

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chu L. J. Physical Limitation on omni-directional antennas // J. Appl. Phys. 1948. Vol. 19. P. 1163–1175.
2. Mc Lean J. S. A re-examination of the fundamental limits on the radiation Q of electrically small antennas // IEEE Trans. Ant. Prop. 1996. Vol. 44, № 5. P. 672–676.
3. Антенны в режиме излучения негармонических сигналов / Г. А. Костиков, А. Ю. Одинцов, Ю. П. Саломатов, М. И. Сугак; Под ред. Ю. П. Саломатова и М. И. Сугака. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.
4. Костиков Г. А., Одинцов А. Ю., Сугак М. И. Фидерный коэффициент полезного действия антенны Вивальди, возбуждаемой гауссовым импульсом // Антенны. 2011. Вып. 12. С. 52–60.

S. V. Ballandovich, V. A. Savelev, M. I. Sugak

### FEATURES COMPACT DIPOLE FOR UHF BAND

*The calculated and experimental results of investigation of the broadband compact dipole for UHF band are presented. Recommendation about a choice of geometry such antennas are given, also features of the relation between dipole's geometry and its electrical characteristics have been examined. The case of the pulse excitation of the antenna has been studied.*

**Broadband dipole, pulse signals, feedline efficiency**

УДК 629.7.05

*Я. А. Мелехов, В. К. Орлов*

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ФОРМИРОВАНИЯ ВЫХОДНОЙ ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ МЕЖСАМОЛЕТНОЙ НАВИГАЦИИ

*Представлен сравнительный анализ алгоритмов формирования выходной оценки относительной дальности при наличии двух источников информации. Приведены результаты фильтрации для трех различных моделей движения группы летательных аппаратов.*

**Несколько источников информации, матрица Якоби, кроссковариация, фильтр Калмана**

Для успешного решения задачи управления полетом группы летательных аппаратов (ЛА) требуется определить относительные дальности и углы между ее участниками. Вследствие того, что дальность измеряется различными средствами – навигационными спутниками, дальномером и т. д., возникает необходимость комплексирования оценок параметров от нескольких источников информации и формирования общей, выходной, оценки. В статье рассматриваются оптимальный и субоптимальные алгоритмы [1] формирования выходной оценки относительной дальности от двух источников информации при отсутствии пропадания измерений. В основу рассмотренных методов легли различные варианты расчета взвешенных коэффициентов вектора состояния (ВС) независимых источников информации при определении выходной оценки. Для уменьшения вычислительной сложности представлены субоптимальные методы, основанные на использовании только диагональных элементов матрицы ковариации дисперсии оценок.

**Формальная постановка задачи.** Целью исследования являлся сравнительный анализ алгоритмов формирования выходной оценки относительной дальности группы ЛА посредством комплексирования оценок, поступающих от двух независимых источников информации. Для данной конкретной ситуации в качестве первого источника оценок отно-

сительной дальности выступает фильтр Калмана (ФК) координатной информации, на который поступают измерения от спутниковой радионавигационной системы (СРНС); второй источник – дальномерный фильтр, обрабатывающий измерения от дальномера, установленного на борту ЛА. Анализ проводился для различных моделей движения группы: равномерная модель с нулевой относительной скоростью; равномерная модель с относительной скоростью, отличной от нуля; равноускоренная модель.

**Формирование единого вектора состояния.** Для использования алгоритма мультиплексирования необходимо определить единый вектор состояния, в который будут пересчитываться векторы состояний независимых источников. Как уже отмечалось, одним из источников оценок относительной дальности в рассмотренной задаче выступает фильтр дальномерной информации, вектор состояния которого является трехэлементным, т. е.

$$\mathbf{X}_d = [D \quad v_d \quad a_d]^T,$$

где  $D$  – относительная дальность;  $v_d$  – радиальная скорость;  $a_d$  – радиальное ускорение.

Использование в ВС радиального ускорения позволяет избежать потери точности оценок относительной дальности для моделей движения, в которых совершается маневр (равноускоренная модель).

Вторым источником является фильтр координатной информации, обрабатывающий измерения относительных координат, поступающих от СРНС. Вектор состояния данного фильтра имеет вид

$$\mathbf{X}_c = [X \quad v_x \quad a_x \quad Y \quad v_y \quad a_y \quad Z \quad v_z \quad a_z]^T,$$

где  $X, Y, Z$  – относительные координаты одного ЛА в местной прямоугольной системе координат другого [2];  $v_x, v_y, v_z$  – составляющие модуля скорости;  $a_x, a_y, a_z$  – составляющие модуля ускорения.

Применение алгоритмов формирования выходной оценки основано на том факте, что вектор состояния системы должен быть одинаков (един) для всех источников (ФК) оценок. Основополагающим критерием выбора такого вектора состояния является простота пересчета ВС каждого из источников в единый. Для данной задачи в качестве единого ВС системы был выбран ВС дальномерного фильтра, т. е.

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{X}_d = [D \quad v_d \quad a_d]^T.$$

Запишем  $\mathbf{X}_s$  через элементы вектора состояния координатного фильтра  $\mathbf{X}_c$ :

$$\mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} D \\ v_d \\ a_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{D} \\ \frac{(v_x^2 + xa_x)D^2 - x^2v_x^2 + (v_y^2 + ya_y)D^2 - y^2v_y^2 + (v_z^2 + za_z)D^2 - z^2v_z^2}{D^3} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Помимо преобразования ВС необходимо также пересчитать и ковариационную матрицу ошибок  $\mathbf{P}_c$  координатного фильтра. Для этого определим матрицу Якоби  $\mathbf{J}$  и воспользуемся формулой

$$\mathbf{P}'_c = \mathbf{J}\mathbf{P}_c\mathbf{J}^T.$$

В данном конкретном случае матрица Якоби определяется следующим выражением:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{X}_s}{\partial \mathbf{X}_c} = \begin{bmatrix} \frac{x}{D} & 0 & 0 & \frac{y}{D} & 0 & 0 & \frac{z}{D} & 0 & 0 \\ J_{21} & \frac{x}{D} & 0 & J_{24} & \frac{y}{D} & 0 & J_{27} & \frac{z}{D} & 0 \\ J_{31} & J_{32} & \frac{x}{D} & J_{34} & J_{35} & \frac{y}{D} & J_{37} & J_{38} & \frac{z}{D} \end{bmatrix},$$

где

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$J_{21} = \frac{v_x(y^2 + z^2) - x(v_y y + v_x x)}{D^3}, \quad J_{24} = \frac{v_y(x^2 + z^2) - y(v_x x + v_z z)}{D^3},$$

$$J_{27} = \frac{v_z(x^2 + y^2) - z(v_x x + v_y y)}{D^3},$$

$$J_{31} = \frac{(y^2 + z^2)(a_x D^2 - 3xv_x^2) - x(ya_y D^2 + v_y^2(x^2 - 2y^2 + z^2)) - x(za_z D^2 + v_z^2(x^2 + y^2 - 2z^2))}{D^5},$$

$$J_{32} = \frac{2v_x(y^2 + z^2)}{D^3}, \quad J_{35} = \frac{2v_y(x^2 + z^2)}{D^3}, \quad J_{38} = \frac{2v_z(x^2 + y^2)}{D^3},$$

$$J_{34} = \frac{(x^2 + z^2)(a_y D^2 - 3yv_y^2) - y(xa_x D^2 + v_x^2(-2x^2 + y^2 + z^2)) - y(za_z D^2 + v_z^2(x^2 + y^2 - 2z^2))}{D^5},$$

$$J_{37} = \frac{(x^2 + y^2)(a_z D^2 - 3zv_z^2) - z(xa_x D^2 + v_x^2(-2x^2 + y^2 + z^2)) - z(ya_y D^2 + v_y^2(x^2 - 2y^2 + z^2))}{D^5}.$$

**Описание эксперимента.** Методика эксперимента представлена на рис. 1. На передающей стороне отсчеты белого гауссовского шума (БГШ) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией смешиваются с истинными значениями координат и скоростей, рассчитанными для конкретной модели движения группы ЛА. Шумы предполагаются некоррелированными. Подробное исследование влияния корреляции на результаты фильтрации приведено в [2].

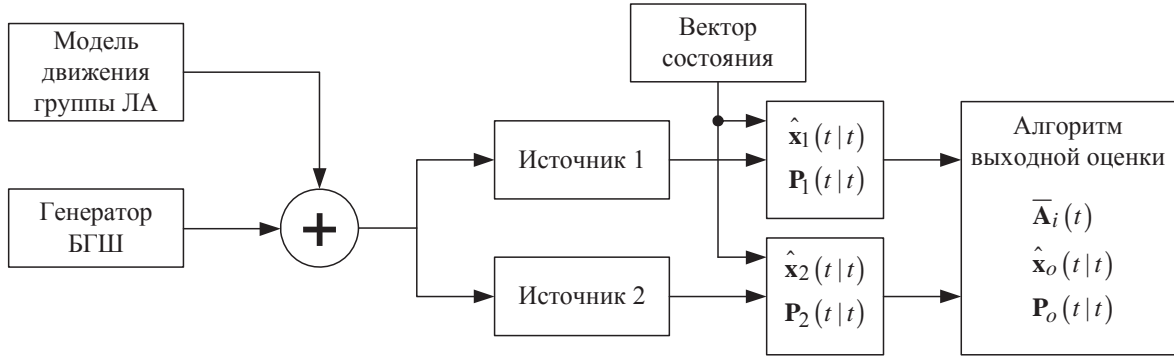


Рис. 1

На приемной стороне располагаются две независимые модели фильтра Калмана: фильтр дальномерной информации и фильтр координатной информации (Источник 1 и Источник 2 на рис. 1). Каждый из источников формирует оптимальную оценку параметров согласно своему вектору состояния. Затем ВС Источника 2 для каждой модели пересчитываются по формуле (1) в единый вектор состояния. В конечном блоке рассчитываются весовые коэффициенты  $\bar{\mathbf{A}}_i$  и формируются выходная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_o$  и ковариационная матрица ошибок  $\mathbf{P}_o$ .

Пусть дана система из  $k$  фильтров, производящих оценку стохастического вектора  $\mathbf{x}$  ( $\hat{\mathbf{x}}_i, i = 1, 2, \dots, k$ ). Ошибка оценки  $i$ -го источника может быть представлена как

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i.$$

Предположим, что  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  и  $\tilde{\mathbf{x}}_j$  ( $i \neq j$ ) – коррелированные случайные величины, характеризующиеся дисперсией ошибки  $\mathbf{P}_{ii}$  и кроссковариацией  $\mathbf{P}_{ij}$ . Необходимо вычислить выходную оценку  $\hat{\mathbf{x}}_o$  данной системы. Согласно [1]  $\hat{\mathbf{x}}_o$  определяется следующим выражением:

$$\hat{\mathbf{x}}_o = \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + \bar{\mathbf{A}}_k \hat{\mathbf{x}}_k, \quad (2)$$

где  $\bar{\mathbf{A}}_i$  – матрица весовых коэффициентов  $i$ -го источника, которая определяется выражением

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E} (\mathbf{E}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E})^{-1}.$$

Здесь  $\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{A}}_2, \dots, \bar{\mathbf{A}}_k]^T$ ,  $\mathbf{E} = [\mathbf{I}_n, \dots, \mathbf{I}_n]^T$  – матрицы размером  $nk \times n$ ;  $\mathbf{G}$  – положительно определенная ковариационная матрица ошибок размером  $nk \times nk$  ( $\mathbf{G} = (\mathbf{P}_{ij})_{nk \times nk}$ ). Можно доказать [3], что ковариационная матрица выходной оценки

$$\mathbf{P}_o = (\mathbf{E}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E})^{-1}.$$

В данной статье рассмотрены различные методы расчета весовых коэффициентов  $\bar{\mathbf{A}}_i$ , когда количество измерителей равно двум.

Первый алгоритм определения весовых коэффициентов основывается на том, что ошибки фильтрации  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  и  $\tilde{\mathbf{x}}_j$  ( $i \neq j$ ) являются некоррелированными случайными величинами. Таким образом:

$$\bar{\mathbf{A}}_i^I = \left( \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j^{-1} \right)^{-1} \mathbf{P}_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Подставив (3) в формулу (2), получим выражение для выходной оценки:

$$\hat{\mathbf{x}}_o^I = \left( \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j^{-1} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i^{-1} \hat{\mathbf{x}}_i \right).$$

Дисперсия оценки

$$\mathbf{P}_o^I = \left( \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j^{-1} \right)^{-1}.$$

Для снижения вычислительной сложности, связанной с обращением матриц больших размеров, в [1] предлагается другой алгоритм, являющийся упрощением первого. В этом случае в ковариационной матрице ошибок элементы, стоящие не на главной диагонали, обнуляются и в дальнейших расчетах матрица  $\mathbf{P}_i$  является диагональной  $\bar{\mathbf{P}}_i$ . Тогда коэффициенты  $\bar{\mathbf{A}}_i$  будут представлять собой векторы, т. е.

$$\bar{\mathbf{A}}_i^{\text{II}} = \left( \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{P}}_j^{-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{P}}_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выходная оценка

$$\hat{\mathbf{x}}_o^{\text{II}} = \left( \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{P}}_j^{-1} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{P}}_i^{-1} \hat{\mathbf{x}}_i \right).$$

Дисперсия оценки

$$\mathbf{P}_o^{\text{II}} = \left( \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{P}}_j^{-1} \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{P}}_j^{-1} \bar{\mathbf{P}}_j \bar{\mathbf{P}}_j^{-1} \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{P}}_j^{-1} \right)^{-1}.$$

В качестве третьего алгоритма используется следующий этап упрощения матрицы, когда определяется только след ковариационной матрицы ошибок. В этом случае коэффициенты  $\bar{\mathbf{A}}_i$  представляют собой скалярные величины:

$$\bar{\mathbf{A}}_i^{\text{III}} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{\text{tr } \mathbf{P}_j} \right)^{-1} \frac{1}{\text{tr } \mathbf{P}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выходная оценка

$$\hat{\mathbf{x}}_o^{\text{III}} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{\text{tr} \mathbf{P}_j} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\text{tr} \mathbf{P}_i} \hat{\mathbf{x}}_i \right).$$

Дисперсия оценки

$$\mathbf{P}_o^{\text{III}} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{\text{tr} \mathbf{P}_j} \right)^{-2} \sum_{i=1}^k \left( \frac{1}{\text{tr} \mathbf{P}_i} \right)^2 \mathbf{P}_i.$$

Далее представлены сравнительные характеристики алгоритмов выходной оценки и произведен их анализ для различных моделей движения группы ЛА.

**Результаты фильтрации.** В качестве меры сравнения результатов работы трех алгоритмов формирования выходной оценки предложены две характеристики – разностная зависимость истинных значений относительной дальности и ее оценки от времени  $\Delta D$  (рис. 2, 4, 6 (*a* – разностная зависимость на всей длительности полета; *б* – увеличенный масштаб участка графика *a*)); зависимость коэффициента  $P_{11}$  от времени (в увеличенном масштабе), по которой можно судить о точности оценки относительной дальности (рис. 3, 5, 7).

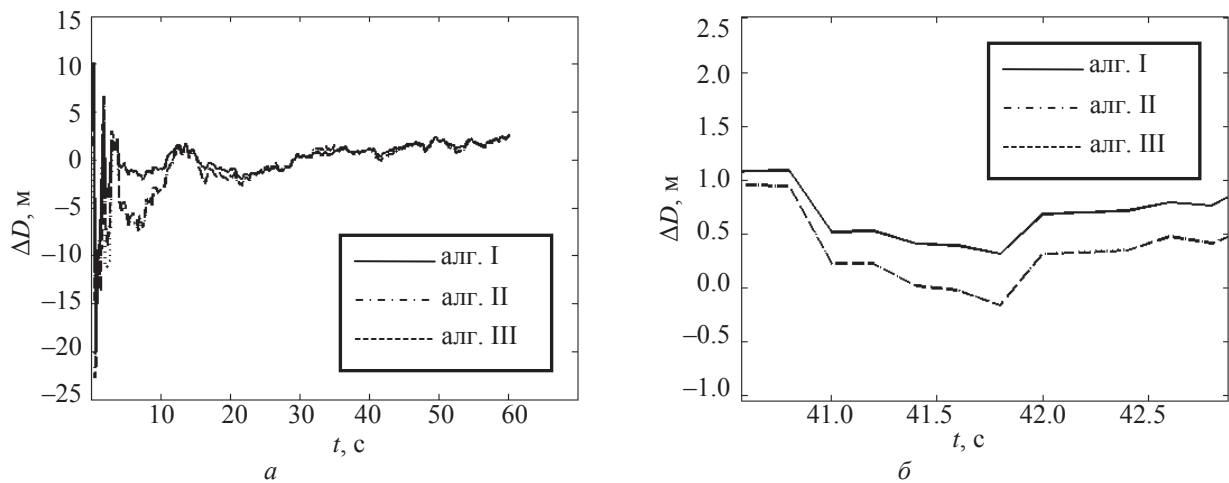


Рис. 2

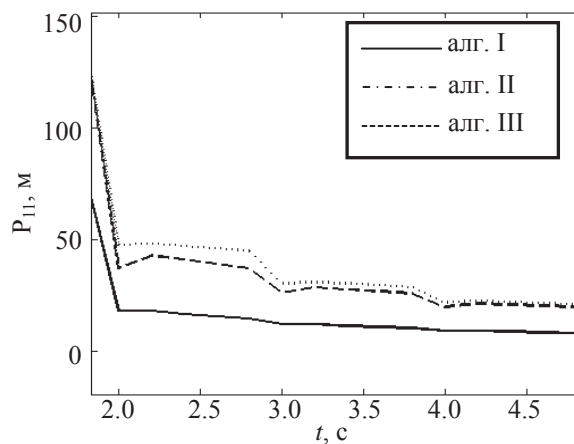


Рис. 3

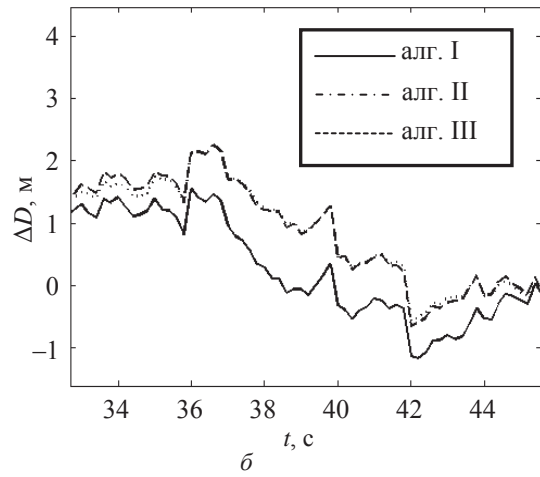
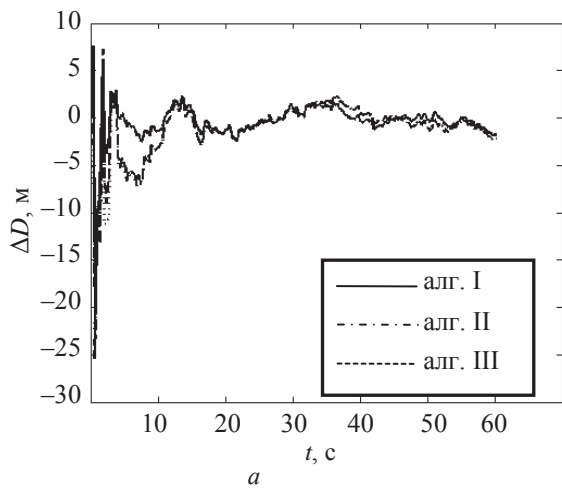


Рис. 4

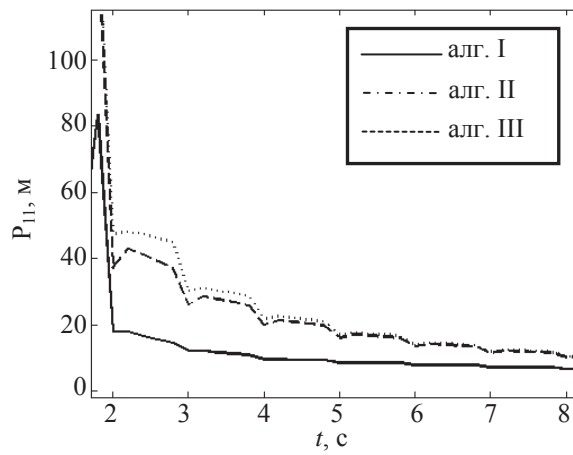


Рис. 5

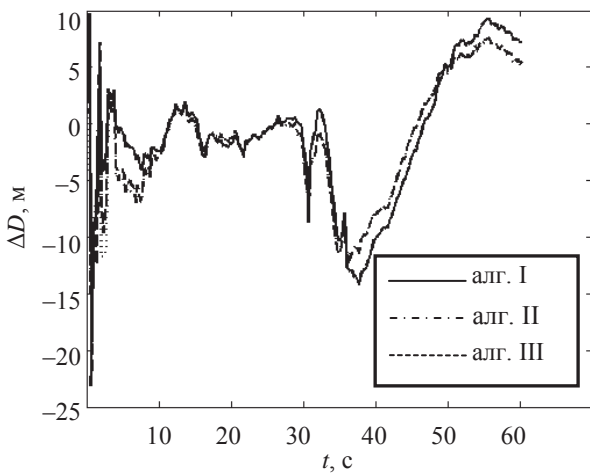


Рис. 6

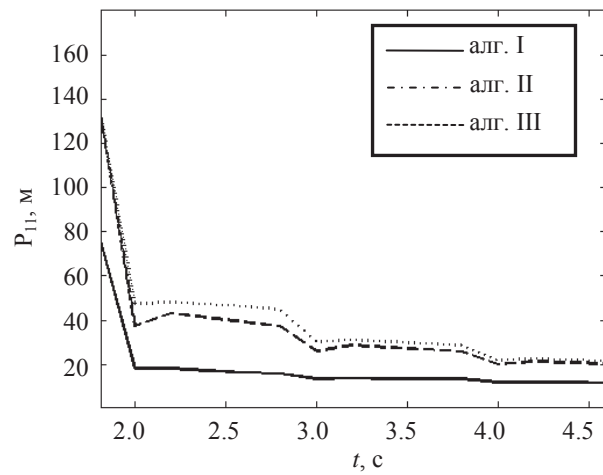


Рис. 7

По приведенным графикам видно, что первый алгоритм, использующий в качестве весовых коэффициентов матрицы, дает более точные результаты. Точность выходной оценки второго и третьего алгоритмов практически одинакова. В процессе моделирования было установлено следующее соотношение:

$$\text{tr}(\mathbf{P}_o^I) < \text{tr}(\mathbf{P}_o^{\text{II}}) \leq \text{tr}(\mathbf{P}_o^{\text{III}}).$$

Однако одним из существенных недостатков первого алгоритма является процедура обращения матриц, требующая выполнения 39 операций умножения (сложность алгоритма при использовании прямого метода Гаусса–Жордана равна  $O(n^3)$ ), что при большом количестве ЛА в группе является ресурсоемкой операцией для аппаратуры конечного потребителя. Таким образом, несмотря на незначительный проигрыш в точности выходной оценки, целесообразно использовать третий алгоритм, вычислительная сложность которого по сравнению с остальными ниже.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun S.-li. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filters with applications // Aerospace Science and Technology. 2004. № 8. P. 57–62.
2. Мелехов Я. А., Орлов В. К. Фильтрация относительных координат при коррелированных погрешностях измерений // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2012. Вып. 9. С. 7–15.
3. Bar-Shalom. Y. On the track-to-track correlation problem // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. № 2. P. 571–572.

*Y. A. Melekhov, V. K. Orlov*

#### *COMPARATIVE ANALYSIS OF MULTI-SENSOR FUSION ALGORITHMS OF RELATIVE DISTANCE ESTIMATIONS*

*A comparative analysis of 2-sensor fusion algorithms of relative distance estimation is presented. Kalman filters results for three dynamic models of aircrafts group are given in the article.*

**Multi-sensor, Jacobian matrix, cross-covariance, Kalman filter**