УДК 519. 213

М. Т. Рзиева

ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ЗАДАННОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ СМЕЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Рассматривается двумерное распределение вероятности случайной последовательности с заданной корреляцией смежных значений. Рассмотрены пять законов распределения вероятности случайной последовательности, широко применяемых в метрологическом анализе.

Случайная последовательность, корреляция смежных значений, нормальный закон распределения, равномерный закон распределения, закон распределения Симпсона, арксинусоидальный закон распределения, закон распределения Релея, двумерное распределение вероятности, гистограмма, глубина корреляции

В настоящее время для метрологического анализа широко используется имитационное моделирование. Составной частью обеспечения метрологического анализа с использованием имитационного моделирования является воспроизведение входных воздействий с известными характеристиками – распределением вероятности и корреляционной функцией.

Разработка математического обеспечения воспроизведения входных воздействий с заданными свойствами является актуальной задачей для метрологического обеспечения современных измерений, в частности для метрологических фирм, которые используют машинный эксперимент для анализа результатов измерительных процедур.

Статья посвящена одной из задач воспроизведения входных воздействий с требуемыми характеристиками – задаче воспроизведения двумерного распределения вероятности случайной последовательности с заданной корреляцией смежных значений.

Описание входных воздействий с требуемыми характеристиками с помощью одномерного распределения вероятности при наличии корреляции не дает полную оценку свойств. В этом случае полное описание можно получить, располагая двумерным распределением вероятности. В частности, к двумерному описанию необходимо прибегнуть в задачах измерения параметров локального сигнала (установление порогового уровня при коррелированных смежных значениях аддитивной помехи), обнаружения локального сигнала, устранения помехи, определения вида помехи и т. п. Двумерное распределение вероятности учитывает корреляционные связи, в отличие от одномерного описания плотности вероятности, которое эти связи не учитывает.

Переход к двумерному описанию случайного процесса приводит к другой проблеме – ограниченным возможностям аналитического представления. Из известных видов законов распределения вероятности аналитическое представление двумерной плотности вероятности сформировано только для нормального.

В монографии [1] анализируются методы, алгоритмы законов распределения случайных процессов, рассматривается решение конкретных задач в программе MathCAD. Здесь корреляционная функция задается при генерировании последовательностей. И не рассматривается двумерное распределение.

В зарубежной литературе [2], [3] рассматриваются похожие задачи, однако не оценивается исходное распределение вероятности случайной величины [2]. В [3] представляется генерирование последовательностей с различными законами распределения, но не рассматривается корреляция таких последовательностей.

Для описания двумерной плотности вероятности широко используется соотношение Байеса:

$$w\ \ x_i, x_{i-1}\ \ = w\ \ x_{i-1}\ \ \times w\ \ x_i / x_{i-1}\ \ .$$

Здесь $w\ \ x_{i-1}, x_i$ – двумерная плотность вероятностей случайных величин x_{i-1} и x_i; $w\ \ x_{i-1}$ – плотность распределения вероятности x_{i-1}; $w\ \ x_i / x_{i-1}$ – условная плотность распределения величины x_i при фиксированном значении x_{i-1}.

Например,

$$w\ \ x_{i-1}\ \ = \frac{1}{\Delta_x},\ \ x_{i-1} \in \left[-\frac{\Delta_x}{2},\ \frac{\Delta_x}{2}\right];$$

$$w\ \ x_i / x_{i-1}\ \ = \frac{1}{\Delta_x},\ \ x_i \in \left[-\frac{\Delta_x}{2} + x_{i-1},\ \frac{\Delta_x}{2} + x_{i-1}\right],$$

где $-\frac{\Delta_x}{2}$ и $\frac{\Delta_x}{2}$ – границы интервала возможных значений случайной величины.

Постановка задачи на основе имитационного моделирования: формируется псевдослучайная последовательность X с заданной корреляцией смежных отсчетов. Пусть $x = \ \ x_i\ {}_{i=1}^{N}$ – последовательность случайных величин x_i с известным одномерным законом распределения: 1) нормальное; 2) равномерное распределение; 3) треугольное; 4) арксинусоидальное; 5) распределение Релея.

Корреляция отсчетов задается следующим образом: $X = \ \ X_i\ {}_{i=1}^{N} = \ \ x_i + cx_{i-1}\ {}_{i=1}^{N}$, где c – глубина корреляции; N – число отсчетов; i – порядковый номер случайной величины. Такое представление случайной последовательности для решения поставленной задачи является универсальным.

Идентифицируется двумерная плотность распределения вероятности $w\ \ X_{i-1}, X_i$ и пары смежных отсчетов.

Получение требуемого распределения $w\ \ X_{i-1}, X_i$ при фиксированных $w\ \ x_i$ и c на аналитической основе затруднительно.

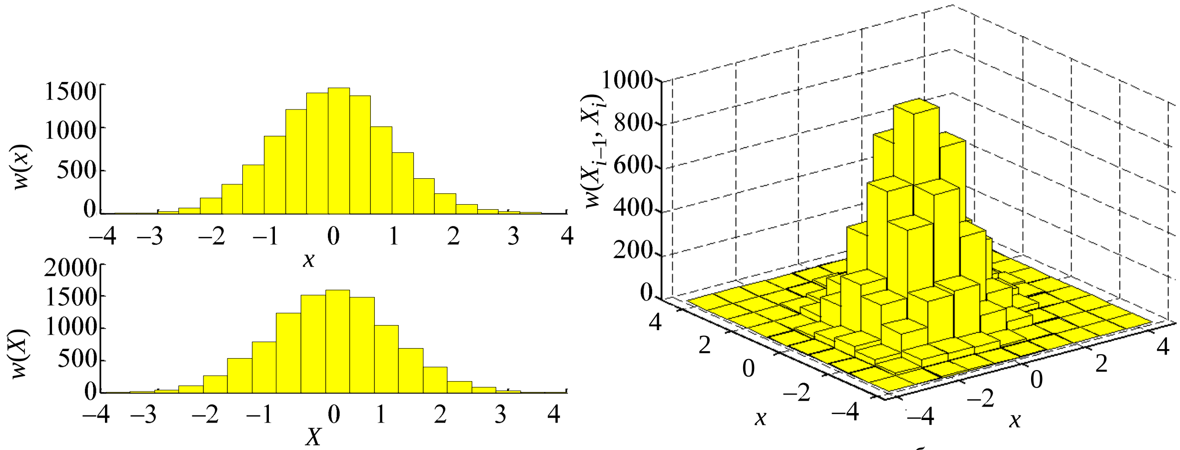
Далее приводятся результаты идентификации $w\ \ X_{i-1}, X_i$ для $N = 10\,000$ и глубины корреляции $c = 0.1$ и $c = 0.3$.

На рис. 1, *а* – 5, *а* представлены гистограммы для $c = 0.1$: соответственно, верхний график – гистограмма плотности распределения $w\ \ x$ последовательности $x_i\ {}_{i=1}^{N}$, нижний график – гистограмма плотности распределения $w\ \ X$ последовательности

$x_i + cx_{i-1}\,{}_{i=1}^{N}$ и двумерная гистограмма плотности распределения $w\ \ X_{i-1}, X_i$ (рис. 1, *б* – 5, *б*) для пяти законов распределения вероятности соответственно.

Представлены табл. 1, 2, показывающие вероятности распределения смежных отсчетов с одномерным нормальным законом распределения $X_{i-1} \in\ \Delta_s, \Delta_{s+1}$, $X_i \in\ \Delta_r, \Delta_{r+1}$, где s, r – соответственно, номера границ интервалов вероятности попадания смежных отсчетов (табл. 1 – вероятность распределения отсчетов при коэффициенте корреляции $c = 0.1$; табл. 2 – при коэффициенте корреляции $c = 0.3$).

Сформированная последовательность $x_i\,{}_{i=1}^{N}$ распределена по нормальному закону (рис. 1).



а *б*

Рис. 1

Таблица 1

X_{i-1}	X_i									
	[–3.790; –3.035)	[–3.035; –2.280)	[–2.280; –1.525)	[–1.525; –0.770)	[–0.770; –0.015)	[–0.015; 0.740)	[0.740; 1.495)	[1.495; 2.250)	[2.250; 3.005)	[3.005; 3.760)
–3.790; –3.035)	0	0	0.0001	0.0003	0.0004	0.0003	0	0	0	0
[–3.035; –2.280)	0.0001	0.0001	0.0009	0.0019	0.0036	0.0027	0.0015	0.0003	0	0
[–2.280; –1.525)	0	0.0010	0.0053	0.0112	0.0160	0.0136	0.0080	0.0013	0.0001	0
[–1.525; –0.770)	0.0002	0.0025	0.0114	0.0288	0.0495	0.0433	0.0232	0.0069	0.0007	0.0001
[–0.770; –0.015)	0.0003	0.0040	0.0146	0.0493	0.0786	0.0791	0.0422	0.0120	0.0024	0
[–0.015; 0.740)	0.0003	0.0021	0.0144	0.0440	0.0766	0.0769	0.0442	0.0130	0.0026	0.0004
[0.740; 1.495)	0.0001	0.0010	0.0068	0.0234	0.0430	0.0430	0.0238	0.0091	0.0014	0.0001
[1.495; 2.250)	0.0001	0.0004	0.0026	0.0063	0.0126	0.0130	0.0072	0.0045	0.0006	0.0001
[2.250; 3.005)	0	0	0.0004	0.0013	0.0022	0.0023	0.0014	0.0002	0.0001	0
[3,005; 3,760)	0	0	0	0,0001	0	0,0003	0,0002	0,0001	0	0

Таблица 2

X_{i-1}	X_i									
	[–4.315; –3.473)	[–3.473; –2.6312)	[–2.6312; –1.7893)	[–1.7893; –0.9474)	[–0.9474; –0.1055)	[–0.1055; 0.7364)	[0.7364; 1.5783)	[1.5783; 2.4202)	[2.4202; 3.2621	[3.2621; 4.104)
[–4.315; –3.473)	0	0	0.0001	0.0002	0.0002	0	0	0	0	0
[–3.473; –2.6312)	0.0002	0.0007	0.0017	0.0034	0.0032	0.0018	0.0005	0	0	0
[–2.6312; –1.7893)	0	0.0019	0.0055	0.0144	0.0160	0.0116	0.0038	0.0003	0	0
[–1.7893; –0.9474)	0.0001	0.0029	0.0150	0.0359	0.0530	0.0441	0.0138	0.0041	0	0
[–0.9474; –0.1055)	0.0001	0.0041	0.0166	0.0538	0.0919	0.0813	0.0381	0.0073	0.0014	0.0001
[–0.1055; 0.7364)	0.0001	0.0013	0.0105	0.0432	0.0842	0.0834	0.0457	0.0124	0.0016	0.0001
[0.7364; 1.5783)	0	0.0005	0.0033	0.0146	0.0376	0.0447	0.0292	0.0105	0.0013	0.0003
[1.5783; 2.4202)	0	0	0.0007	0.0033	0.0078	0.0142	0.0089	0.0056	0.0005	0
[2.4202; 3.2621	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0008	0.0013	0.0016	0.0008	0	0
[3.2621; 4.104)	0	0	0	0	0	0.0001	0.0004	0	0	0.0001

Сформированная псевдослучайная последовательность $x_i \; {}^{N}_{i=1}$ распределена по равномерному закону (рис. 2).

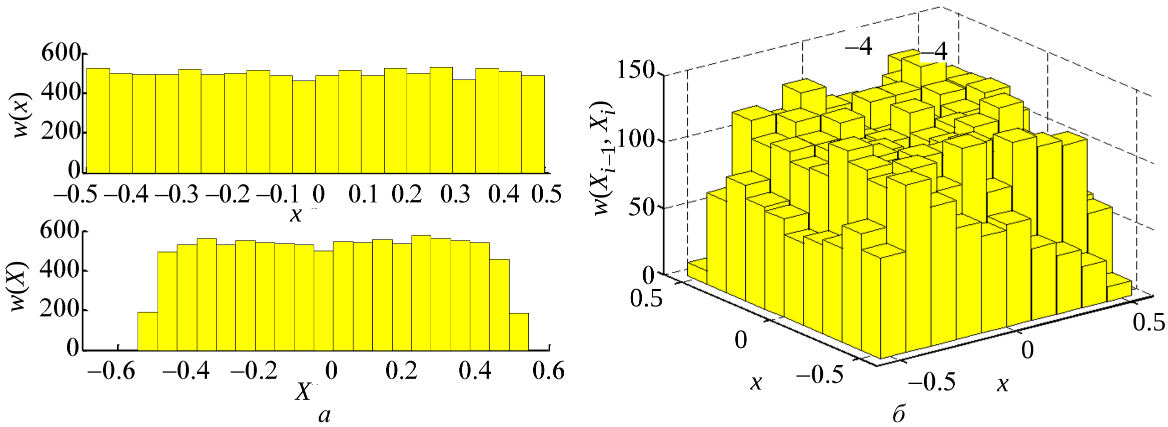


Рис. 2

Сформированная последовательность распределена по треугольному закону (рис 3).

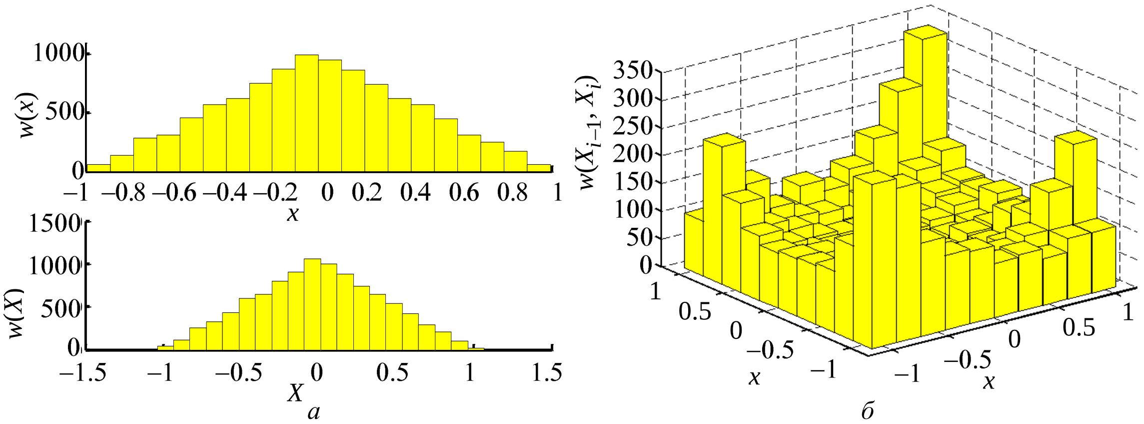
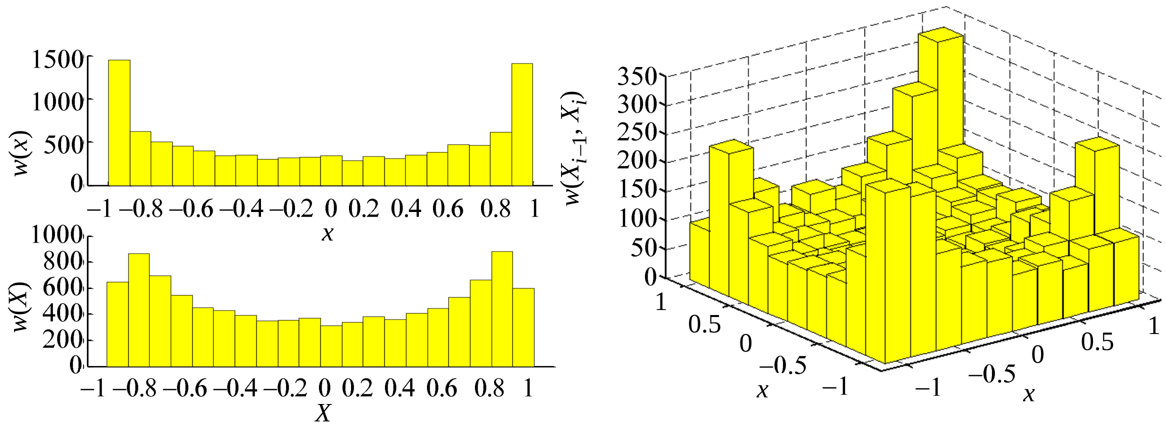


Рис. 3

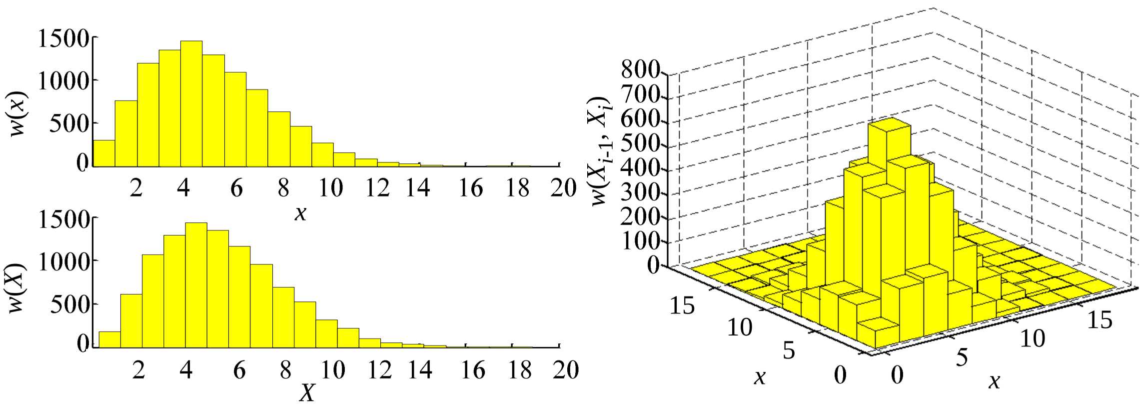
Сформированная последовательность распределена по арксинусоидальному закону (рис. 4).



а *б*

Рис. 4

Сформированная последовательность распределена по закону Релея (рис. 5).



а *б*

Рис. 5

Очевидно, что графическое представление двумерной плотности распределения вероятности позволяет сформировать лишь качественную оценку свойств случайной последовательности с коррелированными смежными значениями.

Количественный анализ характеристик свойств подобной последовательности может быть выполнен на основе табличного представления двумерной плотности вероятности (см. табл. 1, 2, на которых представлены таблицы двумерных гистограмм ($X_{i-1} \in \Delta_s, \Delta_{s+1}$, $X_i \in \Delta_r, \Delta_{r+1}$)), установленных с помощью машинного эксперимента.

Поскольку данные таблицы получены на основе сформированной последовательности $X_i\ {}_{i=1}^{N}$, представляется целесообразным решать необходимые задачи непосредственно с использованием этих отсчетов без формирования табличных данных, выступающих в роли промежуточных. Например, при определении вероятности пропуска локального сигнала воспроизводится необходимое число раз входное воздействие, имитирующее совокупность локального сигнала и аддитивной помехи, и устанавливается частость (оценка требуемой вероятности) данного события.

Из изложенного следует, что именно воспроизведение входных воздействий в виде последовательности $X_i \,{}_{i=1}^{N}$ с требуемыми свойствами составляет необходимую основу для получения количественных оценок, являющихся целью метрологического анализа.

Вместе с тем, графическое или табличное представление двумерной плотности вероятности способствует правильной интерпретации как свойств формируемых последовательностей, так и получаемых с их помощью результатов метрологического анализа, выполняемого с использованием имитационного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров С. А. Прикладной анализ случайных процессов. Самара: СНЦ РАН, 2007. 582 с.
2. Devroye. L. Algorithms for generating discrete random variables with a given generating function or a given moment sequence // SIAM J. on Scientific and Statistical Computing. Philadelphia, SIAM. Iss. 1. Jan. 1991. Vol. 12. P. 107–126.
3. Saucier R. Computer generation of statistical distributions/ army research laboratory. Stroming Media, 2000. P. 105.

M. T. Rzieva

THE TWO-DIMENSIONAL PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM SEQUENCE WITH A GIVEN CORRELATION BETWEEN ADJACENT VALUES

This article examines the two-dimensional probability distribution of random sequence with a given correlation between adjacent values.There are five random sequence probability distribution rules to be considered. All of them are widely used in the metrological analysis.

Random sequence, correlation of adjacent values, normal distribution, uniform distribution, Simpson's rule, arksinusoidalny distribution, Rayleigh distribution, two-dimensional probability distribution, histogram, the depth of correlation

УДК 551.465

Буй Чыонг Занг

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ПОМЕХ В РАЙОНЕ ЗАЛИВА БАКБО

Рассмотрена помеховая обстановка в районе залива Бакбо. Выбрана модель описания помех и на ее основе произведена количественная оценка уровня помех на входе акустической антенны для различных сезонов года.

Залив Бакбо, моделирование, гидроакустические помехи, динамические шумы, шумы судоходства, гидроакустическая система, акустическое поле

Анализ источников подводных шумов залива Бакбо. Модель описания помех. Собственные шумы моря являются важным акустическим параметром среды, определяющим воздействие помех среды на антенны гидроакустических средств. Как известно [1]–[4], основными источниками таких шумов являются:

– приливы и гидростатические явления, связанные с волнением на поверхности моря;
– сейсмические процессы;
– океаническая турбулентность;
– судоходство;
– шумы биологического происхождения;
– волны на морской поверхности;
– тепловой шум.