УДК 621.753

М. Н. Боброва, Е. С. Сулоева, Э. И. Цветков
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянов (Ленина)

Зависимость достоверности результатов сличения от адекватности дисперсии случайной погрешности

Рассматривается влияние адекватности дисперсии случайной погрешности на достоверность результатов сличения двух эталонов при установленных требованиях к допустимому уровню вероятности ошибок первого или второго рода или вероятности принадлежности разности не исключенных систематических погрешностей эталонов к установленному интервалу. Представлены иллюстративные примеры.

Достоверность, сличение, априорные знания, эталоны, метрологический анализ, ошибка первого рода, ошибка второго рода, неисключенная систематическая погрешность

Процедура сличения направлена на установление соответствия эталонных средств требованиям и представляет собой физический эксперимент (компарирование) с последующей обработкой получаемых результатов. Подобное описание обработки результатов можно найти в [1], [2]. Представляет большой интерес вариант оценки результатов, предложенный в [3], где результат сличения двух эталонов $\delta\lambda_{12}$ представлен суммой двух компонент, первая из которых равна разности неисключенных систематических погрешностей $(\Delta_{сист}\lambda_{12})$, а вторая – дополнительной погрешности $(\Delta_{доп}\lambda_{12})$, включающей в себя разность случайных погрешностей сличаемых эталонов $(\Delta_{сл}\lambda_{12})$, а также погрешности вспомогательных средств, используемых при сличении (компараторов и транспортируемых эталонов).

Решение о соответствии сличаемых эталонов требованиям принимается по разностному результату бинарного сличения $\delta\lambda_{12}$, который можно представить таким образом:

$$\delta\lambda_{12} = \Delta_{сист}\lambda_{12} + \Delta_{доп}\lambda_{12},$$

где $\Delta_{сист}\lambda_{12} = \Delta_{сист}\lambda_1 - \Delta_{сист}\lambda_2$; $\Delta_{доп}\lambda_{12} = \Delta_{сл}\lambda_1 - \Delta_{сл}\lambda_2 + \Delta_{комп}\lambda_{12} + \Delta_{тран}\lambda_{12}$.

Полагая погрешность компарирования $(\Delta_{комп}\lambda_{12})$ и погрешности от транспортируемых средств сравнения $(\Delta_{тран}\lambda_{12})$ пренебрежимо малыми, получим:

$$\Delta_{доп}\lambda_{12} = \Delta_{сл}\lambda_{12} = \Delta_{сл}\lambda_1 - \Delta_{сл}\lambda_2.$$

Следовательно, разностный результат бинарного сличения можно представить как сумму разностей систематических и случайных погрешностей сличаемых эталонов: $\delta\lambda_{12} = \Delta_{сист}\lambda_{12} + \Delta_{сл}\lambda_{12}$.

В [4] представлена процедура принятия решения о соответствии сличаемых эталонов требованиям на основе использования апостериорной вероятности $P[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \mid \delta\lambda_{12}]$ при фиксированном $\delta\lambda_{12}$. Условное распределение плотности вероятности $\Delta_{сист}\lambda_{12}$ при имеющейся информации о плотности распределения дополнительной погрешности $\omega(\Delta_{сл}\lambda_{12})$ и фиксированном результате бинарного сличения $\delta\lambda_{12}$ определяется выражением

$$\omega(\Delta_{сист}\lambda_{12} \mid \delta\lambda_{12}) = \omega(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сл}\lambda_{12}).$$

По данному условному распределению можно оценить результаты, используя интегральную вероятность попадания систематических погрешностей в некоторый симметричный интервал $[-c; c]$. Значения $-c$ и c характеризуют требования, предъявляемые к разности неисключенных систематических погрешностей $(\Delta_{сист}\lambda_{12})$. Вероятность попадания разности систематических погрешностей в установленный интервал $[-c; c]$ при фиксированном значении разностного результата бинарного сличения равна:

$$P\left[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}\right] =$$
$$= \int_{-c}^{c} \omega\left(\Delta_{сист}\lambda_{12} \,|\, \delta\lambda_{12}\right) d\left(\Delta_{сист}\lambda_{12}\right).$$

Помимо интервала для систематических погрешностей $[-c; c]$ необходимо ввести в рассмотрение интервал $[-\Delta п; \Delta п]$, относящийся к результатам сличения. Он характеризует область значений $\delta\lambda_{12}$, при которых выполняется требование $P[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}] \geq P_{треб}$. Таким образом, правило принятия решения может быть представлено следующим образом: $\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \to$ эталоны соответствуют требованию $P[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in$ $\in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}] \geq P_{треб} \vee \delta\lambda_{12} \notin [-\Delta п; \Delta п] \to$ эталоны не соответствуют требованию $P[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in$ $\in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}] \geq P_{треб}$.

Пороговое значение $\Delta п$ определяется как решение уравнения

$$\Delta п = \mathrm{rad}[P(\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \delta\lambda_{12})] = P_{треб}.$$

Очевидно, что при принятии решения о соответствии эталонов предъявляемым требованиям возможны ошибки первого и второго рода.

Вероятность ошибки первого рода в случае $\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \wedge \delta\lambda_{12} \notin [-\Delta п; \Delta п]$ равна:

$$P_{\mathrm{I}} = 1 - \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \omega\left(\frac{\delta\lambda_{12}}{\Delta_{сист}\lambda_{12}}\right) d\delta\lambda_{12}.$$

Соответственно, вероятность ошибки второго рода для $\Delta_{сист}\lambda_{12} \notin [-c; c] \wedge \delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п]$ равна:

$$P_{\mathrm{II}} = \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \omega(\delta\lambda_{12} \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}) d\delta\lambda_{12}.$$

Для указанных вероятностей проведено исследование влияния адекватности предоставляемых данных на достоверность результатов сличения. Под достоверностью сличения в данном случае понимается соответствие используемых критериев требуемым, а под адекватностью априорных знаний (АЗ) – соответствие параметров модели параметрам реальной системы.

Пусть случайная составляющая погрешности распределена по нормальному закону распределения

$$\omega\left(\Delta_{сл}\lambda_{12}\right) = (0, \sigma_{сл}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} e^{\left(-\frac{\Delta_{сл}\lambda_{12}}{2\sigma_{сл}^2}\right)},$$

математическое ожидание равно нулю, а среднеквадратическое отклонение $\sigma_{сл}$ устанавливается исходя из априорных знаний. Априорные знания будут считаться адекватными, если $\sigma_{сл}$ = 1.0, и неадекватными, если $\sigma_{сл}$ = 1.1, 1.2, 1.3.

Оценка влияния адекватности дисперсии (СКО) случайной величины на достоверность сличения определяется следующим выражением:

$$\Delta P = P_{на} - P_{доп},$$

где $P_{на}$ – вероятность ошибок первого или второго рода или вероятность попадания разности систематических погрешностей в установленный интервал, найденные при неадекватных априорных знаниях на уровне порогового значения $\Delta п$; $P_{доп}$ – допустимое значение вероятности ошибок первого или второго рода или вероятности попадания разности систематических погрешностей в установленный интервал при адекватных АЗ.

При адекватном значении АЗ вероятности ошибок первого, второго рода и вероятность попадания в интервал будут рассчитываться по следующим формулам:

$$P_{\mathrm{I}}[\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}] = 1 -$$
$$- \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \exp\left[-\frac{\left(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сист}\lambda_{12}\right)^2}{2\sigma_{сл}^2}\right] d\delta\lambda_{12},$$

$$P_{\mathrm{II}}[\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}] =$$
$$= \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \exp\left[-\frac{\left(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сист}\lambda_{12}\right)^2}{2\sigma_{сл}^2}\right] d\delta\lambda_{12},$$

$$P_{п}[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}] = 1 -$$
$$- \int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \exp\left[-\frac{\left(\Delta_{сист}\lambda_{12} - \delta\lambda_{12}\right)^2}{2\sigma_{сл}^2}\right] d\Delta_{сист}\lambda_{12}.$$

Из изложенного следует, что для оценки влияния адекватности дисперсии случайной величины на достоверность сличения необходимо знать вероятность ошибок первого или второго рода или вероятность попадания разности систематических погрешностей в установленный интервал, найденные при неадекватных АЗ на уровне порогового значения $\Delta п$.

Для нахождения вероятности ошибок первого или второго рода или попадания в требуемый интервал при использовании неадекватных априорных знаний необходимо установить пороговое значение $\Delta п$, при адекватном значении АЗ:

$$\Delta п_I = \mathrm{rad}[P_I(\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}) = P_{доп}] =$$

$$= \mathrm{rad}\left[\left(1 - \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \times \exp\left(\frac{-(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сист}\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}{}^2}\right) d\delta\lambda_{12}\right) = P_{доп}\right],$$

$$\Delta п_{II} = \mathrm{rad}[P_{II}(\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}) = P_{доп}] =$$

$$= \mathrm{rad}\left[\left(\int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \times \exp\left(\frac{-(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сист}\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}{}^2}\right) d\delta\lambda_{12}\right) = P_{доп}\right],$$

$$\Delta п_п = \mathrm{rad}[P_п(\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}) = P_{доп}] =$$

$$= \mathrm{rad}\left[\left(\int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \times \exp\left(\frac{-(\Delta_{сист}\lambda_{12} - \delta\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}{}^2}\right) d\Delta_{сист}\lambda_{12}\right) = P_{доп}\right].$$

При неадекватном значении АЗ вероятности ошибок первого и второго рода и вероятность попадания в интервал будут рассчитываться по следующим формулам:

$$P_{Iна}[\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}] = 1 - \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \exp\left(-\frac{(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сист}\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}^2}\right) d\delta\lambda_{12},$$

$$P_{IIна}[\delta\lambda_{12} \in [-\Delta п; \Delta п] \,|\, \Delta_{сист}\lambda_{12}] = \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \exp\left(-\frac{(\delta\lambda_{12} - \Delta_{сист}\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}^2}\right) d\delta\lambda_{12},$$

$$P_{п.на}[\Delta_{сист}\lambda_{12} \in [-c; c] \,|\, \delta\lambda_{12}] = \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{сл}}} \times \exp\left(-\frac{(\Delta_{сист}\lambda_{12} - \delta\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}^2}\right) d\Delta_{сист}\lambda_{12}.$$

Тогда оценки влияния неадекватности дисперсии случайной величины на достоверность сличения:

$$\Delta P_I = P_{Iна} - P_{доп},$$

$$\Delta P_{II} = P_{IIна} - P_{доп},$$

$$\Delta P_п = P_{п.на} - P_{доп}.$$

Первоначально рассматривается влияние адекватности дисперсии случайной величины на достоверность сличения на примере ошибки первого рода.

Находится зависимость вероятности ошибки первого рода при адекватных априорных знаниях

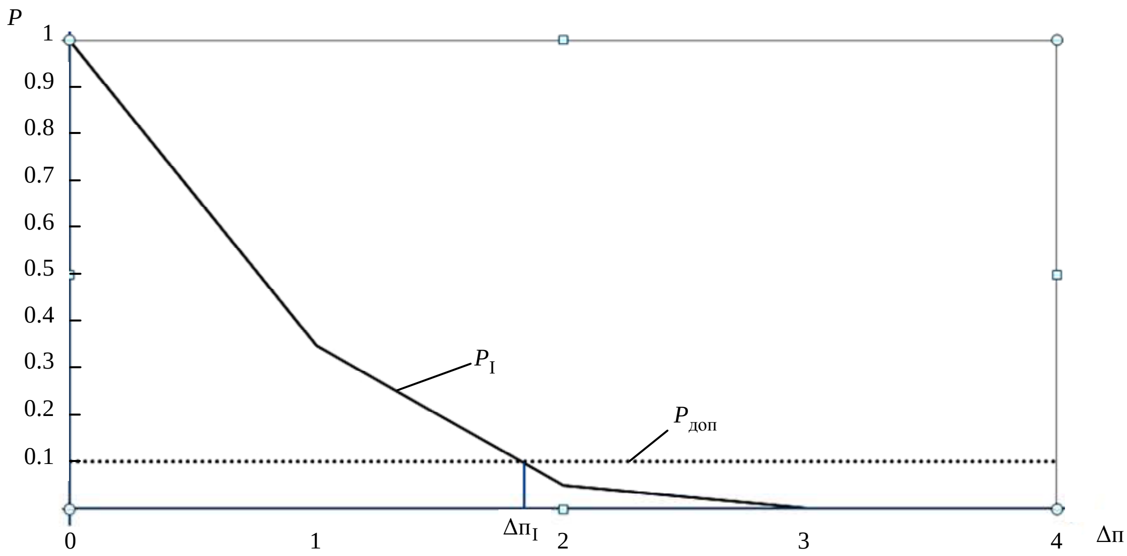

Рис. 1

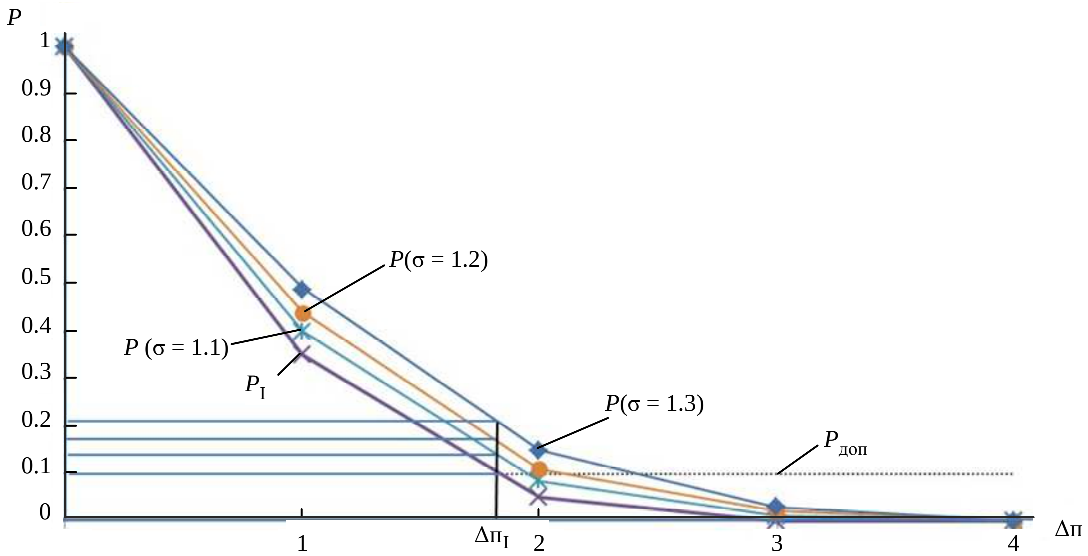

Рис. 2

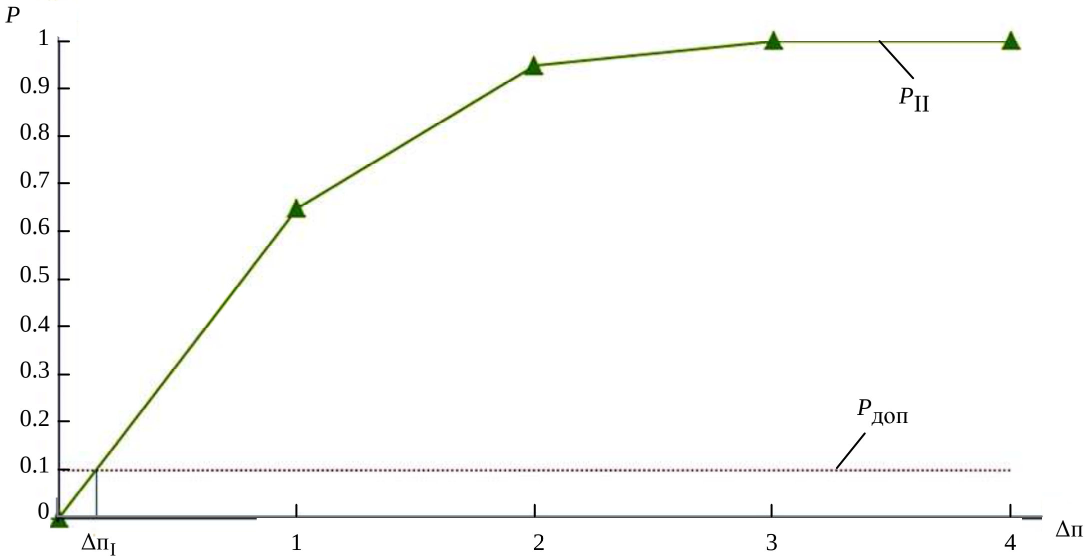

Рис. 3

P_{I}, после чего устанавливается пороговое значение $\Delta п_{\mathrm{I}} = 1.867$ на допустимом уровне вероятности $P_{доп} = 0.1$ (рис. 1).

Затем строятся зависимости вероятности ошибки первого рода при неадекватных априорных знаниях $P_{\mathrm{I}на}$ и находятся числовые значения этих вероятностей на уровне установленного порогового значения $\Delta п_{\mathrm{I}}$ (рис. 2).

После этого оценивается влияние адекватности дисперсии случайной величины на достоверность сличения:

$$\Delta P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{I}на} - P_{доп},$$

$$P_{\mathrm{I}}(\sigma_{12} = 1) = 0.1 \to \Delta P_{\mathrm{I}} = 0 \text{ (адекватные АЗ)},$$

$$P_{\mathrm{I}на}(\sigma_{12} = 1.1) = 0.133 \to \Delta P_{\mathrm{I}} = 0.033,$$

$$P_{\mathrm{I}на}(\sigma_{12} = 1.2) = 0.164 \to \Delta P_{\mathrm{I}} = 0.064,$$

$$P_{\mathrm{I}на}(\sigma_{12} = 1.3) = 0.192 \to \Delta P_{\mathrm{I}} = 0.092.$$

В данном примере $c = 0.1$.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что при каждом отклонении СКО от его адекватного значения на 0.1 значение вероятности ошибки первого рода, полученной при неадекватных АЗ, отклоняется от допустимого значения вероятности в среднем на 0.03.

Подобным образом можно рассмотреть влияние адекватности дисперсии случайной величины на достоверность сличения для ошибки второго рода.

Найдем зависимость вероятности ошибки второго рода при адекватных априорных знаниях P_{II}, после чего установим пороговое значение $\Delta п_{\mathrm{II}}$ (0.254) на допустимом уровне вероятности $P_{доп} = 0.1$ (рис. 3).

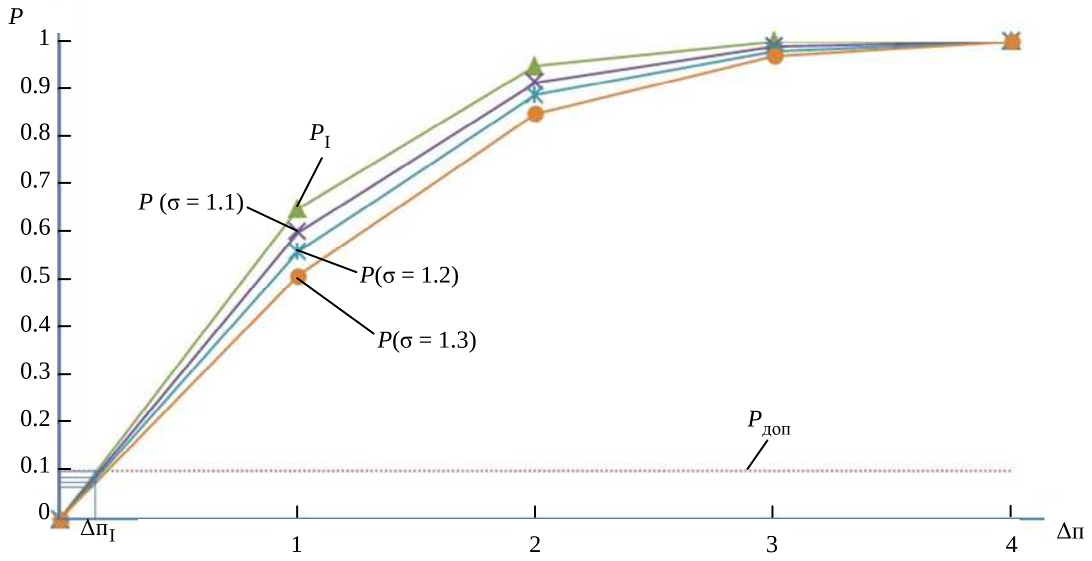

Рис. 4

Затем находят зависимости вероятности ошибки второго рода при неадекватных априорных знаниях $P_{\text{IIна}}$ и числовые значения этих вероятностей на уровне установленного порогового значения $\Delta п_{\text{II}}$ (рис. 4).

После этого оценивается влияние адекватности дисперсии случайной величины на достоверность сличения:

$$\Delta P_{\text{II}} = P_{\text{IIна}} - P_{\text{доп}}\,,$$

$$P_{\text{II}}(\sigma_{12} = 1) = 0.1 \to \Delta P_{\text{II}} = 0 \ \text{(адекватные АЗ)},$$

$$P_{\text{IIна}}(\sigma_{12} = 1.1) = 0.0945 \to \Delta P_{\text{II}} = 0.0055,$$

$$P_{\text{IIна}}(\sigma_{12} = 1.2) = 0.0889 \to \Delta P_{\text{II}} = 0.0111,$$

$$P_{\text{IIна}}(\sigma_{12} = 1.3) = 0.0833 \to \Delta P_{\text{II}} = 0.0167.$$

В данном примере $c = 0.1$.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что при каждом отклонении СКО от его адекватного значения на 0.1 значение вероятности ошибки второго рода, полученной при неадекватных АЗ, отклоняется от допустимого значения вероятности в среднем на 0.006.

Приведенные примеры подтверждают возможность существенной зависимости достоверности результатов верификации эталонов от адекватности АЗ. В общем случае неадекватность выражается в отличии используемой модели случайных погрешностей от их реальных свойств, поскольку модель случайных погрешностей представляется видом распределения плотности вероятности и значениями параметров. Общие соотношения, характеризующие ошибки граничных значений:

$$\Delta P_{\text{I}} = P_{\text{Iна}} - P_{\text{доп}} = 1 - $$

$$- \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \omega_{\text{на}}(\delta\lambda_{12} \mid \Delta_{\text{сист}}\lambda_{12} \in [-c; c])\, d\delta\lambda_{12} - P_{\text{доп}},$$

$$\Delta P_{\text{II}} = P_{\text{IIна}} - P_{\text{доп}} =$$

$$= \int_{-\Delta п}^{\Delta п} \omega_{\text{на}}(\delta\lambda_{12} \mid \Delta_{\text{сист}}\lambda_{12} \in [-c; c])\, d\delta\lambda_{12} - P_{\text{доп}},$$

$$\Delta P_{\text{п}} = P_{\text{п.на}} - P_{\text{доп}} =$$

$$= \int_{-c}^{c} \omega_{\text{на}}(\Delta_{\text{сист}}\lambda_{12} \mid \delta\lambda_{12} \in [-c; c])\, d\Delta_{\text{сист}}\lambda_{12} - P_{\text{доп}}.$$

Здесь $\omega_{\text{на}}(\cdot)$ – неадекватное распределение плотности вероятности.

Таким образом, исследовано влияние адекватности дисперсии случайной погрешности эталонов сличения на достоверность полученных результатов с использованием вероятностных характеристик. Показана зависимость для фиксированных пороговых уровней существования систематических погрешностей для различных расхождений, обусловленных неадекватностью предоставляемых априорных знаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Cox M. G. The evaluation of key comparison data // An introduction Metrologia. 2002. Vol. 39. P. 589–595.

2. Чуновкина А. Г. Оценивание данных ключевых сличений национальных эталонов. СПб.: Профессионал, 2009. 120 с.

3. Сулоева Е. С., Цветков Э. И., Рзиева М. Т. Особенности принятия решения по результатам сличения N эталонов // Измерительная техника. 2014. № 7. С. 3–7.

4. Сулоева Е. С., Цветков Э. И. Установление правила принятия решения по результатам бинарного сличения эталонов, воспроизводящих требуемое значение величины // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2016. № 2. С. 71–74.

M. N. Bobrova, E. S. Suloeva, E. I. Tsvetkov
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

DEPENDENCE OF RESPONSIBILITY OF RESULTSTHE RISKS OF ADEQUACY OF RANDOM VARIATION DISPERSION

The influence of the adequacy of variances of a random error on the reliability of the results of comparisons of two standards is examined, in the presence of requirements to the permissible level of danger of the first and second kind, or their inconvenience.

Reliability, comparison, a priori knowledge, standards, metrological analysis, first-order error, second-kind error, non-excluded systematic error