-

ной линеаризации обратной связью происходит компенсация нелинейностей, в том числе и полезных, поэтому целесообразно рассмотреть возможность применения нелинейных методов синтеза при неопределенности.

Наиболее исследованным является случай, когда неопределенность удовлетворяет условию согласованности, т. е. входит в те же уравнения, что и управление. Тогда систему можно представить в виде $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$, где $\|\delta(\mathbf{x}, \mathbf{u})\| \le \rho(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ – неотрицательная непрерывная функция. Если известны закон управления, стабилизирующий номинальную систему $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}$, и функция Ляпунова для замкнутой системы, то можно найти аддитивную поправку для управления, обеспечивающую робастную устойчивость возмущенной системы [5]. Для исследуемой системы это соответствует случаю, когда неопределенными являются параметры R_1 и R_2. Однако синтез управления для номинальной нелинейной системы и поиск соответствующей функции Ляпунова – нетривиальная задача. Ее решение возможно на основе линеаризации и решения уравнения Ляпунова, однако такой метод является лишь локальным.

Другим распространенным способом синтеза с нахождением функции Ляпунова замкнутой системы, в том числе и при наличии неопределенности, являются итеративные процедуры. Например, для исследуемой системы возможно применение метода обратного обхода интегратора. Однако на каждом этапе синтеза необходимо обеспечивать отрицательную определенность выбранной функции Ляпунова, что, из-за структуры объекта, в частности из-за наличия деления, является чрезвычайно трудоемкой задачей.

Таким образом, для исследуемого объекта при наличии неопределенностей наименее трудоемким методом синтеза, обеспечивающим приемлемое качество, является синтез по линеаризованной модели. Метод робастной линеаризации обратной связью потенциально может обеспечить глобальную устойчивость, однако для заданного объекта этого сделать не удается. В самом деле, точка $x_1 = k/2$ является сингулярной, поэтому можно обеспечить лишь локальную устойчивость нулевого положения равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

2. Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and H_∞ -control / A. L. Franco, H. Bourles, E. R. De Pieri et al. // IEEE Transactions on Automatic Control. 2006. Vol. 51, № 7. P. 1200–1207.

3. Blondel V. D., Tsitsiklis J. N. A survey of computational complexity results in systems and control // Automatica. 2000. Vol. 36. P. 1249–1274.

4. Александров А. Г. Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 4–17.

5. Khalil H. K. Nonlinear systems. Prentice Hall, 2002.

S. A. Romanov

COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS FOR ROBUST STABILIZATION OF THE NONLINEAR OBJECT

The present paper deals with the nonlinear affine object with uncertainty parameters. The analysis of some problem solution is made, which robustly stabilize the system. It is shown, that satisfactory results of the object can be achieved by control of the linearized model.

Robust stability, stabilization, nonlinear systems, parametric uncertainty