УДК 681.51; 004.942

Н. Д. Поляхов, Р. И. Галиуллин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Управление перевернутым двухзвенным маятником

Предложена система управления двухзвенным перевернутым маятником. Рассматриваются вопросы динамики системы в различных режимах работы. Результаты моделирования показывают работоспособность системы управления. Приводятся результаты моделирования в среде Matlab/Simulink.

Перевернутый двухзвенный маятник, уравнения Лагранжа, математическая модель, линеаризация, область управляемости, стабилизация

Двойной физический маятник представляет собой систему с двумя степенями свободы. Если в системе имеется одно управляющее воздействие, то управление такой системой вызывает значительные трудности. Управляющим в таком маятнике может быть момент, прикладываемый в точке подвеса – в «плечевом суставе», или в межзвенном шарнире – в «локтевом суставе». О системе, в которой число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы, говорят, что в ней дефицит числа управляющих воздействий (under-actuated system). Если управляющий момент ограничен, то проблема управления еще более осложняется [1]. Ограничение на управляющее воздействие существенно, когда желаемый режим работы системы в отсутствие управления неустойчив. В таком случае множество начальных состояний, из которых систему можно вывести на желаемый режим, ограничено. При этом важную задачу представляет построение управления в виде обратной связи с максимально возможной областью притяжения этого желаемого режима [2].

Математическая модель маятника. На рис. 1 показан плоский двухзвенный физический маятник с неподвижной точкой опоры *O*. Опора осуществляется при помощи идеального (без трения) цилиндрического шарнира. Такой же идеальный шарнир в точке *D* соединяет между собой звенья маятника, которые представляют собой абсолютно твердые тела. Оси шарниров в точках *O* и *D* перпендикулярны плоскости чертежа. Центр масс первого звена расположен на отрезке *OD*. Обозначим через φ_1 и φ_2 отсчитываемые против часовой стрелки углы отклонения от вертикали первого и второго звеньев соответственно.

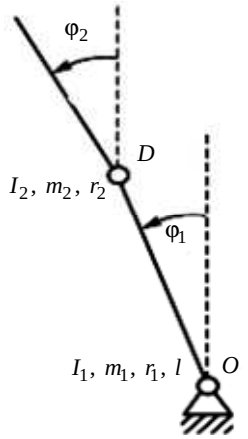


Рис. 1

Кинетическую T и потенциальную П энергию двухзвенного маятника, представим в виде

$$\begin{cases} \mathrm{T} = \dfrac{1}{2}\left[a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + 2a_{11}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a_{11}\dot{\varphi}_2^2\right], \\ \Pi = b_1\cos\varphi_1 + \mathrm{b}_2\cos\varphi_2. \end{cases} \quad (1)$$

Элементарную работу δW момента *L*, приложенного в шарнире *O* или *D*, представим соответственно в виде

$$\delta W = L\left(\delta_{\varphi_2} - \delta_{\varphi_1}\right). \quad (2)$$

В выражениях (1) $a_{11} = I_1 + m_2 l^2$, $a_{22} = I_2$, $a_{12} = m_2 r^2 l$, $b_1 = (m_1 r_1 + m_2 l) g$, $b_2 = m_2 r_2 g$, I_1 и I_2 – моменты инерции первого и второго звеньев относительно шарниров O и D соответственно; m_1 и m_2 – массы первого и второго звеньев; r_1 и r_2 – расстояния от шарниров O и D до центров масс первого и второго звеньев соответственно; l – длина первого звена OD; g – ускорение свободного падения. Длина второго звена в выражения (1) не входит в уравнение движения, а входит только расстояние r_2 от шарнира D до центра масс второго звена. Будем считать, что $r_1, r_2 > 0$, т. е. центр масс первого звена OD не совпадает с шарниром O, а центр масс второго звена – с шарниром D.

Используя выражения (1) и (2) и уравнения Лагранжа второго рода [1], запишем описание движения двухзвенного маятника в матричной форме:

$$A\ddot{\varphi} + F\dot{\varphi}^2 + B\sin\varphi = L. \qquad (3)$$

Здесь

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \ \dot{\varphi}^2 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{pmatrix}, \ \sin\varphi = \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ a_{12}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ a_{12}\sin(\varphi_1 - \varphi_2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ 0 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что допустимые управления представляют собой кусочно-непрерывные функции $L(t)$, ограниченные по модулю постоянной величиной L_0:

$$|L| \le L_0, \ L_0 = \text{const}.$$

Множество таких функций обозначим через U.

При $L \equiv 0$ система (3) имеет тривиальное решение

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1^2 = \dot{\varphi}_2^2 = 0, \qquad (4)$$

отвечающее неустойчивому положению равновесия неуправляемого маятника с обоими перевернутыми звеньями.

Цель настоящей работы – синтез управления, стабилизирующего состояние (4) и обеспечивающего «большую» область притяжения. При изучении задачи стабилизации маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия (4) предположим, что в начале и в течение всего процесса стабилизации маятник находится в некоторой малой окрестности этого положения. При этом круговые движения всего маятника или одного из его звеньев рассматривать не будем, т. е. исследуем задачу локальной стабилизации [2].

Линеаризованная модель. Линеаризуя уравнения (3) около состояния равновесия (4), получаем систему (при $F = 0$)

$$A_0\ddot{\varphi} + B\varphi = LA_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение однородной системы (5) имеет вид

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\lambda^2 - (a_{11}b_2 + a_{22}b_1)\lambda + b_1 b_2 = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет два положительных корня. Если дискриминант этого уравнения отличается от нуля, то они различны:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \qquad (7)$$

поэтому при помощи невырожденного преобразования

$$\varphi = Kx,$$

где K – постоянная матрица, система (5) может быть приведена к нормальным координатам [2] x_1, x_2 т. е. к виду

$$\ddot{x} - \Lambda x = dL, \ x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Матрица преобразования K состоит из собственных векторов матрицы $A_0^{-1}B$. Она может быть выбрана, например, в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2 - a_{22}\lambda_1}{a_{12}\lambda_1} & \dfrac{b_2 - a_{22}\lambda_2}{a_{12}\lambda_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Здесь предполагается, что $r_2 \ne 0$, а значит, и $a_{12} \ne 0$.

Матрица преобразования к нормальным координатам может отличаться от (9). Всякая другая матрица приведения получается из (9) умножением первого или/и второго столбца на какой-то множитель. Если матрицу преобразования выбрать в виде (9) [2], то

$$d=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=K^{-1}A_0^{-1}=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} a_{12}\lambda_1 & \frac{\lambda_1 b_1}{\lambda_2 b_2}(a_{22}\lambda_2-b_2) \\ -a_{12}\lambda_1 & \frac{\lambda_2 b_1}{\lambda_1 b_2}(a_{22}\lambda_1-b_2) \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Система (8) эквивалентна двум скалярным дифференциальным уравнениям, записанным в нормальных координатах x_1 и x_2:

$$\ddot{x}_1-\lambda_1 x_1=dL,\ \ \ddot{x}_2-\lambda_2 x_2=dL. \qquad (11)$$

Здесь

$$d=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=K^{-1}A_0^{-1}=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} b_1-(a_{11}+a_{12})\lambda_1 \\ -b_1+(a_{11}+a_{12})\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Столбцы получены при помощи выражения (10).

Из неравенств (7) следует, что спектр системы (11) содержит два положительных собственных значения:

$$\mu_1=\sqrt{\lambda_1},\ \mu_2=\sqrt{\lambda_2}\ \ (\mu_1>\mu_2>0), \qquad (12)$$

и два равных им по абсолютному значению отрицательных $-\mu_1,\ \mu_2$.

Области управляемости. Величины λ_1, λ_2 не совпадают, поэтому левые части уравнений (11) различаются. Ни одно из этих собственных значений, кроме того, не равно нулю, если $b_1,\ b_2\neq 0$. Поэтому оба элемента столбца d отличны от нуля. Отсюда вытекает, что механическая система (11) полностью управляема [1], [3] при наличии управляющего момента только в точке подвеса *O*.

Допустим, что справедливо равенство $b_1-(a_{11}+a_{22})\lambda_1=0$ или $b_2-(a_{11}+a_{22})\lambda_2=0$. Подставив значение $\lambda_1=b_1/(a_{11}+a_{22})$ или $\lambda_2=$ $=b_2/(a_{11}+a_{22})$ в уравнение (6), получаем, что эти равенства могут существовать при условии $(a_{11}+a_{22})b_1=(a_{11}+a_{22})b_2$, и только при нем. Если же последнее равенство не справедливо, то $b_1-(a_{11}+a_{22})\lambda_1\neq 0$. При этом $d_1\neq 0,\ d_2\neq 0$, и механическая система (11), а значит, и исходная (5), полностью управляема [4] при наличии управляющего момента только в межзвенном шарнире *D*.

Управляемая линейная система (5) имеет два положительных собственных значения (12): $\mu_1>\mu_2>0$; что касается ресурсов управления, то они ограничены. Поэтому множество начальных состояний, из которых система (5) с помощью управления $L(t)\in U$ может быть приведена в желаемое состояние равновесия (4), ограничено [5]. Это множество, которое обозначим через Q, и будет областью управляемости. Чтобы построить область Q для системы (5) или, что то же самое, для (11), представим систему (11) четвертого порядка в жордановой форме и выделим из нее два дифференциальных уравнения первого порядка, отвечающие положительным собственным значениям (12).

Введем новые жордановы переменные y_1, y_2, которые связаны с собственными значениями μ_1, μ_2, управлением *L* и координатами $x_1,\ x_2$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1&=\mu_1 y_1+\frac{d_1}{\mu_1}L,\ \ y_1=x_1+\frac{1}{\mu_1}\dot{x}_1; \\ \dot{y}_2&=\mu_2 y_2+\frac{d_2}{\mu_2}L,\ \ y_2=x_2+\frac{1}{\mu_2}\dot{x}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Уравнения (13) выделяются из уравнений системы (11).

В качестве жордановых переменных вместо $y_1,\ y_2$ могут быть выбраны переменные, каждая из которых получается умножением их на любое положительное или отрицательное число [2].

Отметим, что при управлении $L(t)\equiv L_0$ система (13) имеет стационарную точку (неустойчивую)

$$y_1=-\frac{d_1}{\mu_1^2}L_0,\ y_2=-\frac{d_2}{\mu_2^2}L_0, \qquad (14)$$

а при управлении $L(t)\equiv -L_0$ – стационарную точку (также неустойчивую)

$$y_1=\frac{d_1}{\mu_1^2}L_0,\ y_2=\frac{d_2}{\mu_2^2}L_0. \qquad (15)$$

Область Q ограничена по «неустойчивым» переменным $y_1,\ y_2$. По двум другим жордановым переменным, которые отвечают отрицательным собственным значениям $-\mu_1,\ -\mu_2$, область управляемости не ограничена, т. е. она представляет собой цилиндрическое множество [6]. Сечение S этой области плоскостью переменных $y_1,\ y_2$ – открытое множество, симметричное относительно начала координат:

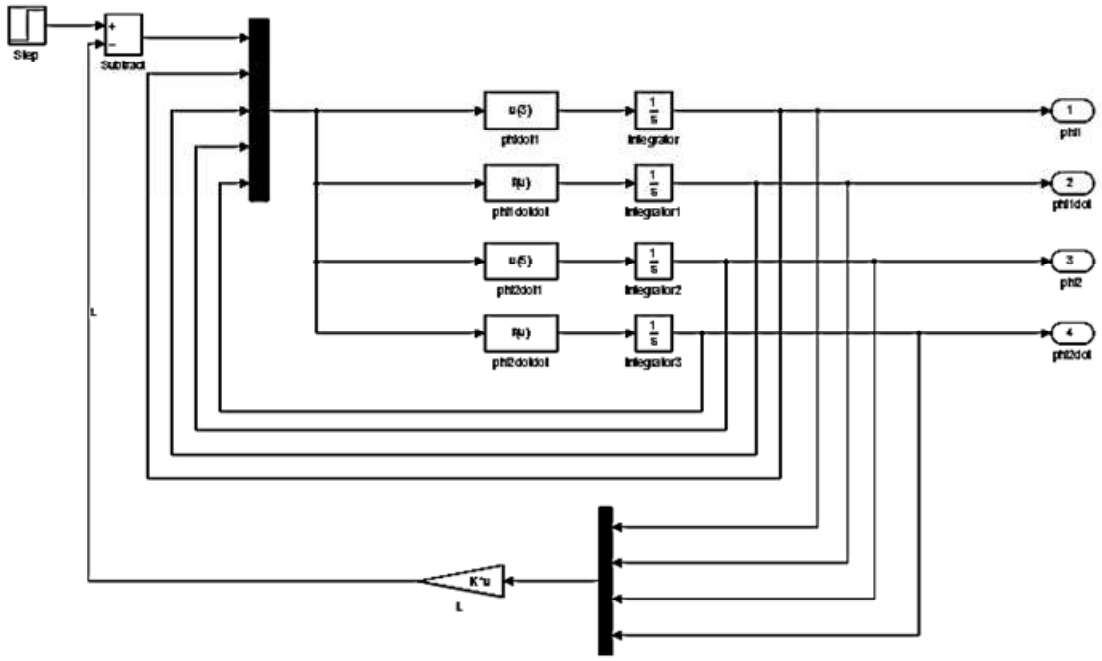


Рис. 2

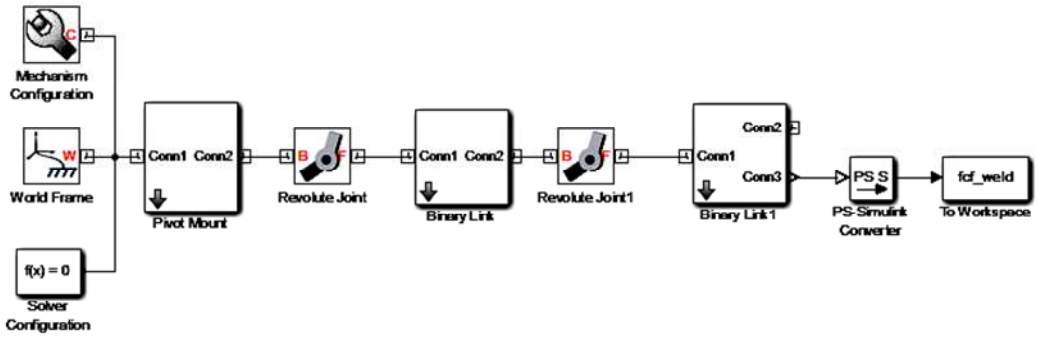


Рис. 3

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0. \qquad (16)$$

Множество S – область управляемости системы (13), т. е. множество начальных состояний $y_1(0),\ y_2(0)$, из которых система (13) может быть приведена в начало координат (16) при помощи управления $L(t) \in U$. Граница этого множества состоит из двух симметричных относительно начала координат интегральных траекторий системы (13), которые получаются при $L(t) \equiv L_0$ и при $L(t) \equiv -L_0$. Одна из этих траекторий, построенная при $L(t) \equiv L_0$, начинается при $t = 0$ из точки (15), а при $t \to \infty$ заканчивается в точке (14). Ее уравнение имеет вид [2]

$$y_1(\mathrm{t}) = \frac{d_1 L_0}{\mu_1^{\,2}}(2e^{-\mu_1 t} - 1). \qquad (17)$$

Другая траектория имеет вид

$$y_2(t) = \frac{d_2 L_0}{\mu_2^{\,2}}(2e^{-\mu_2 t} - 1)\ (-\infty < t < 0)\,. \qquad (18)$$

Другими словами, траектория (18) начинается при $t \to \infty$ из точки (15) и заканчивается при $t = 0$ в точке (14). В точках (14) и (15) граничные траектории (17), (18) «смыкаются», и они являются угловыми точками области S, а также угловыми точками прямоугольника

$$|y_1| < |d_1|\frac{L_0}{\mu_1^{\,2}},\ |y_2| < |d_2|\frac{L_0}{\mu_2^{\,2}},$$

внутри которого лежит область управляемости S. Две другие угловые точки этого прямоугольника симметричны точкам (14), (15) относительно оси абсцисс (или ординат) [2].

Результаты моделирования системы двухзвенного перевернутого маятника. На рис. 2 на основе математической модели перевернутого двухзвенного маятника как объекта управления с помощью графических средств редактора Simulink Toolbox сформирована блок-схема системы управления.

На рис. 3 представлена структурная схема 3D-модели двухзвенного перевернутого маятника.

Параметры системы следующие: $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.2$, $l = 0.4$, $r = 0.08$, $g = 9.8$.

Проверим устойчивость системы. Устойчивость положения равновесия в малом может быть исследована по линеаризованной модели. Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной модели является отрицательность действительных частей всех собственных значений матрицы *A*, что можно проверить по команде:

```
>> eig(A)
ans =
 0
 0
 0.1222
 –0.1222.
```

Ясно, что верхнее положение равновесия неустойчиво: одно собственное значение лежит в правой полуплоскости.

Для стабилизации вертикального положения перевернутого маятника построим регулятор состояния. Регулятор состояния реализует следующий алгоритм:

$$L = -(g_1\varphi_1 + g_2\dot{\varphi}_1 + g_3\varphi_2 + g_4\dot{\varphi}_2).$$

Матрица регулятора *G* может быть определена двумя методами:

– размещение корней (собственных значений);

– минимизация интегрального квадратичного функционала.

Выберем первый метод и назначим следующие желаемые корни:

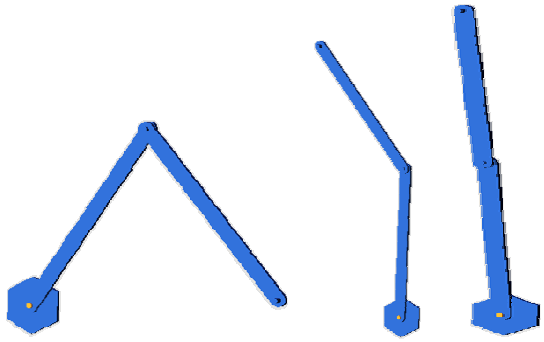
```
>> p = [–1; –2; –3; –0.1222].
```

Один (устойчивый) корень объекта управления оставим.

Поскольку объект полностью управляем, то существует матрица *G*, такая, что собственные значения матрицы коэффициентов замкнутой системы (A – B*G) имеют желаемые корни. Найдем эту матрицу:

```
>> G = place (A, B, p);
G = [12; 3; 0.0017; 0.0126].
```

Проведем имитационные исследования системы управления, объектом и регулятором состояния $L = -(12\varphi_1 + 3\dot{\varphi}_1 + 0.0017\varphi_2 + 0.0126\dot{\varphi}_2)$, синтезированным по линеаризованной модели объекта.



а *б* *в*

Рис. 4

Для наглядного представления была составлена структурная схема 3D-моделирования для управления перевернутым двухзвенным маятником. На рис. 4, *а* изображен перевернутый двухзвенный маятник в начальном положении. На рис. 4, *в* его установившееся значение. Для наглядности продемонстрировано действие импульсного возмущения, после которого маятник возвращался в свое вертикальное положение.

В работе были проведены исследования в пакете Simulink/Toolbox, и результаты показали, что данный пакет полностью выполняет поставленные задачи, а именно для 3D-моделирования в режиме стабилизации показывает характер переходных процессов с асимптотической устойчивостью, а также наблюдается процесс восстановления маятника под действием режима кратковременного возмущения (импульса).

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России – задание № 2014/187 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.

2. Формальский А. М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 232 с.

3. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматлит, 1962. 484 с.

4. Габриелян М. С., Красовский Н. Н. К задаче о стабилизации механической системы // Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28, вып. 5. С. 801–811.

5. Формальский А. М. Об угловых точках границ областей достижимости // Прикл. матем. и мех. 1983. Т. 47, вып. 4. С. 556–574.

6. Степанец Г. А., Тарарощенко Н. С. О структуре законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость систем управления с неустойчивым объектом // ДАН СССР. 1970. Т. 193, № 4. С. 774–776.

N. D. Polyakhov, R. I. Galiullin
Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

CONTROL OF DOUBLE INVERTED PENDULUM

A control system of double inverted pendulum. The problems of the dynamics of the system in various modes. The simulation results show the performance of the control system. The results of modeling in Matlab/Simulink.

Double inverted pendulum, Lagrange equations, mathematical model, linearization, manageability, stabilization

УДК 629.7.083

Е. Н. Шаповалов, Ю. Б. Остапченко, А. В. Экало, С. А. Беляев
ОАО «Научно-инженерный центр Санкт-Петербургского электротехнического университета»

С. А. Кудряков
Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации

Актуальные вопросы теории эксплуатации авиационной и ракетно-космической техники

На основе анализа общих черт сложных технических комплексов и проблем их эксплуатации сделан вывод об общности причин этих проблем. Дана краткая характеристика объекта и субъекта эксплуатации, в общем виде сформулирован подход к проектированию системы эксплуатации как к важнейшей задаче теории эксплуатации авиационной и ракетно-космической техники.

Эксплуатация, система эксплуатации, объект эксплуатации, субъект эксплуатации, сложный технический комплекс, авиационная и ракетно-космическая техника

По мере развития и усложнения техники менялась роль человека при ее эксплуатации, как и само отношение к процессу эксплуатации техники. Человек становился интегрированным элементом сложной системы, объективно возникающей при его взаимодействии с техникой, эффективность функционирования которой зависела как от технических составляющих, так и от деятельности человека (оператора, руководителя, собственника).

Усложнение процесса эксплуатации как процесса взаимодействия человека и техники обусловливалось появлением проблем, требующих для своего разрешения научного подхода. Во многом эти проблемы были связаны с тем, что объектами эксплуатации во многих сферах деятельности, в частности в ракетно-космической и авиационной отраслях промышленности становились сложные технические комплексы (СТК), которым свойственны следующие характерные черты:

– иерархическая структура СТК, многоэтапность достижения цели эксплуатации и наличие функциональных подсистем. При этом невыполнение функций какой-либо подсистемой может приводить не к невыполнению задачи, стоящей перед СТК, а только к снижению эффективности его функционирования;

– персонал, необходимый для достижения цели эксплуатации СТК, представляет собой некоторое множество коллективов, функционирующих во главе с руководителями разных рангов;

– наличие органов управления подсистемами и СТК в целом, на которых возложены функции управления, планирования, организации, контроля эксплуатации, оценка складывающейся обстановки и принятие решений.