

V. V. Alekseev, E. Yu. Zakemovskaya  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## STATIONARY DISCRETE WAVELET-TRANSFORMATION. APPLICATION QUESTIONS IN FILTRATION PROBLEMS

*In article the basic merits and demerits of stationary discrete wavelet-transformation (SDWT) are defined. The impossibility of a complete recovery of a signal concerns the basic lacks SDWT the interpolated filters, and also increase in time uncertainty of the filter (distortions in a pass-band) with growth of level of decomposition. The algorithm of the modified stationary discrete wavelet-transformation reducing specified lacks is offered.*

**Wavelet-filter, filtration error, depth of decomposition**

---

УДК 53.08; 004.94

В. В. Алексеев, В. С. Коновалова, И. В. Калякин  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Реализация дискретного вейвлет-преобразования в реальном времени

*Рассматривается возможность реализации алгоритмов вейвлет-разложения (фильтрации) и восстановления (аппроксимации) локального сигнала в реальном времени методом скользящего дискретного вейвлет-преобразования. Определены необходимые объемы вычислительных операций для различных реализаций алгоритма анализа на примере дискретного вейвлет-преобразования Добеши 14. Показано, что каскадный алгоритм скользящего вейвлет-анализа имеет минимальные вычислительные затраты и, следовательно, обеспечивает наиболее высокий частотный диапазон анализа характеристик локального сигнала.*

**Дискретное вейвлет-преобразование, объемы вычисленных операций, характеристики локального сигнала, каскадный алгоритм, частотный анализ**

**Постановка задачи.** Во многих современных электромеханических агрегатах [1], энергоемких производствах [2], транспортных системах [3] и другом в качестве индикаторов наступления предаварийной и аварийной ситуаций может быть использовано появление локального сигнала (ЛС) на фоне нормального значения информативного технологического параметра, связанного с возникновением аномального явления, предшествующего аварии. Наиболее распространенные локальные сигналы в системах данного класса могут быть описаны функциями вида затухающий синус, прямоугольный или колоколообразный импульс [4]. В указанных публикациях показано, что для обнаружения и измерения параметров ЛС такого вида достаточно эффективно может быть использован алгоритм дискретного вейвлет-преобразования (ДВП).

**Реализация алгоритма ДВП предполагает выполнение двух этапов:**

1. Вейвлет-разложение по уровням измеряемого сигнала – разложение на частотные составляющие измеряемого ЛС, который обеспечивает возможность его обнаружения и определение его частотных свойств.

2. Вейвлет-восстановление обеспечивает возможность фильтрации (удаление высокочастотной и низкочастотных составляющих из измеряемого сигнала) – выделения ЛС и измерение его параметров (амплитуду, ширину, место нахождения во времени или пространстве).

**Алгоритм ДВП.** Рассмотрим реализацию алгоритма для следующих условий:

1. На входе измерительного канала находится измеряемый сигнал, который может быть представлен в виде матрицы-строки  $Z = |z_0, z_1, z_2, \dots, z_N|$ .

2. Базисные функции ДВП-разложения – матрицы-строки аппроксимирующих  $V = |v_0, v_1, v_2, \dots, v_v|$  и детализирующих  $D = |d_0, d_1, d_2, \dots, d_v|$  коэффициентов, где  $v$  – количество коэффициентов базисной функции.

3. Базисные функции ДВП-восстановления – матрицы-строки аппроксимирующих  $V'$  и детализирующих  $D'$  коэффициентов соответственно.

4. Операторы свертки матрицы-строки  $Z$  с матрицами-строками базисных функций  $\Psi\{Z, V\} = L_1$  и  $\varphi\{Z, D\} = H_1$ .

Процедура вейвлет-разложения текущей выборки может быть представлена как

$$W\{Z_l\} = \begin{Bmatrix} L_1, H_1 \\ L_2, H_2 \\ \dots \\ L_r, H_r \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где  $r$  – число уровней разложения.

В [5] введено понятие образующей частоты, которая совпадает для математических моделей понятия ЛС и видов базисных функций ДВП Добеши. В [6] предложена методика определения шага дискретизации измеряемого сигнала  $\Delta t$  для обеспечения заданной вероятности его обнаружения с помощью ДВП Добеши в условиях аддитивной помехи различного уровня. Показано, что для требуемой надежности обнаружения ЛС на частотах, соответствующих второму, третьему или четвертому уровню разложения, необходимо выбрать соответствующий шаг дискретизации  $\Delta t_{ЛС}$ . Шаг дискретизации определяется, исходя из анализа априорных данных. Выбор первых уровней разложения обеспечивает надежную фильтрацию и надежное обнаружение ЛС с минимальными вычислительными затратами. Это важно при реализации структуры измерительного канала (ИК), обеспечивающего обнаружение и измерение параметров ЛС в реальном времени.

**Оценка трудоемкости реализации ДВП.**

Алгоритм обнаружения и измерения параметров ЛС, реализованный классическим способом – по примыкающим отрезкам реализации, требует следующих затрат.

Разложение ЛС осуществляется в соответствии с (1). Как показано в [3], для  $r$ -уровневой разложения количество необходимых операций умножения и сложения (ОУС) при длине выборки  $N$  для получения детализирующих и аппроксимирующих коэффициентов равно

$$O_r = 2v \times$$

$$\times \left( \dots \left( \left( \left( (N-v)/2+1 \right)_1 - v \right) / 2+1 \right)_2 \dots - v \right) / 2+1 \right)_r .$$

Анализ показал, что погрешность от краевых эффектов может быть алгоритмически сведена к минимальному значению с помощью перекрывающихся окон [7]. В этом случае требуемый объем выборки может быть значительно уменьшен. При этом объем вычислений будет значительно меньше  $O_{rP} = 2 \times 14(41 + 21 + 12 + 7) = 2268$  ОУС.

Приведенные результаты оценки трудоемкости реализации прямого (1) и обратного ДВП указывают на относительно большой объем вычислений, которые должен обеспечить контроллер ИК диагностической ЛИВС. Большие объемы вычислений снижают возможность анализа ЛС в реальном времени.

**Алгоритм обнаружения и измерения параметров ЛС с помощью скользящего ДВП.** С целью минимизации вычислительных затрат процессора ИК разработан алгоритм скользящего ДВП [7]–[9], который распределяет вычислительную нагрузку на блоки ИК. При этом метрологические характеристики вейвлет-анализа такие, как у классического алгоритма.

Рассмотрим структуру ИК, реализующего вейвлет-анализ и алгоритм скользящего вейвлет-преобразования (рис. 1).

Алгоритм направлен на реализацию вейвлет-анализа (разложение – вейвлет-фильтрация и вос-

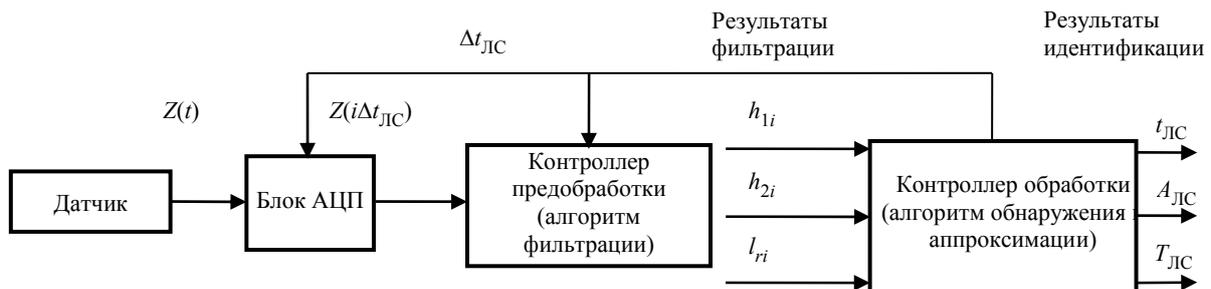


Рис. 1

становление – вейвлет-аппроксимация) в реальном времени, т. е. вычислительные операции должны выполняться по мере поступления данных. Для этого необходимо определить способ реализации алгоритма и требуемые объемы вычислений.

**Оценка объемов вычислений.** Основные объемы вычислений при реализации скользящего ДВП связаны с вычислениями детализирующих и аппроксимирующих коэффициентов разложения (1) и значений аппроксимирующих функций восстановления ЛС. Рассмотрим эти вопросы.

Текущее значение детализирующего коэффициента определяется как свертка текущих значений измеряемого сигнала (на первом уровне) или аппроксимирующих коэффициентов соответствующих уровней  $h_{ki} = \varphi\{Z_i(t_k), D\}$ , где  $k$  – уровень вейвлет-разложения;  $\Delta t_k = 2^k \Delta t_{ЛС}$  – шаг дискретизации на  $k$ -м уровне;  $i \Delta t_{ЛС}$  – значение текущего времени.

Аналогично определяется текущее значение аппроксимирующего коэффициента  $l_{ki} = \Psi\{Z_i(t_k), V\}$ . Максимальное количество ОУС при вычислении всех детализирующих и аппроксимирующих коэффициентов до  $r$ -го уровня в интервале времени  $2 \Delta t_{ЛС}$  (скользящий алгоритм с прореживанием) приведено в табл. 1.

Таблица 1

При разложении	При восстановлении	Дополнительно операций сложения
$O_{rp} = 2vr$	$O_{rv} = 4v \sum_{k=1}^r 2^k$	$O_{rcл} = v \sum_{k=1}^r 2^{r-k+1}$

Полученные значения объемов вычислений являются основным требованием при выборе контроллеров ИК. Очевидно, скользящий алгоритм требует значительно меньших объемов вычислений, что позволяет увеличить частоту анализируемых АС. Рассмотрим количество совершаемых операций в секунду современными контроллерами (табл. 2).

Таблица 2

Контроллер	ОУС	Сложение
WAGO 750-814 (16-bit CPU)	353	363
Atmega328 (8-bit CPU)	42 тыс	64 тыс
ARM Cortex (32-bit CPU)	11 тыс	7 тыс
Intel Core i5 (64-bit CPU)	211 млн	210 млн

Проведенный анализ позволяет оценить затраты на выполнение процедур разложения измерительного сигнала на частотно-временные составляющие и идентификации аномальных сигналов (явлений) с целью выбора контроллера с соответствующей производительностью, оценить возможность организации анализа в реальном времени.

Основываясь на оценочных данных о производительности (табл. 2), промышленные контроллеры линейки WAGO 750 имеют наименьшее быстродействие по отношению к другим контроллерам и могут обеспечить достаточное количество ОУС только для реализации каскадного алгоритма разложения (~140 ОУС), тогда как обратное восстановление представляется затруднительным.

**Анализ характеристик ЛС в определенном диапазоне частот.** При измерении характеристик ЛС в заданном частотном диапазоне восстановление осуществляется по коэффициентам расчетного уровня разложения [3], [5], как правило, это старший уровень разложения:

$$W^{-1}\{W\{Z_l\}\} = W^{-1} \begin{Bmatrix} L_r, H_r \\ 0, 0 \\ \dots \\ 0, 0 \end{Bmatrix} = Z^* .$$

При этом объем вычислений ОУС сокращается на  $O_{rv-} = -v(r - 1)$  при разложении ЛС, и на

$$O_{rv-} = -v \sum_{k=1}^{r-1} 2^k \text{ при восстановлении.}$$

В данном случае максимальная образующая частота ЛС может быть определена как  $f_{ЛС} = 2/T_{КП}$ , где  $T_{КП}$  – время, необходимое контроллеру предобработки для вычисления коэффициентов разложения скользящего ДВП.

**Анализ ЛС в широком диапазоне частот. Каскадный алгоритм.** На практике достаточно часто встречается ситуация, когда контролируемый ЛС может иметь образующую частоту в широком диапазоне. Например, в случае контроля дефектов железнодорожного полотна [3] необходимо обеспечить вейвлет-анализ до девятого уровня. При этом объемы вычислений будут при  $v = 14$ ,  $r = 9$  соответственно: разложение  $O_{rp} = 2vr = 252$  ОУС, восстановление  $O_{rv} = 28616$  ОУС и  $O_{rvс} = 14308$  операций сложения при использовании всех уровней при разложении и восстановлении. В случае использования только старшего уровня при восстановлении объемы вычислений уменьшатся на  $O_{rp} = 112$  и  $O_{rv} = 7140$ , т. е. объемы вычислений сократятся до 140 ОУС при разложении и до 21476 ОУС при восстановлении.

Очевидно, что для реализации вейвлет-анализа требуются достаточно большие объемы вычислений, что значительно снижает частотный диапазон анализа при реализации его в реальном времени.

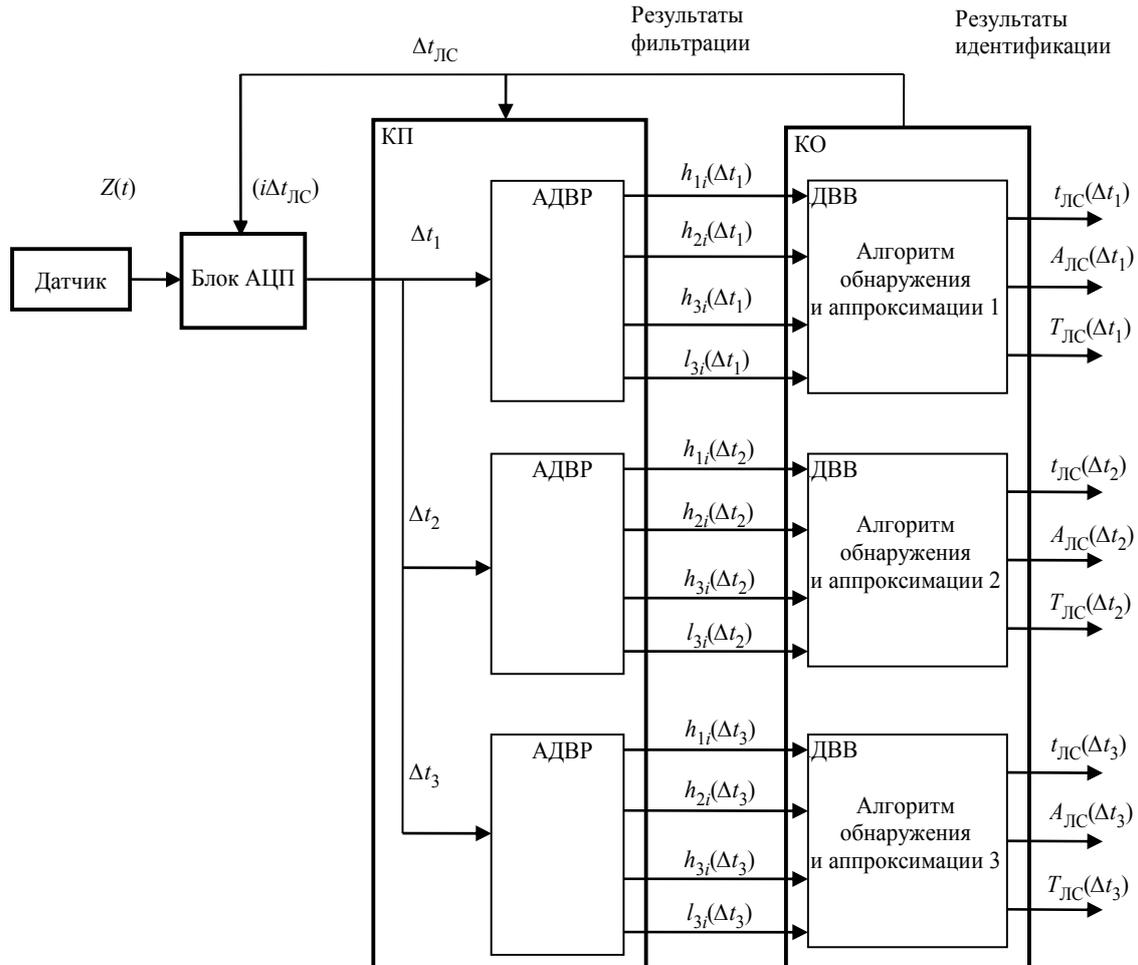


Рис. 2

Рассмотрим вариант реализации вейвлет-анализа в случае выбора требуемого шага дискретизации для различных частот. Так, при необходимости реализации девяти уровней вейвлет-анализа, разобьем весь диапазон анализа на три соответственно: 1–3-й уровни разложения, 4–6-й уровни разложения, 7–9-й уровни разложения. Зададим для указанных уровней соответствующие шаги дискретизации:  $\Delta t_1 = \Delta t_{\text{ЛС}}$ ,  $\Delta t_2 = 2^3 \Delta t_{\text{ЛС}}$ ,  $\Delta t_3 = 2^6 \Delta t_{\text{ЛС}}$ .

На рис. 2 показан пример каскадной реализации ДВП.

В данном случае вейвлет-анализ в каждом диапазоне имеет три уровня разложения, соответствует  $v = 14$ ,  $r = 3$ . Следовательно, объемы вычислений для одного диапазона будут равны:  $O_{\text{rp}} = 2vr = 84$  ОУС,  $O_{\text{рв}} = 392$  ОУС и  $O_{\text{рвс}} = 169$  и в случае использования только старшего уровня при восстановлении  $O_{\text{rp}} = 28$  ОУС и  $O_{\text{рв}} = 84$  ОУС, т. е. объемы вычислений сократятся до 56 ОУС при разложении и 308 ОУС при восстановлении.

Для трех диапазонов объемы увеличиваются в 3 раза: 168 ОУС при разложении и 924 ОУС при

восстановлении. При этом процедуры разложения требуют незначительно большего числа операций, а восстановления в 22 раза меньше. Таким образом, работа ИК с применением каскадного алгоритма может обеспечить работу в большем диапазоне.

Если учесть, что алгоритм дискретного вейвлет-восстановления (АДВВ) выполняется только в случае обнаружения ЛС (рис. 2), эффективность рассмотренной структуры ИК становится очевидной.

Рассмотрены несколько вариантов реализации алгоритмов вейвлет-анализа ЛС в реальном времени. Показано, что метод скользящего дискретного вейвлет-преобразования требует меньших вычислительных затрат для своей реализации. Определены необходимые объемы вычислительных операций для различных реализаций алгоритма анализа на примере дискретного вейвлет-преобразования Добеши 14. Показано, что каскадный алгоритм скользящего вейвлет-анализа имеет минимальные вычислительные затраты и, следовательно, обеспечивает наиболее высокий частотный диапазон анализа характеристик ЛС.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационно-измерительная система диагностики дефектов компрессорных установок / В. В. Алексеев, П. Г. Королев, В. С. Коновалова, Е. Н. Седунова // Приборы. 2016. № 8. С. 25–34.
2. ИИС контроля и управления технологическим процессом термического уничтожения отходов. Ч. 1 / В. В. Алексеев, А. Д. Чарнецкий, П. Г. Королев и др. // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2011. № 3. С. 72–78.
3. Измерение характеристик железнодорожного полотна с помощью измерительной системы, построенной на базе микромеханических акселерометров / В. В. Алексеев, А. М. Боронахин, И. В. Калякин и др. // Приборы. 2011. № 12. С. 22–29.
4. Алексеев В. В., Королев П. Г., Коновалова В. С. Алгоритм идентификации диагностических признаков по параметрам вибрации // Сб. докл. XVIII МНК по мягким вычислениям и измерениям. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. Т. 2. С. 131–136.
5. Alekseev V., Kaliakin I., Sedunova E. Choosing sample frequency for accurate local signal detection using wavelet transform // Proc. of 2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. (EIConRusNW). St. Petersburg, 2016. P. 386–388.
6. Alekseev V., Kaliakin I. Exploring sampling rate for discrete wavelet transform implementation // 2016 Intern. Siberian Conf. on Control and Communications (SIBCON). M., 2016. P. 1–4.
7. Алексеев В. В., Коновалова В. С., Калякин И. В. Алгоритм подавления аномальных помех в измерительном сигнале // Материалы III Междунар. конгресса «Цели развития тысячелетия. Инновационные принципы устойчивого развития арктических регионов России» науч.-практ. конф. «Научоемкие и инновационные технологии в решении проблем прогнозирования и предотвращения чрезвычайных ситуаций и их последствий». СПб., 2010. С. 129–133.
8. Алексеев В. В., Коновалова В. С., Калякин И. В. Алгоритм скользящего вейвлет-преобразования для обработки сигнала в реальном времени // Сб. докл. XIV Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011.
9. Алексеев В. В., Коновалова В. С., Калякин И. В. Алгоритм измерения параметров аномального сигнала с использованием скользящего вейвлет-преобразования // Материалы Междунар. конгресса «Цели развития тысячелетия. Инновационные принципы устойчивого развития арктических регионов России» науч.-практ. конф. «Научоемкие и инновационные технологии в решении проблем прогнозирования и предотвращения чрезвычайных ситуаций и их последствий». СПб., 2011. С. 66–73.

---

V. V. Alekseev, V. S. Konovalova, I. V. Kaliakin  
*Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»*

### REAL TIME IMPLEMENTATION OF DISCRETE WAVELET TRANSFORM

*This paper considers possibilities of wavelet decomposition (filtering) and reconstruction (approximation) implementation for a local signal in real time by using method of sliding discrete wavelet transform. The necessary volumes of computational operations for various implementations of algorithm analysis are determined using the example of the discrete wavelet transformation of Daubechie 14. It is shown that the cascade algorithm of sliding wavelet analysis has minimal computational costs and consequently provides the highest frequency range for analyzing characteristics of the local signal.*

**Discrete wavelet transform, computational complexity, local signal characteristics, cascade algorithm**

---