



УДК 519.23, 004.94

В. В. Алексеев, Е. Ю. Закемовская

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Стационарное дискретное вейвлет-преобразование. Вопросы применения в задачах фильтрации

Определены основные достоинства и недостатки стационарного дискретного вейвлет-преобразования (СДВП). К основным недостаткам СДВП относится невыполнимость условия полного восстановления сигнала интерполированными фильтрами, а также увеличение временной неопределенности фильтра (искажений в полосе пропускания) с ростом уровня разложения. Предложен алгоритм модифицированного стационарного дискретного вейвлет-преобразования, снижающий указанные недостатки.

Вейвлет-фильтр, погрешность фильтрации, глубина разложения

Одной из областей применения вейвлет-преобразования являются задачи обработки и анализа данных, в частности, задача шумоподавления и выделения информативной составляющей сигнала с минимальными искажениями.

Дискретное вейвлет-преобразование обеспечивает достаточно информации как для анализа сигнала, так и для его синтеза, являясь вместе с тем значительно более экономным, чем непрерывное вейвлет-преобразование по числу операций и по требуемому объему памяти. Главным достоинством дискретного вейвлет-преобразования является возможность быстрого преобразования с пирамидальным алгоритмом вычислений [1]. Однако возможности быстрого вейвлет-преобразования могут быть реализованы не для всех типов вейвлетов. Проблема применения дискретных вейвлет-преобразований состоит в достоверности выбора типа вейвлета, глубины разложения, размера выборки. При реализации блочного алгоритма вейвлет-фильтрации от перечисленных параметров зависит точность пороговой обработки вейвлет-коэффициентов детализации, особенно на старших уровнях разложения, при реализации алгоритма вейвлет-фильтрации в режиме реального времени – точность оценивания свойств сигнала на этапе сбора информации и получения информации о характере анализируемых процессов.

При реализации ортогонального дискретного вейвлет-преобразования (ОДВП) используется двухканальная схема фильтров, в которой исходный сигнал делится на две субполосы, каждая из которых за счет операции прореживания отсчетов в 2 раза меньше исходной. В результате рекурсивного повторения этого процесса для обеих субполос получаем древовидное разбиение спектра на определенное количество уровней. За счет уменьшения длительности входной выборки в 2 раза с каждым уровнем разложения точность обработки вейвлет-коэффициентов по мере увеличения глубины разложения падает.

Начальный этап стационарного дискретного вейвлет-преобразования (СДВП) реализован аналогично ОДВП путем свертки исходного сигнала с низкочастотным (ФНЧ) и высокочастотным (ФВЧ) вейвлет-фильтрами [2]. В отличие от ОДВП после применения фильтров разложения прореживание результатов преобразования не производится, поэтому коэффициенты аппроксимации и детализации имеют ту же длину, что и исходный сигнал. Далее к коэффициентам аппроксимации применяется аналогичная процедура, но с применением модифицированных фильтров, которые получены из ФНЧ и ФВЧ путем их интерполяции.

Условиями полного восстановления сигнала вейвлет-преобразованием являются [1]:

– соответствующий расчет фильтров анализа и синтеза;

– соответствующее продолжение сигнала на его границах.

Далее будет показано, что проблема применения СДВП состоит в невыполнимости условия полного восстановления сигнала интерполированными вейвлет-фильтрами, а также в увеличении временной неопределенности фильтра (искажений в полосе пропускания) с ростом уровня разложения.

На рис. 1 приведены частотные характеристики интерполированных нулями (коэффициент интерполяции 1) фильтров разложения (а) и восстановления (б) Добеши 4. На рис. 2 приведены фазовые задержки, вносимые фильтрами Добеши 4 в результате преобразования. Из рис. 2 видно, что фазовые задержки, вносимые интерполированными фильтрами разложения (а) и восста-

новления (б), имеют разное отклонение от линейности в пределах области определения, следовательно, эти фильтры не могут обеспечить постоянство задержки в пределах полосы пропускания фильтров, а следовательно, и полного восстановления сигнала.

Оценим влияние СДВП на узкополосный нестационарный сигнал, представленный на рис. 3. Частоту дискретизации рассматриваемого сигнала выберем согласно методике, приведенной в [3].

На рис. 4 представлены зависимости приведенных погрешностей восстановления сигнала, вносимых СДВП при пропускании чистого сигнала через вейвлет-фильтры, от уровня разложения (γ – средняя квадратическая погрешность восстановления; γ_{\max} – погрешность восстановления в равномерной метрике). Формулы для расчета указанных погрешностей [%] следующие:

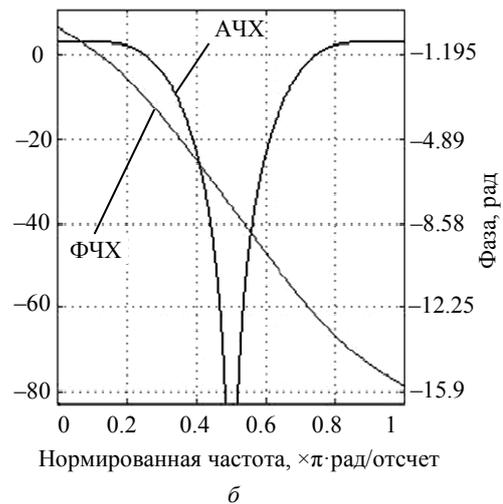
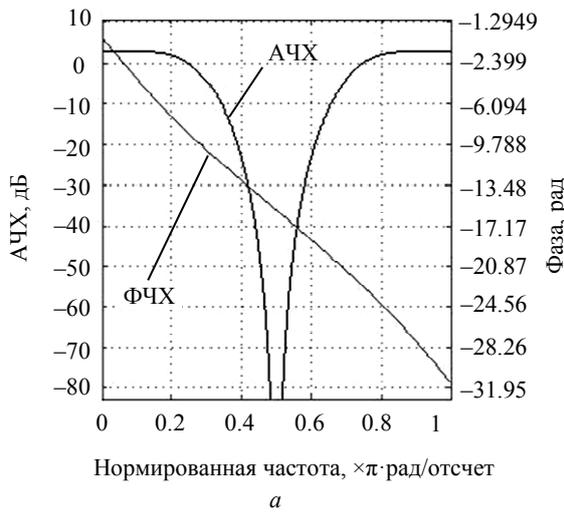


Рис. 1

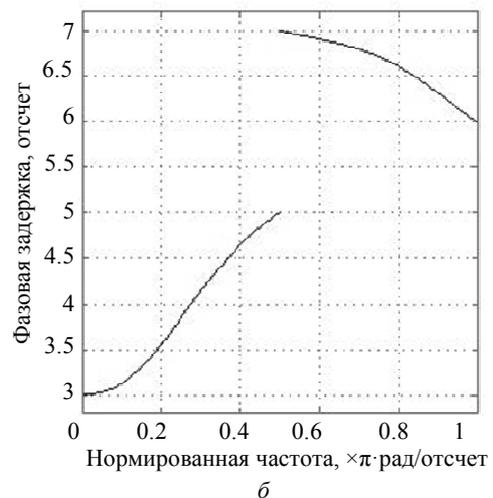
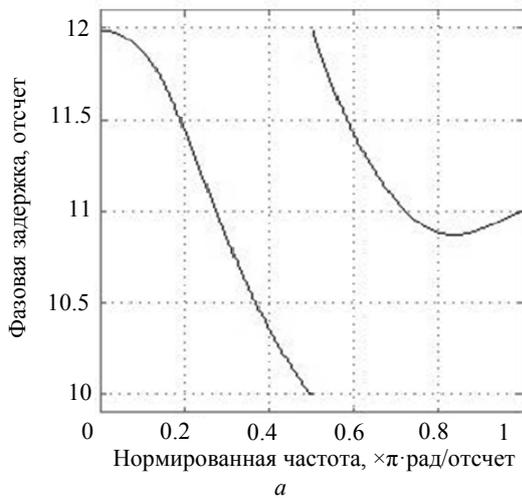


Рис. 2

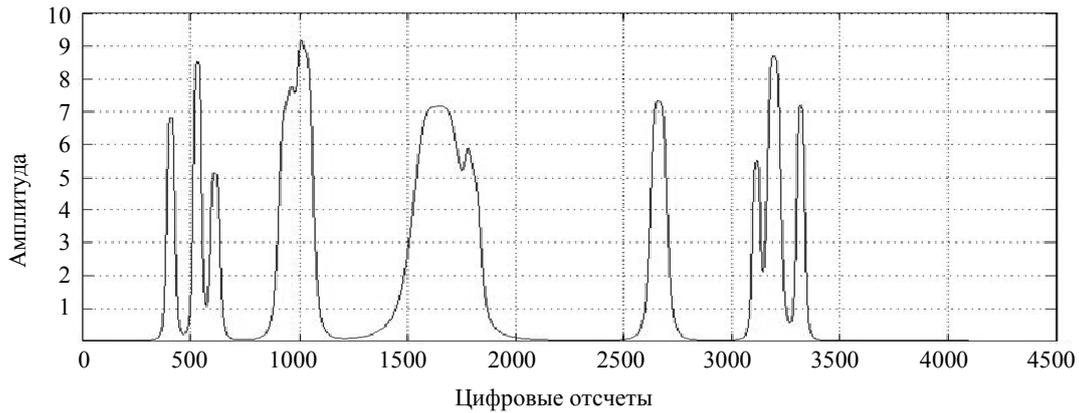


Рис. 3

$$\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_s} 100,$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X}_i)^2}$ – абсолютная средне-квадратическая погрешность фильтрации (N – количество отсчетов исследуемого сигнала; X_i – исходный полезный сигнал; \hat{X}_i – оценка исходного полезного сигнала); $\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2}$ – среднеквадратическое (действующее) значение сигнала.

Приведенная погрешность фильтрации [%] в равномерной метрике определяется как

$$\gamma_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\max |X_i|} 100,$$

где $\Delta_{\max} = \max_{i=1 \dots N} |X_i - \hat{X}_i|$ – абсолютная погрешность фильтрации в равномерной метрике.

Из представленных в табл. 1 результатов следует, что с ростом уровня разложения погрешность восстановления, вносимая интерполированными фильтрами, значительно увеличивается, следовательно, СДВП не обеспечивает полного восстановления сигнала.

Таблица 1

Уровень разложения	γ , %	γ_{\max} , %
1	0.0013	0.0014
2	0.001	0.0013
3	0.143	0.42
4	1.8	4.4
5	7	12.9

Рассмотрим влияние свойств шума на результаты фильтрации ОДВП и СДВП:

1. Сигнал, подвергаемый фильтрации, представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала (рис. 3) и белого гауссова шума.

Параметры вейвлет-фильтрации для этого и последующих алгоритмов примем следующими:

– алгоритм вейвлет-фильтрации как одностороннее дерево [1], так как основная информативная часть сигнала содержится в низкочастотной области;

– тип вейвлета – Добеши, характеризующийся минимальным размером носителя при заданном числе нулевых моментов [2]. Число нулевых моментов – 4;

– пороговая функция – мягкая пороговая вейвлет-обработка [2] с минимаксным порогом, величина которого $T(j) = \sigma(0.3936 + 0.1829 \times \log N / \log 2)$ [2] – фиксированная для каждого j -го уровня разложения, где $\sigma = \frac{\text{med}(|W(j)|)}{0.6745}$; med – медиана; $W(j)$ – вейвлет-коэффициенты детализации j -го уровня разложения; N – число вейвлет-коэффициентов j -го уровня разложения;

– число уровней разложения определяется по критерию минимума энтропии Шеннона $E(W) = -\sum_j W(j)^2 \log(W(j)^2)$ [2];

– снижение влияния краевого эффекта – периодическое продолжение сигнала на его разрывах, длительность отрезков продолжения $t = L_f/2 - 1$ [1].

Погрешности фильтрации¹ ОДВП и СДВП рассматриваемого сигнала в зависимости от отношения сигнал/шум (ОСШ) при уровне разложения, соответствующем минимуму энтропии Шеннона, приведены на рис. 4. Из результатов, представленных на рис. 4, следует, что погрешность, вносимая СДВП в результаты фильтрации, меньше погрешности ОДВП (самое большее на 2 % в средней квадратической метрике, на 7 % в равномерной метрике), что объясняется более точной пороговой статистической обработкой

¹ Промежуточные значения между узловыми точками указанных зависимостей аппроксимированы в первом приближении линейной зависимостью.

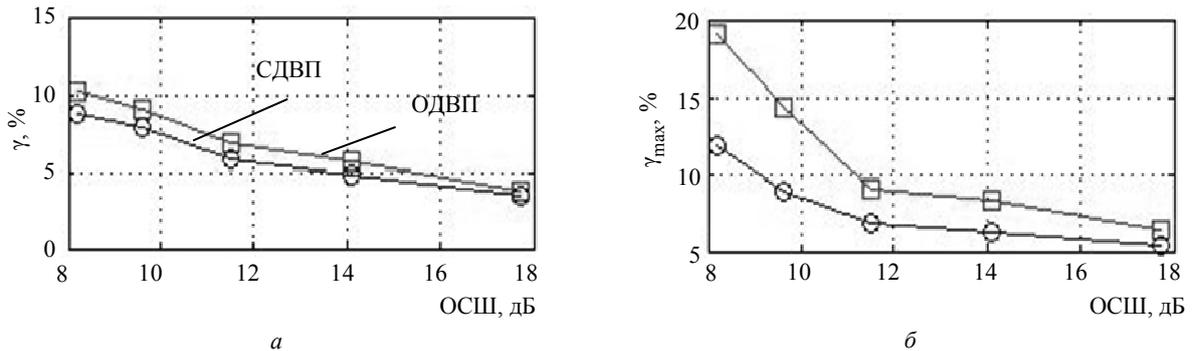


Рис. 4

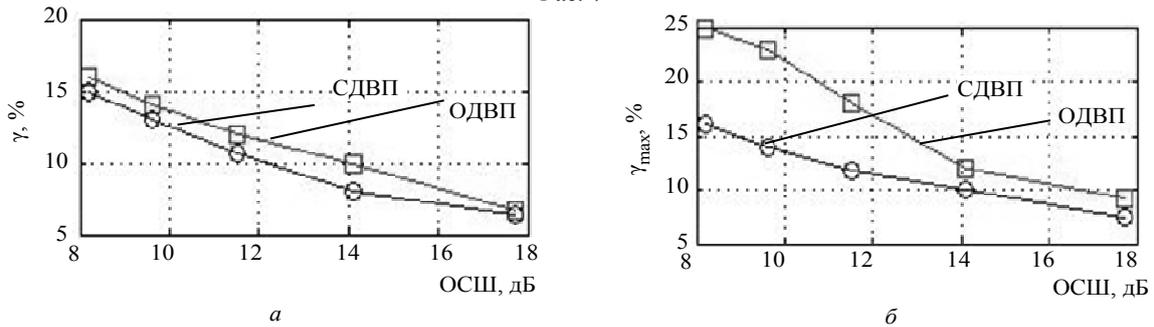


Рис. 5

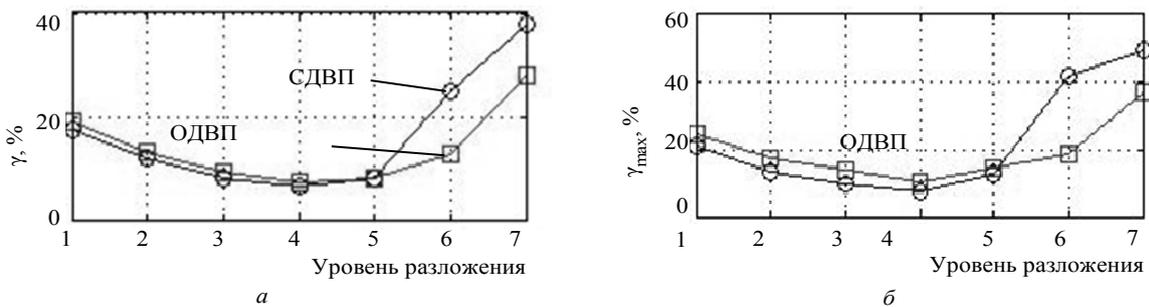


Рис. 6

вейвлет-коэффициентов детализации за счет постоянной длины выборки.

2. Сигнал, подвергается фильтрации, представляет собой аддитивную смесь сигнала (рис. 3) и экспоненциально коррелированного шума с параметром экспоненциальной корреляции $\alpha = 0.5$ [4].

Погрешности фильтрации ОДВП и СДВП рассматриваемого сигнала в зависимости от ОСШ при уровне разложения, соответствующем минимуму энтропии, приведены на рис. 5.

Из результатов, представленных на рис. 5, следует, что погрешность, вносимая СДВП в результаты фильтрации, меньше погрешности ОДВП (самое большое на 2.5 % в средней квадратической метрике, на 9 % в равномерной метрике), что объясняется более точной пороговой статистической обработкой вейвлет-коэффициентов детализации за счет постоянной длины выборки.

Зависимость погрешности фильтрации² ОДВП и СДВП информативного сигнала (рис. 3) на фоне белого гауссова шума (ОСШ 12 дБ) от уровня

разложения приведена на рис. 6. Из результатов рисунка следует, что с ростом уровня разложения погрешность, вносимая интерполированными фильтрами СДВП, увеличивается значительно быстрее, чем погрешность ОДВП (самое большое на 10 % в средней квадратической метрике, на 20 % в равномерной метрике).

Можно сделать вывод, что влияние СДВП на сигнал, подвергается фильтрации, ограничивается невыполнимостью условия полного восстановления сигнала интерполированными фильтрами, что приводит к некомпенсированным фазовым задержкам результатов фильтрации, а также увеличением искажений в полосе пропускания с ростом порядка интерполирования импульсной характеристики фильтра.

Решение проблемы представляется возможным при использовании ортонормированных вейвлет-фильтров постоянной длительности. На рис. 7 приведена фильтровая реализация модифицированного стационарного дискретного вейвлет-преобразования (МСДВП). Основная идея алгоритма для

² См. примеч. 1.

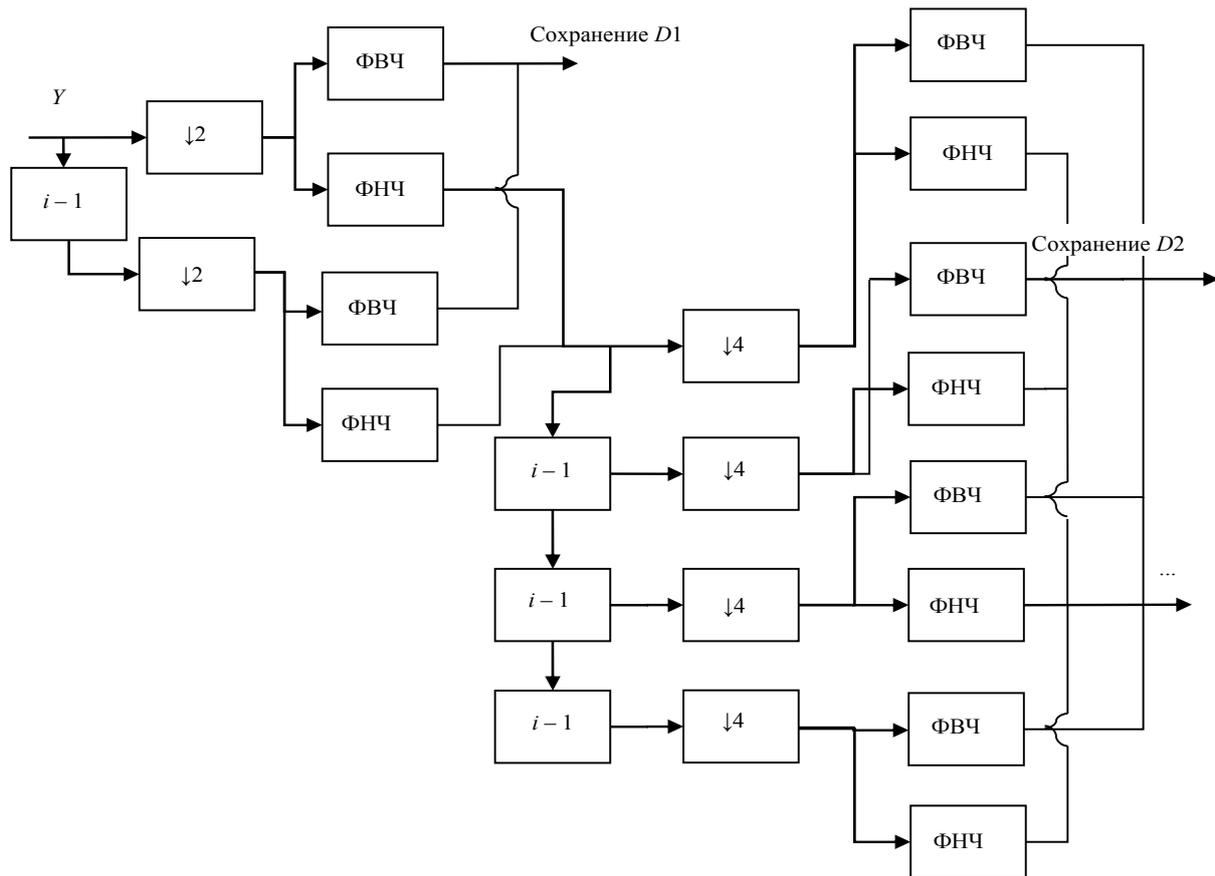


Рис. 7

каждого уровня разложения j заключается в прореживании исследуемой выборки Y (число прореживаний пропорционально $2^{(j)}$), пропуски оставшихся отсчетов через ФНЧ (результат – коэффициенты аппроксимации A) и ФВЧ (результат – коэффициенты детализации D), затем сдвиге на 1 ($i - 1$) исследуемой выборки Y и повторении операций прореживания и фильтрации (число сдвигов равно $2^{(j - 1)}$), объединении с сохранением порядкового номера в выборке полученных коэффициентов аппроксимации A , а также детализации D , далее повторении алгоритма для коэффициентов A .

Как следует из приведенного алгоритма МСДВП, разбиение исходного сигнала на выборки меньшего объема и пропускание каждой из них в отдельности через ФНЧ и ФВЧ приводят к возросшему влиянию краевого эффекта на результаты преобразования.

В табл. 2 приведена зависимость погрешности фильтрации МСДВП информативного сигнала (см. рис. 3) от уровня разложения при пропуски чистого информативного сигнала через вейвлет-фильтр. Из результатов, представленных в табл. 2, следует, что МСДВП не обеспечивает

полного восстановления сигнала из-за возросшего влияния краевого эффекта, но влияние искажений, вызванных краевым эффектом, значительно меньше влияния искажений, вносимых интерполированными фильтрами.

Зависимость погрешности фильтрации³ МСДВП и СДВП информативного сигнала (см. рис. 3) на фоне белого гауссова шума (ОСШ 12 дБ) от уровня разложения приведена на рис. 8, из которого следует, что результаты фильтрации МСДВП менее зависимы от уровня разложения.

Таблица 2

Уровень разложения	$\gamma, \%$	$\gamma_{\max}, \%$
1	0.0013	0.0014
2	0.0016	0.0019
3	0.0022	0.0028
4	0.037	0.095
5	0.85	2.18

Результаты фильтрации различными типами дискретных вейвлет-преобразований аддитивной смеси (рис. 9, а) информативного сигнала и белого гауссова шума (ОСШ 12 дБ) для уровня разложения, соответствующего минимуму энтропии Шеннона, приведены на рис. 9, б–г.

³ См. примеч. 1.

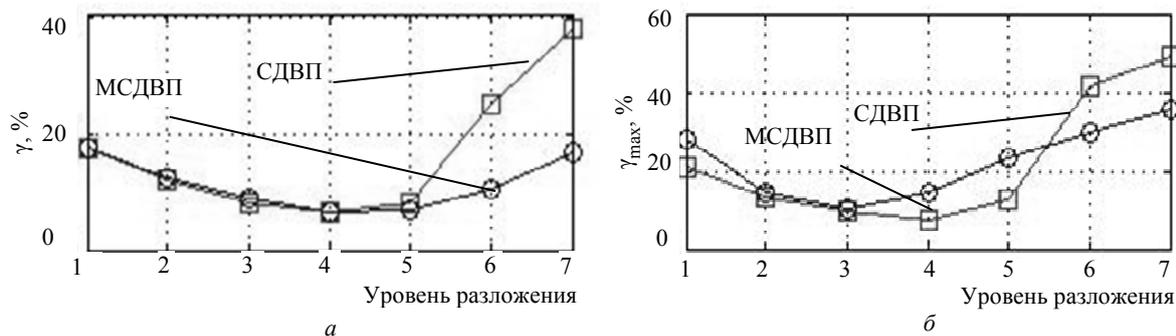


Рис. 8

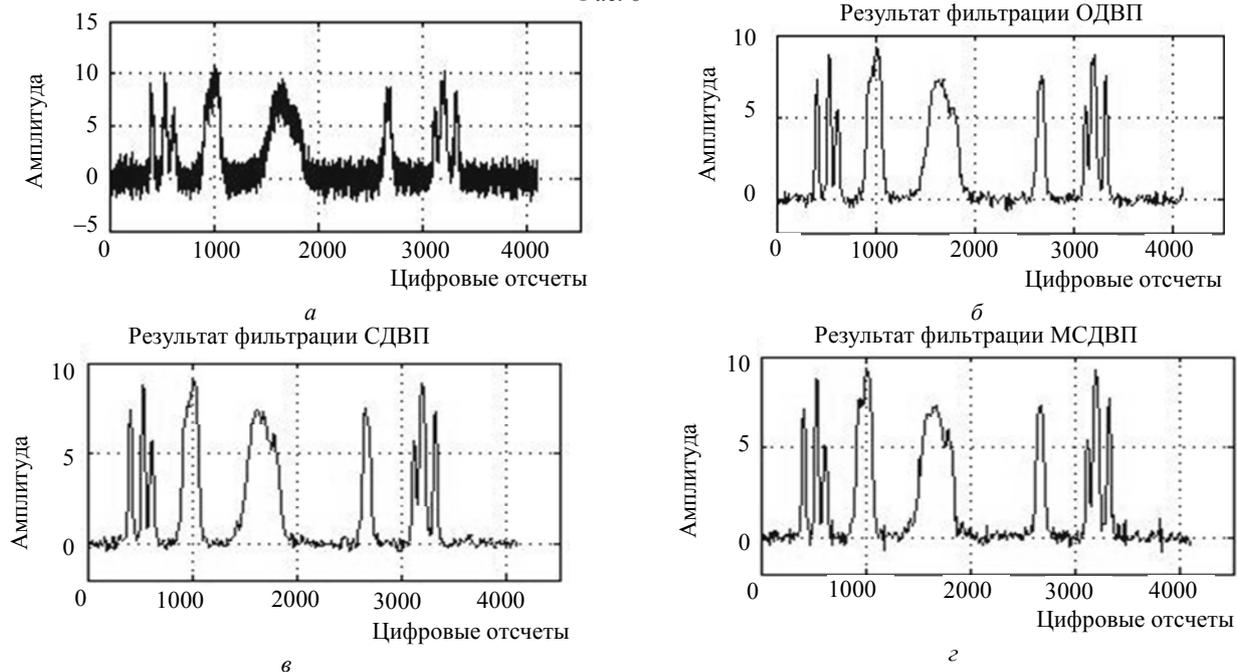


Рис. 9

Основные результаты и выводы:

1. СДВП по сравнению с ОДВП обеспечивает статистическую обработку вейвлет-коэффициентов детализации с минимальными искажениями вследствие постоянной длины выборки на протяжении всего преобразования.

2. Интерполированные банки фильтров СДВП не обеспечивают полного восстановления сигнала, а также за счет увеличения длительности импульсных характеристик с ростом уровня разложения временная неопределенность фильтра уве-

личивается (рост искажений в полосе пропускания фильтра).

3. Целесообразно применение МСДВП, которое исключает операцию интерполяции, данный тип вейвлет-преобразования более подвержен граничному (краевому) эффекту. Влияние краевого эффекта на результаты преобразования МСДВП (см. табл. 2, рис. 8) меньше влияния искажений, вносимых интерполированными фильтрами СДВП (см. табл. 1, рис. 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев В. И., Грибунин В. А. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999.
2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
3. Закемовская Е. Ю. Выбор частоты дискретизации при применении ортогонального дискретного

вейвлет-преобразования // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2017. № 3. С. 54–61.

4. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2006.

V. V. Alekseev, E. Yu. Zakemovskaya
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

STATIONARY DISCRETE WAVELET-TRANSFORMATION. APPLICATION QUESTIONS IN FILTRATION PROBLEMS

In article the basic merits and demerits of stationary discrete wavelet-transformation (SDWT) are defined. The impossibility of a complete recovery of a signal concerns the basic lacks SDWT the interpolated filters, and also increase in time uncertainty of the filter (distortions in a pass-band) with growth of level of decomposition. The algorithm of the modified stationary discrete wavelet-transformation reducing specified lacks is offered.

Wavelet-filter, filtration error, depth of decomposition

УДК 53.08; 004.94

В. В. Алексеев, В. С. Коновалова, И. В. Калякин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Реализация дискретного вейвлет-преобразования в реальном времени

Рассматривается возможность реализации алгоритмов вейвлет-разложения (фильтрации) и восстановления (аппроксимации) локального сигнала в реальном времени методом скользящего дискретного вейвлет-преобразования. Определены необходимые объемы вычислительных операций для различных реализаций алгоритма анализа на примере дискретного вейвлет-преобразования Добеши 14. Показано, что каскадный алгоритм скользящего вейвлет-анализа имеет минимальные вычислительные затраты и, следовательно, обеспечивает наиболее высокий частотный диапазон анализа характеристик локального сигнала.

Дискретное вейвлет-преобразование, объемы вычисленных операций, характеристики локального сигнала, каскадный алгоритм, частотный анализ

Постановка задачи. Во многих современных электромеханических агрегатах [1], энергоемких производствах [2], транспортных системах [3] и другом в качестве индикаторов наступления предаварийной и аварийной ситуаций может быть использовано появление локального сигнала (ЛС) на фоне нормального значения информативного технологического параметра, связанного с возникновением аномального явления, предшествующего аварии. Наиболее распространенные локальные сигналы в системах данного класса могут быть описаны функциями вида затухающий синус, прямоугольный или колоколообразный импульс [4]. В указанных публикациях показано, что для обнаружения и измерения параметров ЛС такого вида достаточно эффективно может быть использован алгоритм дискретного вейвлет-преобразования (ДВП).

Реализация алгоритма ДВП предполагает выполнение двух этапов:

1. Вейвлет-разложение по уровням измеряемого сигнала – разложение на частотные составляющие измеряемого ЛС, который обеспечивает возможность его обнаружения и определение его частотных свойств.

2. Вейвлет-восстановление обеспечивает возможность фильтрации (удаление высокочастотной и низкочастотных составляющих из измеряемого сигнала) – выделения ЛС и измерение его параметров (амплитуду, ширину, место нахождения во времени или пространстве).

Алгоритм ДВП. Рассмотрим реализацию алгоритма для следующих условий:

1. На входе измерительного канала находится измеряемый сигнал, который может быть представлен в виде матрицы-строки $Z = |z_0, z_1, z_2, \dots, z_N|$.