УДК 528.08:519.713.1

Э. П. Тихонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СИНТЕЗА АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ АЛГОРИТМОВ ИЗМЕРЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В БИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Разработаны основы теории синтеза адекватной математической модели и алгоритмов функционирования для аналого-цифровых средств измерения в биотехнических системах и установлена их связь с известным в теоретической механике общим эволюционным уравнением. Приведены конкретные примеры применения разработанной теории для синтеза и анализа различных алгоритмов аналого-цифровых преобразователей. Установлена роль аттрактора в алгоритмах функционирования сигма-дельта-аналого-цифровых преобразователей.

Теоретические основы, синтез, анализ, алгоритмы, аналого-цифровые преобразователи

Создание адекватной математической модели и алгоритмов, определяющих основу функционирования аналого-цифровой биотехнической или любой другой системы, является исходным этапом при проектировании, изготовлении, исследовании и испытании, включая численный компьютерный эксперимент или имитационное моделирование. В свою очередь, процесс выявления общности разрабатываемых конкретных моделей на базе фундаментальных физических законов расширяет и в то же время осуществляет дальнейшую обоснованную дифференциацию наших знаний в области создания искусственных систем, включая и биотехнические системы. Подобный подход позволяет глубже осмыслить и понять изучаемую область с учётом выделения её специфичности на фоне того общего, что формирует наши знания об окружающем мире. Мощный рывок в информационных технологиях, свидетелями которого мы являемся, обусловлен, прежде всего, колоссальными достижениями в цифровой вычислительной и измерительной технике. Благодаря информационным технологиям и достигнутым успехам в области вычислительной математики существенно возросла предсказывающая роль науки за счёт ранее недоступного имитационного моделирования сложнейших процессов и явлений окружающего нас мира. Особую роль имитационное моделирование играет при проектировании аналого-цифровых электронных систем, включая биотехнические системы. Однако дальнейший прогресс в этой сфере электроники сдерживается отставанием теории синтеза аналого-цифровых электронных средств, в частности в области формального синтеза алгоритмов их функционирования.

По своей сущности цифровые средства выполняют возложенные на них задачи благодаря цифровой аппроксимации информации, представленной в аналоговой форме. Поэтому важным моментом в решении задачи синтеза является обоснованный переход от непрерывных исходных моделей, свойственных электрофизиологическим сигналам, к их дискретно-квантовому аналогу, причём с обязательным решением вопроса адекватности такого перехода через контроль погрешности аппроксимации. Само решение задачи аппроксимации окружающего нас информационного континуума с целью получения доступных для обработки данных неизбежно связано с квантованием, временной дискретизацией и оцифровкой. Вопрос перехода от непрерывного к дискретно-квантовому представлению информации является фундаментальным вопросом не только в медико-технических приложениях, а и в познании окружающего нас мира, поэтому поиску обоснованного ответа на этот вопрос в науке традиционно уделяется большое внимание (см., например, [1]–[7]).

Постановка задачи. В работе предлагаются и рассматриваются основы теории синтеза и анализа алгоритмов функционирования аналого-цифровых биотехнических систем, и прежде всего основных их подсистем – аналого-цифровых преобразователей (АЦП), на базе теории динамических систем [8]–[11].

Теоретический анализ. Для решения поставленной задачи рассмотрим предварительно следующее известное в теоретической механике эволюционное уравнение [8]–[11]:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t}+\frac{\partial U(x(t),\mu)}{\partial x(t)}=0, \tag{1}$$

где $U(x(t), \mu)$ трактуется как потенциальная энергия, зависящая от изменяющейся во времени координаты $x(t)$ материальной точки и некоторого управляющего параметра μ; $\frac{\partial U(x(t),\mu)}{\partial x(t)}$ – производная от потенциальной энергии, которая определяет движущую или потенциальную силу, действующую на рассматриваемую материальную точку.

Как известно [8], уравнение (1) описывает движущуюся в вязкой среде материальную точку со скоростью, пропорциональной силе, зависящей от потенциальной функции и, следовательно, от управляющего параметра. В теории нелинейной динамики [8]–[11] исследуется поведение траектории системы, состояние которой определяется значением вектора с координатами установленной совокупности материальных точек (переменных). Сложность исследования существенно возрастает с ростом размерности вектора. В дальнейшем с целью упрощения формальных выкладок исследования проводятся в основном для одномерного варианта, который, к тому же, представляет наибольший практический интерес, особенно при синтезе алгоритмов для АЦП.

При синтезе алгоритмов аналого-цифрового преобразования электрофизиологических сигналов (в дальнейшем – сигналов) можно использовать два подхода. В соответствии с первым подходом процесс преобразования (измерения) осуществляется сравнением исходного сигнала с априорно заданной образцовой функцией, а результат сравнения контролируется значениями функции сравнения. В этом случае формирование измерительного алгоритма осуществляется на основе равенства

$$K(t) = \rho[\, f\,(\varphi(t), y(t))] + C, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ – априорно заданная образцовая функция, параметры которой выбираются исходя из требования к процессу измерения; $K(t)$ – числовой эквивалент, который формируется в зависимости от взаимодействия заданной образцовой функции с исходным аналоговым сигналом, или просто сигналом; $y(t)$ – сигнал, воздействующий на измерительную систему, или состояние окружающей среды, представленное в дальнейшем как измеряемый или аналоговый ограниченный по уровню сигнал, т. е. и $y(t) \in [0, E_0]$; C – некоторая априорно заданная постоянная; $f\,(\varphi(t), y(t))$ – функция, описывающая вид взаимодействия заданной образцовой функции и сигнала; $\rho[f(\varphi(t), y(t))]$ – функция меры, описывающая вид взаимодействия заданной образцовой функции и сигнала и, как функция меры, удовлетворяющая условиям:

$$\rho[\, f\,(\varphi(t), y(t))] \;= \rho[\, f\,(\varphi(t), y(t))] \;\geq\; 0,$$

причём $\rho[\, f\,(y(t), \varphi(t))] \;=\; 0,$ если

$$\varphi(t) = y(t),\;\; \rho[\, f\,(\varphi(t), y(t))] \leq \rho[\, f\,(\varphi(t), s(t))] + \rho[\, f\,(s(t), y(t))],\;\; \varphi(t) < s(t) < y(t).$$

При этом контролируются и преобразуются в цифровой код временные интервалы между моментами включения образцовой функции $\varphi(t)$ и её пересечением входного сигнала. Очевидно, что скорость изменения $\varphi(t)$ должна превышать максимальную скорость изменения сигнала.

Для описания второго подхода будем исходить из равенства

$$E(t) \;= \rho[\, f\,(E(t), y(t))] + C, \tag{3}$$

где $E(t)$ – физическая величина, определяющая состояние некоторой исходной физической системы, в дальнейшем определим её как уравновешивающую величину, причём для определённости $E(t) \in [0, E_0]$, $0 < E_0 < \infty$; $y(t)$ – функция, описывающая состояние другой системы, с которой взаимодействует исходная (или состояние окружающей среды), представленная в дальнейшем в виде постоянного сигнала, $y \in [0, E_0]$; $\rho\,[\, f\,(E(t), y(t))]$ – по-прежнему функция меры.

Различие двух указанных подходов связано с отсутствием или наличием учёта в соответствующей математической модели и в описываемой ею системе обратной связи, причём речь, естественно, идёт о наличии в (3) отрицательной обратной связи.

Так же как и функция $\varphi(t)$, уравновешивающая величина $E(t)$ представляет собой соответствующим образом сформированную физическую величину, единицы измерения которой совпадают с единицами измерения сигнала. Оба уравнения (2) и (3) показывают на принципиальную возможность сведения правых частей уравнений к определённому значению заданной образцовой функции или уравновешивающей величины, зависящему от сигнала, но не указывают последовательность действий или алгоритм достижения соответствующего равенства. Для вывода из (2) и (3) алгоритмов, позволяющих установить последовательность действий, приводящую к определённому результату, т. е. к выражению сигнала через соответствующие величины, представленные в искомых единицах измерения, требуется выполнение дополнительных условий. В первую очередь необходимо учесть тот факт, что операция измерения представляет собой динамический процесс, который в общем случае может быть описан дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}=\frac{\partial\rho\,[\,f\,(y(t),\,g\,(t))\,]}{\partial f\,(y(t),\,g\,(t))}\frac{\partial f\,(y(t),\,g\,(t))}{\partial t}, \tag{4}$$

где $\varphi\ (t) = K(t)$ и $g(t) = \varphi(t)$ для равенства (2), а для равенства (3) имеем $\varphi\ (t) = g(t) = E(t)$, причём в последнем случае для упрощения установим, что для входного сигнала выполняется равенство $y(t) = y = \text{const}$.

Как правило, в биотехнических системах при выполнении измерительных операций электрофизиологических сигналов сравнение осуществляется на основе преобразования $f\,(y\,(t), g(t)) = y(t) - g(t)$. Поэтому для дифференциала этого преобразования получаем $\partial f\,(y\,(t), g(t))) = \partial(y(t) - g(t))$, и второй множитель в (4) соответствует скорости изменения функций $g(t)$ и $y(t)$. Следовательно, из (4) непосредственно следует дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}-\mu(t)\frac{\partial\rho\,[\,f\,(y(t),g\,(t))\,]}{\partial f\,(y(t),g\,(t))}=0, \tag{5}$$

где $\mu(t) = \partial f(y(t); g(t))/\partial t$ – априорно задаваемая функция, определяющая скорость изменения уравновешивающей величины.

Для установления связи между выражениями (1)–(5) и аналого-цифровыми измерительными алгоритмами выполним соответствующую интерпретацию входящих в эти выражения параметров и преобразований (функций). Прежде всего, отметим, что потенциальная функция в уравнении (1) в расширенной трактовке описывает взаимодействие двух тел (объектов, процессов, полей и т. п.). Это взаимодействие можно описать преобразованием со свойствами функции меры, которая характеризует в том или ином смысле расстояние между указанными объектами. Операция измерения, как это следует из самой сути задачи измерения, направлена на установление соответствия известной образцовой и неизвестной, т. е. измеряемой, физических величин за счёт минимизации их отклонения (в идеале – сведения этого отклонения к нулю). Индикаторами отклонения в данном случае служат значения функции сравнения, которую можно определить по равномерной мере отклонения на основе оператора дифференцирования. В этом суть отличия уравнения (1) от уравнения (5), так как для математического описания процесса измерения необходимо заменить потенциальную функцию, используемую в механике, соответствующей функцией меры. При данной замене должна выбираться только такая функция меры, производная от которой выполняет операцию сравнения двух величин. Для применения уравнения (5) при синтезе алгоритма измерения необходимо установить связь между динамикой уравновешивающей величины и исходной измеряемой величиной по результатам их сравнения между собой в дискретные моменты времени. При этом функция сравнения указанных величин даёт информацию в виде отношений «больше», «меньше» или «равно» и тем самым упорядочивает изменение уравновешивающей величины в соответствии со значениями сигнала. Чаще всего отношение эквивалентности объединяют с отношением «больше» или «меньше». В соответствии с приведённым отношением операция сравнения математически описывается в идеальном случае известными функциями: знаковой или индикаторной [12]. Поэтому с учётом (4) для равномерной меры получаем

$$\frac{\partial\left|y-E(t)\right|}{\partial f\left[y,\, E(t)\right]}\frac{\partial\left[y-E(t)\right]}{\partial E(t)}\frac{\partial E(t)}{\partial t}=-\mathrm{sign}\left[y-E(t)\right]\frac{\partial E(t)}{\partial t},$$

так как функция

$$\mathrm{sign}(x)=\frac{\partial|x|}{\partial x}=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

фиксирует соответствующие отношения в виде числового признака.

На воздействии помехи целесообразно перейти к усложненной, мажоритарной функции сравнения, когда указанные отношения устанавливаются по большинству реализуемых событий того или иного отношения [4]. Помеха возникает по разным причинам, но при теоретическом анализе её результирующее значение суммируется либо с сигналом, либо с уравновешивающей величиной. В этом случае мажоритарную функцию сравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial\rho\left[y,E(t)+\xi(t)\right]}{\partial E(t)}=F\left\{\mathrm{sign}\left\{f\left[y,E(t)+\xi(t)\right]\right\}\right\}=\mathrm{sign}\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sign}\left\{f\left[y,E(t)+\xi(t)\right]\right\}\right\},$$

где m – число операций сравнения, выполняемых либо параллельно, т. е. для фиксированного времени t, либо последовательно, но уже на некотором конечном временном интервале; $\xi(t)$ – результирующая помеха.

Отметим, что знаковая функция сравнения описывает идеальный вариант выполнения функции сравнения, так как она имеет убывающий на бесконечности модуль спектральной плотности, поэтому её реализация техническими средствами невозможна [4]. Для описания функции сравнения в реальных биотехнических системах можно, например, применять с достаточной достоверностью используемые в искусственных нейронах функции активации [13]. В этом случае влияние помехи на результат сравнения носит другой характер по сравнению с её влиянием на идеальную функцию сравнения [4]. Переход к алгоритму, адекватно описывающему реальные аналого-цифровые системы, требует отдельного исследования и более подробно рассмотрен применительно к аналого-цифровым преобразователям (АЦП) в [4]. Но в любом случае в основу всех этих алгоритмов положены соответствующие идеальные алгоритмы.

В случае применения индикаторной функции сравнения, т. е. функции вида

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

нетрудно установить, что

$$F\{\mathrm{sign}\{f[y,\, E(t)]\}\}=\mathrm{sign}\{1+\mathrm{sign}\{f[y,\, E(t)]\}\},$$

если

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Для того чтобы от формальных исходных представлений (1)–(5) перейти к синтезу интересующих нас алгоритмов аналого-цифрового преобразования, необходимо учесть следующие положения:

– по существу любые цифровые представления результатов того или иного эксперимента имеют дискретно-квантовую природу с дискретизацией во времени и квантованием по уровню;

– любой переход от непрерывного пространства к дискретно-квантовому пространству описания связан с определённой потерей информации об исходном (измеряемом), аналоговом сигнале (величине);

– следствием неизбежности потери информации является необходимость поиска рационального перехода к аппроксимации исходной измеряемой величины с контролируемой погрешностью.

Новизной развиваемой теории, по мнению автора, является не только сам установленный факт связи между фундаментальными законами физики и методами синтеза измерительных алгоритмов, а и в иллюстрации применения этих методов для синтеза разнообразных аналого-цифровых измерительных алгоритмов, включая, в перспективе, и адаптивные алгоритмы.

Синтез идеальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Для синтеза алгоритмов аналого-цифрового преобразования на основе (5) необходимо, прежде всего, перейти от непрерывного пространства, в котором действуют уравнения (1), (4), (5), к дискретно-квантовому пространству через дискретизацию по времени и квантовому представлению сигнала по уровню или значению. Рассмотрим возможность перехода к дискретному представлению (1) последовательно во времени. Необходимость такого перехода лежит в основе любых измерений, даже при использовании стрелочных приборов, поскольку снятие показаний результатов измерения осуществляется в дискретные моменты времени. Процесс перехода к дискретному представлению сигнала во времени осуществляется применением кусочно-ступенчатой интерполяции подынтегральной функции при интегрировании в текущий момент времени $t = n\Delta t$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ правой и левой части уравнений (1), (4), (5) на установленном интервале дискретизации Δt (такте итерации). При этом, перемножая в уравнении (1) её правую и левую часть на множитель ∂t и применяя операцию интегрирования, приходим к следующему уравнению – так называемому уравнению баланса для (1)

$$\int\limits_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \partial x(t) = \int\limits_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \frac{\partial U\left(x(t),\mu\right)}{\partial x(t)}\partial t \qquad (6)$$

или, фиксируя в подынтегральной функции время $t = n\Delta t$, получаем следующий итерационный алгоритм:

$$x[(n+1)\Delta t] = x(n\Delta t) + Q(x(n\Delta t), \mu),$$

где $Q(x(t), \mu) = \frac{\partial U(x(t), \mu)}{\partial x(t)}$ – в механике соответствует потенциальной силе, воздействующей на материальную точку; Δt – априорно установленный временной интервал дискретизации, в течении которого осуществляется единичный акт воздействия потенциальной силы на материальную точку.

Для уравнения (5) получаем уравнение баланса (помеха $\xi(t) = 0$) в виде

$$\int\limits_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \partial E(t) = \int\limits_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mu(t)\, F^*\left\{\text{sign}\left\{ f\left[y,\ E(t)\right]\right\}\right\}\partial t. \tag{7}$$

Из уравнения баланса (7) также нетрудно перейти к искомому итерационному алгоритму через соответствующую интерполяцию при выполнении интегрирования правой части. Интерполяция, применительно, например, к уравнению (7), осуществляется при кусочно-ступенчатом восстановлении подынтегральной функции на априорно установленном временном интервале дискретизации Δt, которая позволяет при интегрировании перейти к результату

$$E\left[(n+1)\Delta t\right] - E(n\Delta t) = F^*\left\{\text{sign}\left\{ f\left[y, E(n\Delta t)\right]\right\}\right\} \int\limits_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \partial t, \tag{8}$$

где $F^*\{\text{sign}\{f[y(t), E(t)]\}\} = \mu(n\Delta t)\, F\{\text{sign}\{f[y(n\Delta t), E(n\Delta t)]\}\}$; $\mu(n\Delta t)$ – при фиксированном значении n скорость изменения уравновешивающей величины.

Уравнение (8) аппроксимирует (7) и определяет в общем виде в итерационной форме последовательный алгоритм аналого-цифрового преобразования, а следовательно, и цифрового измерения, в виде

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \mu(n\Delta t)\Delta t\, F\{\text{sign}\{f[y(n\Delta t), E(n\Delta t)]\}\}, \tag{9}$$

так как оно предписывает при надлежащем выборе преобразований последовательность действий при $n = 0, 1, 2 \ldots$, которое приводит к искомому результату. Условие сходимости, как это следует непосредственно из анализа алгоритма (9), зависит от скорости изменения уравновешивающей величины. Но именно скорость изменения уравновешивающей величины, умноженная на временной интервал дискретизации, определяет динамику уравновешивающей величины в виде её приращения, которую можно установить априорно с учётом технических требований к реализуемой этот алгоритм системе. Это приращение может быть равно константе μ для всех n или подчинятся любому другому априорно установленному закону изменения в зависимости от изменения n. Однако этот закон должен быть априорно установлен таким, чтобы обеспечить решение задачи измерения.

Таким образом, в результате кусочно-ступенчатой интерполяции подынтегральной функции на временном интервале дискретизации Δt синтезируем в общем виде из (5) алгоритм, из которого при должном выборе соответствующих переменных и преобразования ρ […] получаем семейство известных алгоритмов аналого-цифрового преобразования, включая классический алгоритм поразрядного уравновешивания. При незначительной модификации уравнения (5), не меняющей его основы, можно синтезировать и новые алгоритмы с другими свойствами.

Выполняя аналогичные действия, из (5) с учётом (2) получаем алгоритм для случая выполнения функции аналого-цифрового преобразования без обратной связи в виде

$$K[(n+1)\Delta t] = K(n\Delta t) + \mu(n\Delta t)\Delta t F\{\mathrm{sign}\{f[y(n\Delta t), \varphi(n\Delta t)]\}\}, \qquad (10)$$

причём $h(x) = F\{\mathrm{sign}\{f[y(n\Delta t),\ \varphi(n\Delta t)]\}\}$ и

$$K[(n+1)\Delta t] = \begin{cases} K(n\Delta t) + \mu(n\Delta t)\Delta t h(x),\ x \ge 0,\ n = 0, 1, ..., M-1 \le 2^N, \\ K(M\Delta t),\ x < 0,\ n = M,\ M+1, ..., 2^N \end{cases}$$

– числовой эквивалент, выраженный в двоичном цифровом коде при соответствующем выборе скорости изменения уравновешивающей величины $\mu(n\Delta t)$.

Примеры синтеза и анализа различных модификаций алгоритма аналого-цифрового преобразования. В качестве примера выполним синтез алгоритмов АЦП, которые широко применяются в биотехнических системах. Предварительно рассмотрим алгоритм поразрядного уравновешивания со знаковой функцией сравнения. Для этого априорно сформируем последовательность $v(n)$ для n = 1, 2, …, N в следующем виде

$$v(n) = E_0\, 2^{-(n+1)} \big/ \Delta t.$$

Тогда, при

$$F\{\mathrm{sign}\{f[y, E(t)]\}\} = \mathrm{sign}[y - E(t)]$$

получаем алгоритм аналого-цифрового преобразования со знаковой функцией сравнения

$$E[(n+1)\,\mathrm{D}t] = E(n\mathrm{D}t) + E_0\, 2^{-(n+1)}\mathrm{sign}[y - E(n\mathrm{D}t)],\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots N, \qquad (11)$$

где n = 0, 2, 3 , … , N – 1 и $E(0) = 0$; N – число двоичных разрядов.

В алгоритме (11) остаётся открытым вопрос установления граничных условий и значений входящих в него параметров, включая число уровней квантования. Для ответа на него прежде всего остановимся подробнее на раскрытии физического смысла входящих в алгоритм параметров. На основании данных, полученных при проектировании и исследование реальных аналого-цифровых преобразователей, установлено, что параметр E_0 соответствует диапазону допустимого для выбранного типа АЦП изменения исходного равномерно распределённого аналогового сигнала. При этом выполняется условие $0 \le y(t) \le E_0$ с равномерной плотностью распределения вероятностей $w(y) = 1/E_0$ (предполагается для упрощения анализа, что y = const в течение полного цикла преобразования, т. е. для n = 0, 1, 2, …, N – 1). В этом случае последовательность, которая формируется на каждом такте итерации в виде $E_0\, 2^{-(n+1)}$, n = 0, 1, 2, …, N – 1, определяет дихотомический закон изменения уравновешивающей сигнал y величины $E(n\Delta t)$. При этом на каждом n-м такте уравновешивания погрешность уравновешивания определяется величиной кванта

$$\Delta q(n\Delta t) = E_0 2^{-(n+1)},\quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\ , \qquad (12)$$

который в идеальном случае может быть сколь угодно малым. Ограничения на размер кванта возникают только при условии введения дополнительных переменных в исходное уравнение или же при иной функции сравнения с учётом возможностей её практической реализации. Доказательство сходимости алгоритма (11) не составляет особого труда.

Оценим сходимость модифицированного алгоритма (11) аналого-цифрового преобразования в виде так называемого индикаторного алгоритма

$$E[(n+1)\mathrm{D}t] = E(n\mathrm{D}t) + E02-(n+1)h[y-E(n\mathrm{D}t)-E02-(n+1)], \tag{13}$$

где $n = 0, 2, 3, \ldots, N-1$ и $E(0) = 0$; $a(n)$ – параметр, изменяющийся в соответствии с законом $E02-(n+1); h[y-E(n\mathrm{D}t)- E02-(n+1)]$ – индикаторная функция сравнения, принимающая значения в соответствии с правилом

$$h\left[y-E(n\Delta t)-E_0 2^{-(n+1))}\right]=\begin{cases}1, & y \ge E(n\Delta t)-E_0 2^{-(n+1))},\\ 0, & y < E(n\Delta t)-E_0 2^{-(n+1))}.\end{cases} \tag{14}$$

Удобство использования индикаторной функции сравнения (14) состоит в том, что её применение позволяет представить уравновешивающую величину непосредственно в двоичном коде, принятом в цифровых электронных устройствах, в виде

$$E(n\Delta t) = q(n)\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^{-(i+1)},$$

где 2^n – число априори установленных квантов; $q(n)$ – величина кванта, которая определяется при фиксированных n и E_0 из равенства $q(n) = E_0^{2-n}$; a_i – коэффициент, определяющий i-й двоичный разряд в соответствии с равенством

$$a_i = h[x] = \begin{cases}1, & x \ge 0,\\ 0, & x < 0.\end{cases}$$

Для анализа сходимости алгоритма (13) необходимо задаться начальным условием для уравновешивающей величины $E(n\Delta t)$ и воспользоваться при фиксированном значении сигнала методом прогонки. Этот процесс удобнее выполнить при $\Delta t = 1$ и постоянном сигнале, выраженном в двоичном эквиваленте

$$y(n) = \mathrm{cons} = y = \sum_{i=0}^{n} a_{iy} 2^{-(i+1)} + \gamma(n),$$

где $\gamma(n)$ – погрешность округления с равномерным законом распределения при установленном числе двоичных разрядов, равном n, причём $\gamma(n) = E_0^{2-n}$.

Алгоритм (13) при подстановке в двоичном эквиваленте сигнала (для упрощения записи принято, что $\Delta t = 1$) принимает вид

$$E(n+1) = E(n) + \frac{E_0}{2^{(n+1)}} h\left[\sum_{i=0}^{n} a_{iy} 2^{-(i+1)} - \sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-(i+1)} + \gamma(n) - 2^{-(n+1)}\right]. \tag{15}$$

Поскольку структура уравновешивающей величины для аналого-цифрового преобразования на $n + 1$ и n тактах итерации представляется в виде $E(n+1) = E_0 \sum_{i=0}^{n+1} a_i 2^{-i}$ и $E(n) = E_0 \sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-i}$, то $E[(n+1)] - E(n) = E_0 a_{n+1} 2^{-(n+1)}$ и итерационное уравнение (14) принимает форму

$$a_{n+1} = h\left[\sum_{i=0}^{n} a_{iy} 2^{-(i+1)} - \sum_{i=0}^{n} a_i 2^{-(i+1)} + \gamma(n) - 2^{-(n+1)}\right],\ n = 0, 1, 2 \tag{16}$$

Используя (15), а также подход к анализу сходимости, рассмотренный в [4], можно доказать сходимость алгоритма (16) при выполнении (14) и $n \to \infty$ к любому значению сигнала. При этом выполняется предельное равенство $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = 0$. Таким образом, в идеальном случае ограничений, как это следует из (14), для установления сколь угодно большого числа разрядов n нет.

Заметим, что алгоритм (13) эквивалентен (11) при условии (14), так как $\operatorname{sign}(by) = \operatorname{sign}(y)$ при $b > 0$ и $h(y) = \operatorname{sign}[1 + \operatorname{sign}(y)] = F^*[\operatorname{sign}(y)]$.

Для алгоритма (10) при выборе функции $\varphi(t) = at$, где $a = \text{const}$, получаем, так называемый времяимпульсный алгоритм аналого-цифрового преобразования

$$K[(n+1)\Delta t] = K(n\Delta t) + a\Delta t\, h[an\Delta t - y(n\Delta t)],$$

причём

$$K[(n+1)\Delta t] = \begin{cases} K(n\Delta t) + a\Delta t h(x),\ x \ge 0,\ n = 0, 1, \ldots,\ M - 1 \le 2^N, \\ K(M\Delta t),\ x < 0,\ n = M, M+1, \ldots,\ 2^N. \end{cases}$$

Для удобства обычно устанавливают параметр $a = (\Delta t)^{-1}$, в этом случае результат преобразования, выраженный в двоичном коде, осуществляется подсчётом в двоичном счётчике единичного выхода сравнивающего устройства. В общем случае параметр a, прежде всего, зависит от технических характеристик сравнивающего устройства.

В [4] рассмотрены различные алгоритмы аналого-цифрового преобразования, которые вытекают из дифференциального уравнения (2) при соответствующем выборе функции меры. Например, алгоритм (11) при выполнении в (11) $E_0 2^{-(n+1)} = \text{const} = \Delta q$ преобразуется в следящий алгоритм аналого-цифрового преобразования, а при замене знаковой функции сравнения на индикаторную – в алгоритм прямого счёта.

Аттракторы в алгоритмах аналого-цифрового преобразования. Используя терминологию нелинейной динамики [9], [10], можно сказать, что асимптотически алгоритмы (11) и (13) имеют аттракторы в виде неподвижной точки, совпадающей со значением входного сигнала. Из теории нелинейной динамики известно, что уравнение (1) в зависимости от потенциальной функции могут иметь различные по форме аттракторы.

Возникает вопрос: можно ли построить алгоритм аналого-цифрового преобразования, используя итерационный алгоритм с аттрактором, не стягивающимся к точке? Если можно, то как при этом используется подобный аттрактор для аналого-цифрового преобразования и к какому положительному результату он приводит? Данный вопрос по своей сути содержит очень любопытный факт, так как затрагивает актуальную для технических приложений проблему, связанную с получением точных результатов из размытости (неопределённости) самого подхода к их получению. Этот принцип положен в основу функционирования так называемого сигма-дельта-АЦП (ΣΔ-АЦП), различные модификации схем которого представлены в [3], и актуален фактически для всех случаев практической реализации алгоритмов из-за неизбежного присутствия различного рода помех. Заметим, что рассматриваемый подход к выводу алгоритмов аналого-цифрового преобразования позволяет учитывать за счёт соответствующей модификации исходного дифференциального уравнения (2) различных факторов, влияющих на процесс аналого-цифрового преобразования, включая шумы устройства, реализующего функцию сравнения [4]. Поэтому для выяснения вопроса, связанного с возможностью получения, по данным фирм-производителей, очень высокой разрядности выходного двоичного кода (до 24 разрядов), представляют интерес теоретический вывод и анализ алгоритма функционирования ΣΔ-АЦП. В публикациях, включая публикации фирм-производителей данных АЦП, например «Analog Devices», даются только технические сведения [3] без надлежащего теоретического анализа.

Как показано в [4], алгоритм функционирования одноконтурного, наиболее распространённого ΣΔ-АЦП с модулятором первого порядка имеет адекватное описание в виде следующего нелинейного отображения:

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \int_0^{\Delta t} \{y + E_0 \operatorname{sign}[y - E(n\Delta t)]\}\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N. \qquad (17)$$

Выполняя в (17) интегрирование, получаем

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \alpha\{E_0 \operatorname{sign}[y - E(n\Delta t)] + y\} \qquad (18)$$

или

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \beta\{\operatorname{sign}[y - E(n\Delta t)] + \lambda\}, \qquad (19)$$

где $\alpha = \int_0^{\Delta t} dt = \Delta t = \dfrac{1}{f_t}$ – величина шага итерации; f_t – период следования и частота тактовой частоты генератора управления, входящего в состав схемы ΣΔ-АЦП (Δt без потери общности принят равным 1); $E[(n+1)\Delta t]$ и $E(n\Delta t)$ – значения уравновешивающей физической величины, например напряжения на $(n+1)$-м и n-м тактах итерации, которые накапливаются на интеграторе, входящем в схему ΣΔ-АЦП; y – значение аналогового сигнала, причём $0 \le y \le E_0$; $\beta = \alpha E_0$ для $0 \le \lambda \le 1$, так как $\lambda = y/E_0$.

С учётом известного равенства, связывающего индикаторную и знаковую функции, получаем следующее эквивалентное отображение алгоритма работы ΣΔ-АЦП:

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \beta\{h[y - E(n\Delta t)] + \chi\}, \tag{20}$$

где $\chi = 0{,}5(\lambda - 1)$.

Результат аналого-цифрового преобразования обычно получают после цифровой фильтрации последовательности значений знаковой или индикаторной функции. Алгоритмы (17)–(20) в соответствии с принятой терминологией относятся к нелинейным итерационным уравнениям или отображениям [9], [10]. Следовательно, с технической точки зрения заданные в явном виде отображения как раз и определяют закономерности функционирования рассматриваемого устройства или системы. Принадлежность итерационных алгоритмов (17)–(20) к соответствующему классу математических объектов позволяет применить применительно к рассматриваемому случаю исследования терминологию и методы исследования, которые используются в математике в области нелинейной динамики, и проследить определённую преемственность в развитие алгоритмов аналого-цифрового преобразования, а следовательно, различных типов АЦП. Например, отмеченная преемственность просматривается в алгоритмах (11) и (13), а математическое представление (19) алгоритма ΣΔ-АЦП инициирует предварительное рассмотрение известного алгоритма следящего АЦП. Этот алгоритм исследован в [4], в том числе с учётом воздействия помех. При сравнении алгоритмов (19) и следящего алгоритма напрашивается вывод, что возникновение алгоритма ΣΔ-АЦП является продуктом эволюции алгоритма следящего АЦП, поскольку выполняет функцию аналого-цифрового преобразования на другом качественном уровне – на уровне параметрического и временного усреднения с признаками следящего алгоритма аналого-цифрового преобразования и экспоненциального алгоритма усреднения. Особенность и общность всех алгоритмов аналого-цифрового преобразования, обладающих всеми признаками нелинейных отображений, заключается в следующем:

– наличие нелинейной функции сравнения;

– область изменения параметра строго ограничена диапазоном преобразования E_0;

– число итераций, т. е. число операций сравнения, конечно и определяется способом их выполнения и числом установленных разрядов получаемого двоичного числа;

– решение уравнений, описывающих алгоритмы, при заданном числе итераций должно оказаться в некоторой окрестности установленного значения параметра (значения сигнала), т. е. фактически данная окрестность преобразования представляет собой аттрактор [9], [10].

В заключение отметим, что с точки зрения метрологии свойства аттрактора как раз и определяют методическую, а в определённой степени и инструментальную составляющую погрешности аналого-цифрового преобразования. Поэтому очень важно количественно связать свойства алгоритма с некоторыми характеристиками аттрактора, подразумевая при этом, что специфика построения алгоритма аналого-цифрового преобразования предусматривает решённым вопрос его сходимости в заданную окрестность. Подробный анализ различных модификаций алгоритмов АЦП приведён в [4].

Рассмотренный в статье теоретический подход может быть использован не только для синтеза различных аналого-цифровых измерительных алгоритмов, а также и для синтеза адаптивных алгоритмов, перспективных для применения в биотехнических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М. Лекции по атомной механике / пер. с нем. 2-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 312 с.: ил.
2. Гитис Э. И., Пискулов Е. А. Аналого-цифровые преобразователи. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 128 с.: ил.
3. Аналого-цифровое преобразование / под ред. У. Кестера; пер с англ. – М.: Техносфера, 2007. – 1016 с.: ил.
4. Тихонов Э. П. Вероятностно-итерационные методы, алгоритмы и структуры аналого-цифровых средств измерения. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010. – 288 с.: ил.
5. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. – М.: Сов. радио, 1977. – 288 с.: ил.
6. Цветков Э. И. Основы математической метрологии. – СПб.: Политехника, 2005. – 510 с.: ил.
7. Кулаичев А. П. Компьютерная электрофизиология в клинической и исследовательской практике: В 3 т. Т. 2. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: НПО «Информатика и компьютеры», 1999. – 329 с., ил.
8. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003.
9. Могилевский В. Д. Формализация динамических систем. – М.: Вузовская книга, 1999. – 216 с.: ил.
10. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент. 5-е изд., стереотипное / ЛКИ. – М., 2007. – 312 с.: ил.
11. Павленко Ю. Г. Лекции по теоретической механике. – М.: Физматлит, 2002. – 392 с.: ил.
12. Юдич М. З. Аналоговые сравнивающие устройства. – М.: Машиностроение, 1984. – 96 с.: ил.
13. Нейросетевые системы управления / В. А. Терехов, Д. В. Ефимов, И. Ю. Тюкин, В. Н. Антонов. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1999. – 265 с.: ил.

E. P. Tikhonov

THEORETICAL BASES OF SYNTHESIS OF ANALOG-TO-DIGITAL ALGORITHMS MEASUREMENT AND PROCESSING OF THE INFORMATION IN BIOTECHNICAL SYSTEMS

Developed the theory of synthesis adequate algorithms for functioning analog-to-digitals biotechnical systems. A connection is established of these algorithms with known from theoretical mechanics evolutionary equations. Give specific examples of the application of theory to the synthesis and analysis of the various algorithms of analog-to-digitals converters. Installed role of the attractor for functioning Sigma-Delta analog-to-digital converters.

Theoretical basis, synthesis, analysis, algorithms, analog-to-digital converters

УДК 004.891.3, 616.155.194

О. В. Максимова, Е. Ю. Игушева

ТЕХНОЛОГИИ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ВРАЧОМ-ГЕМАТОЛОГОМ

Рассмтриваются современные технологии разработки систем поддержки принятия решений. Разработана структурная схема системы для врача-гематолога при диагностике опухолевых и редких гематологических заболеваний на основе выбранных технологий, описаны основные компоненты системы.

Система поддержки принятия решений врача-гематолога, технологии автоматизации, база данных, база знаний, диагностика гематологических заболеваний

В настоящее время во всем мире, в том числе и в России, большое внимание уделяется заболеваниям крови. В связи с трудностями диагностики и лечения среди них особо выделяются онкологические и редкие гематологические заболевания. В России по данным коллегии МЗ РФ за 2002 г. летальность от рака стоит на третьем месте после сердечно-сосудистых заболеваний и травмы[1]. Статистические данные по редким заболеваниям в России отсутствуют. Но по оценкам экспертов насчитывается около 7…8 млн пациентов,

[1] Астафуров В. Н. Клиническая онкология: метод. пособие. 2003. URL: http://www.onco-manual.narod.ru/.