



УДК 539.3

А. В. Михеев

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)*

## Локальная устойчивость оболочки на упругом основании, армированной системой параллельных нитей

*Рассматривается расчет локальной устойчивости оболочки, находящейся на упругом основании, в матрицу которой внедрена система параллельных малорастяжимых нитей. Проанализирована зависимость параметра критической нагрузки от относительной жесткости нитей, плотности армирования и жесткости основания*

### Оболочки, армированные материалы, расчет устойчивости

Оболочки, армированные нитями, используются в различных областях техники и строительстве. Подкрепленные волокнами оболочечные системы позволяют наиболее полно решать проблему снижения массы и стоимости конструкции с возможностью рационального использования прочностных свойств и внутреннего объема. Применение армированных нитями оболочек в строительстве предоставляет широкие возможности для возведения покрытий больших пролетов. Такие оболочки применяются не только как самостоятельные конструкции типа сводов и куполов, но и как соединительные или подкрепляющие элементы.

Расчет устойчивости такого рода конструкций является одной из самых актуальных проблем механики и представляет несомненный практический интерес. В [1] была развита основанная на структурном анализе общая теория расчета на прочность армированных конструкций и рассмотрены принципы их рационального проектирования. Произведено сравнение полученных теоретических результатов с экспериментами. В [2] рассматривается локальная потеря устойчивости анизотропных оболочек. Выведены общие соотношения упругости для оболочек, состоящих из изотропного материала (матрицы), армированного системами малорастяжимых нитей. В рамках предположений теории Доннела получена упрощенная система уравнений равновесия. Ста-

тья [3] посвящена исследованию устойчивости цилиндрических оболочек, армированных системами малорастяжимых нитей, под действием осевого сжатия. Рассмотрена зависимость критической нагрузки от коэффициента сдвига. В [4] изучена деформация цилиндрической оболочки, армированной нелинейно-упругими нитями. В [5] исследуется устойчивость оболочек произвольной формы, находящихся на упругом основании и армированных двумя и тремя системами малорастяжимых нитей, наклоненных под различными углами к одной из координатных линий на срединной поверхности. Выведено общее выражение функции нагружения для такого рода оболочек.

В данной статье рассматривается оболочка на упругом основании, в материал которой внедрена система нитей, параллельных координатной линии главной кривизны  $\alpha$ . Анализируется зависимость критической нагрузки (т. е. минимального значения нагружения, для которого снятие нагружения не приводит к возвращению оболочки в исходное состояние) от плотности армирования  $\rho$ , относительной жесткости материала оболочки  $\varepsilon$  и жесткости основания  $\omega$ . При рассмотрении задачи полагаем справедливыми предположения, входящие в гипотезу Тимошенко–Рейснера [6], равномерное распределение нитей по объему оболочки, а также отсутствие эффекта поперечного сжатия нитей.

**Соотношения между напряжениями и деформациями.** Напряжения в оболочке  $\sigma_{ij}$  состоят из двух слагаемых: напряжений в матрице и усредненных напряжений сжатия/растяжения нитей. При усреднении жесткости нитей приходим к модели конструктивно-ортотропной оболочки, где одна из осей ортотропии параллельна направлению координатной линии  $\alpha$ . Согласно [5],

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( F_m + \sum_{k=1}^n F_k c_k^4 \right) \varepsilon_{11} + \\ &+ \left( F_m \nu_m + \sum_{k=1}^n F_k c_k^2 s_k^2 \right) \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= \left( \frac{1-\nu_m}{2} F_m + \sum_{k=1}^n F_k c_k^2 s_k^2 \right) \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= \left( F_m + \sum_{k=1}^n F_k s_k^4 \right) \varepsilon_{22} + \\ &+ \left( F_m \nu_m + \sum_{k=1}^n F_k c_k^2 s_k^2 \right) \varepsilon_{11}, \\ F_m &= \frac{E_m(1-\rho)}{1-\nu_m^2}, F_k = \frac{\rho E'}{n}, \\ c_k &= \cos(\xi_k), s_k = \sin(\xi_k), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформации срединной поверхности оболочки;  $\nu_m$  – коэффициент Пуассона для матрицы;  $E'$  – модуль Юнга нитей;  $\rho$  – относительный объем оболочки, занятый нитями;  $\xi_k$  – угол наклона  $k$ -й системы нитей по отношению к направлению координатной линии кривизны  $\alpha$ .

**Расчет модулей Юнга и коэффициентов Пуассона.** Проведем расчет упругих характеристик оболочки, армированной одной системой нитей, параллельных координатному направлению  $\alpha$ . В данном случае  $n = 1, c_k = 1, s_k = 0$ . Следовательно, для эквивалентной ей ортотропной оболочки имеем:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_m(1-\rho) + \rho E', \\ E_2 &= \frac{E_m(1-\rho)(E_m(1-\rho) + \rho E')}{E_m(1-\rho) + \rho E'(1-\nu_m^2)}, \\ G_{12} &= \frac{E_m(1-\rho)}{2(1+\nu_m)}, G_{13} = G_{23} = G_{12}, \\ \nu_{12} &= \nu_m, \nu_{21} = \frac{E_m(1-\rho)\nu_m}{E_m(1-\rho) + \rho E'(1-\nu_m^2)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E_1, E_2$  – модули Юнга материала оболочки в координатных направлениях;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – мо-

дули сдвига;  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона. Введем параметры относительной жесткости материала оболочки и нитей:

$$\Delta_1 = \frac{E_1}{E_m}, \Delta_2 = \frac{E_2}{E_m}, \Delta_{12} = \frac{G_{12}}{E_m}, \varepsilon = \frac{E'}{E_m}.$$

Тогда из тождеств (1) они находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\rho, \varepsilon) &= (1-\rho) + \rho\varepsilon, \Delta_2(\rho, \varepsilon) = \frac{(1-\rho)(1-\rho + \rho\varepsilon)}{1-\rho + \rho\varepsilon(1-\nu_m^2)}, \\ \Delta_{12}(\rho) &= \frac{1-\rho}{2(1+\nu_m)}. \end{aligned}$$

Для коэффициентов Пуассона имеем:

$$\nu_{12} = \nu_m, \nu_{21}(\rho, \varepsilon) = \frac{(1-\rho)\nu_m}{1-\rho + \rho\varepsilon(1-\nu_m^2)}.$$

Следуя рассуждениям, аналогичным приведенным в [5], [6], найдем явное выражение для функции нагружения:

$$\begin{aligned} \Lambda(s, \varphi, \rho, \varepsilon, \omega) &= \frac{1}{f_T(\varphi)} \left( \frac{f_R(\varphi)}{A(\varphi, \rho, \varepsilon)s^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{G_1(\varphi, \rho, \varepsilon) \cos^2 \varphi + G_2(\varphi, \rho, \varepsilon) \sin^2 \varphi}{H(\varphi, \rho, \varepsilon)} s^2 + \frac{\omega}{s} \right). \end{aligned}$$

где  $\omega$  – параметр жесткости основания;  $s, \varphi$  – волновые числа;

$$f_R(\varphi) = (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2;$$

$$f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \cos \varphi \sin \varphi + t_2 \sin^2 \varphi;$$

$\rho_1, \rho_2$  – безразмерные главные кривизны срединной поверхности;  $t_i, i = 1 \dots 3$  – компоненты вектора безразмерных начальных усилий;

$$\begin{aligned} A(\varphi, \rho, \varepsilon) &= \frac{\sin^4 \varphi}{\Delta_1(\rho, \varepsilon)} + \frac{\cos^4 \varphi}{\Delta_2(\rho, \varepsilon)} + \\ &+ \left( \frac{1}{\Delta_{12}(\rho)} - \frac{\nu_{12}}{\Delta_2(\rho, \varepsilon)} - \frac{\nu_{21}(\rho, \varepsilon)}{\Delta_1(\rho, \varepsilon)} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \end{aligned}$$

$G_1(\varphi, \rho, \varepsilon), G_2(\varphi, \rho, \varepsilon), H(\varphi, \rho, \varepsilon)$  – вспомогательные многочлены, полные выражения для которых приведены в [5]. Параметр критической нагрузки  $\Lambda_*$  находится положительной минимизацией функции нагружения по волновым числам  $s, \varphi$ :

$$\Lambda_*(\rho, \varepsilon, \omega) = \min_{s, \varphi > 0} \Lambda(s, \varphi, \rho, \varepsilon, \omega).$$

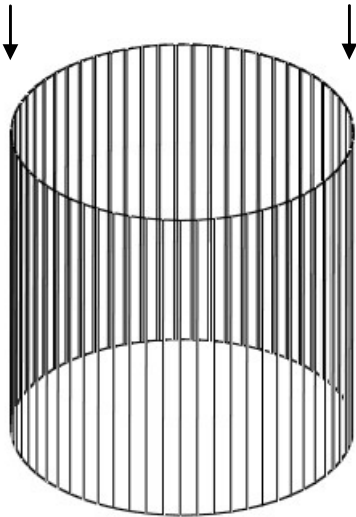


Рис. 1

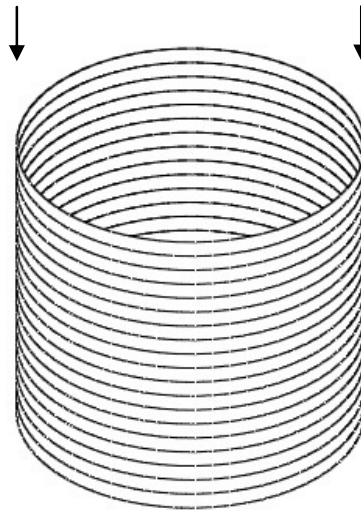


Рис. 2

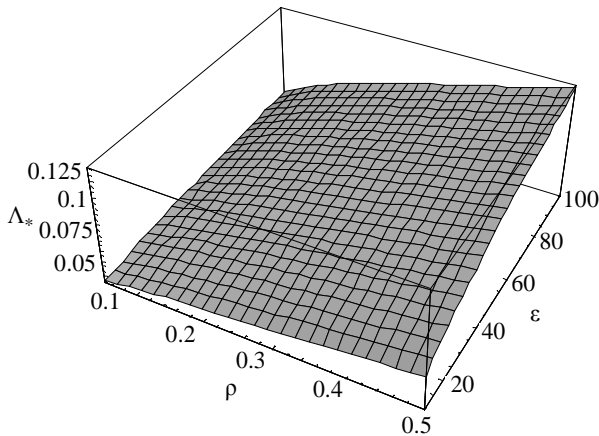


Рис. 3

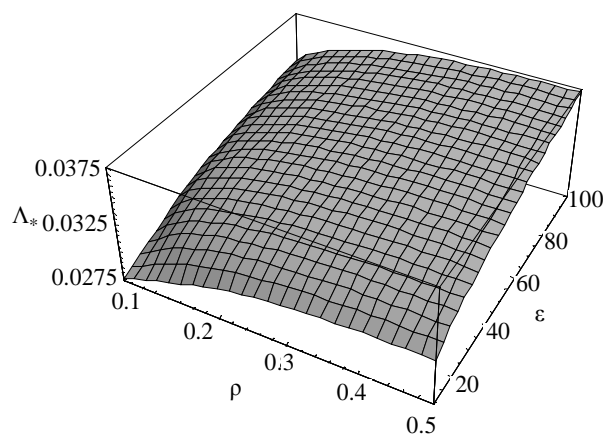


Рис. 4

**Устойчивость цилиндрических оболочек.**

Рассмотрим два примера осевого сжатия цилиндрических оболочек на упругом основании, армированных системами параллельных нитей, со следующими характеристиками:  $h_* = 0.01$ ,  $\nu_m = 0.1$ . Положим, что в первом случае направление нитей параллельно оси оболочки и  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = t_3 = 0$  (рис. 1), во втором – ортогонально ей, т. е.  $t_2 = 1$ ,  $t_1 = t_3 = 0$  (рис. 2).

На рис. 3, 4 приведены графики зависимости  $\Lambda_*(\rho, \epsilon, \omega)$  при  $\omega = 0.3$  в параллельном и ортогональном случаях соответственно, на рис. 5, 6 – аналогичные зависимости, но при  $\omega = 0.9$ . Для проведения численной минимизации и построения графиков использовался программный пакет Mathematica 5.0.

Из представленных графиков следует, что при одних и тех же значениях плотности армирования  $\rho$ , относительной жесткости материала оболочки  $\epsilon$  и жесткости основания  $\omega$  значение критической нагрузки для усилий, параллельных направлению

нитей, превышает это же значение критической нагрузки в случае, когда усилие направлено ортогонально нитям. При этом зависимость  $\Lambda_*(\rho, \epsilon, \omega)$  монотонно возрастает по каждой из переменных. Для иллюстрации в таблице приведено наименьшее ( $m$ ) и наибольшее ( $M$ ) отношение критических нагрузок для обоих случаев при  $0 \leq \rho \leq 0.5$  и  $0 \leq \epsilon \leq 100$ , для трех значений жесткости основания:  $\omega = 0.3$ ,  $\omega = 0.6$  и  $\omega = 0.9$ .

Параметр	$\omega = 0.3$	$\omega = 0.6$	$\omega = 0.9$
$m$	1.12	1.13	1.14
$M$	3.62	3.86	4.00

Как видно из приведенных результатов, армирование оболочки только одной системой нитей может оказаться достаточно эффективным в тех случаях, когда необходима экономия материала нитей. При этом нагружение, направленное вдоль системы нитей, обладает преимуществом по отношению к нагружению, перпендикулярному ей, с точки зрения повышения критической нагрузки.

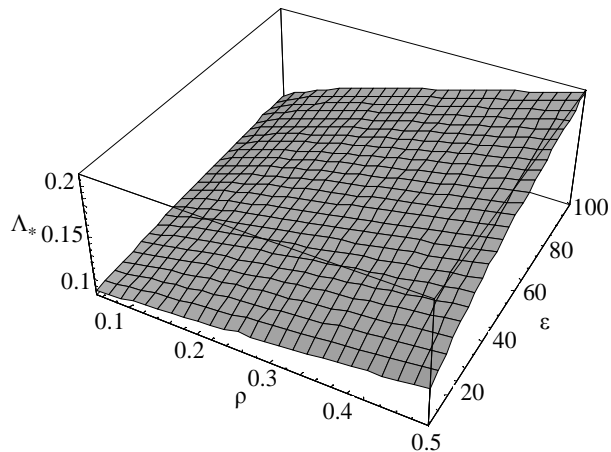


Рис. 5

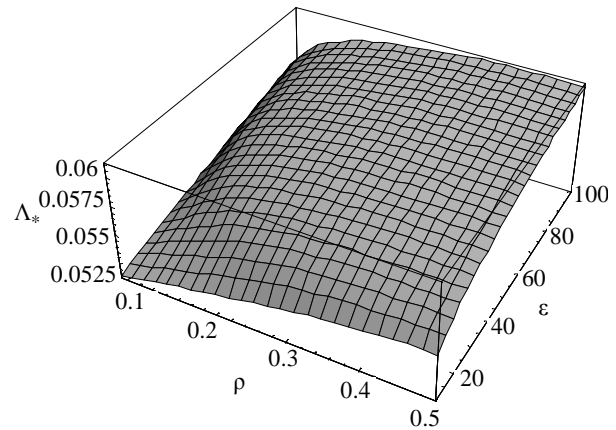


Рис. 6

Необходимо также принять во внимание, что краевой эффект, а также случай потери устойчивости самого материала нитей находятся за рамками локальной теории устойчивости оболочек, рассмотренной в данной статье. Проведенные здесь

расчеты могут быть полезны специалистам, изучающим упругие свойства материалов, физику твердого тела, а также математические модели физических процессов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
2. Haseganu E. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E. Buckling of thin anisotropic shells // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2000. Vol. 24, № 1 В. Р. 169–178.
3. Викторов И. В., Товстик П. Е. Влияние сдвига на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2004. № 4. С. 58–67.
4. Викторов И. В. Деформация цилиндрической оболочки, армированной нелинейно упругими нитями // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2010. № 1. С. 73–76.
5. Михеев А. В. Устойчивость оболочек на упругом основании, армированных системами малорастяжимых нитей // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 3. С. 127–133.
6. Михеев А. В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2007. № 3. С. 137–143.

A. V. Mikheev

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

### LOCAL STABILITY OF A SHELL ON ELASTIC BASE, REINFORCED WITH A SYSTEM OF PARALLEL FIBERS

*The question of calculation of local stability of shells on an elastic base is considered. In this task the system of parallel rigid fibers is implanted into the shell matrix. The dependence of critical load parameter on the relative stiffness of fibers, density of fibers and rigidity of the base is analyzed.*

**Shells, reinforced materials, calculation of stability**