

M. A. Vaganov, Yu. A. Grubman, V. V. Demidova  
 Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## TO THE QUESTION ABOUT THE AREA OF THE STATOR AND ROTOR SLOTS OF ASYNCHRONOUS COMMON INDUSTRIAL MOTORS

*The influence of the number of poles, the number of teeth and the values of the magnetic induction of an induction motor on the area of oval and rectangular grooves is analyzed. The change in the values of the set of magnetic inductions does not affect on the area of the slots, with the number of grooves increasing, the total area of the slots increases, the character of the dependence is nonlinear. With an increase in the number of poles, the area of the oval grooves of the stator and rotor decreases, the area of the rectangular stator slots decreases with the transition from bipolar machines to four-pole machines, and then increases, the area of the straight-angle rotor slots decreases to eight-pole machines, increases with further increase.*

**The factor of proportionality of the slot area, the relative diameter of the stator core, the magnetic induction in the air gap, rectangular and oval slots of the stator, the number of poles, the number of slots, the functional multiplier**

УДК 621.313

М. А. Ваганов, И. И. Скобеев  
 Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## КПД и коэффициент мощности синхронного реактивного двигателя

*Рассматривается электрический КПД обмотки статора синхронного реактивного двигателя без учета магнитных потерь в нем, а также его коэффициент мощности. Выполнен анализ выражения электромагнитного момента двигателя с целью обеспечения оптимальной поперечной геометрии относительно этого момента.*

**Синхронный реактивный двигатель, КПД, коэффициент мощности, потребляемая мощность, электромагнитная мощность, электромагнитный момент, оптимальная поперечная геометрия**

В [1] на основании векторной диаграммы синхронного двигателя (СРД) было получено выражение для потребляемого им из сети фазного тока обмотки статора и затем с использованием энергетической диаграммы составлены выражения для потребляемой из сети активной мощности  $P_1$  и электромагнитной мощности  $P_{эм}$ . При этом активная мощность  $P_1 = k_p F_{P\theta}$ , где коэффициент пропорциональности по мощности  $k_p$  и функция потребляемой активной мощности  $F_{P\theta}$  определяются следующими выражениями соответственно:

$$k_p = m_1 \frac{U_1^2}{r_1}, F_{P\theta} = \frac{2 + (x_{d*} - x_{q*}) \sin 2\theta}{2(1 + x_{d*} x_{q*})}. \quad (1)$$

Электромагнитная мощность СРД определяется выражением из [1]  $P_{эм} = k_p F_{M\theta}$ . Коэффициенты пропорциональности  $k_p$  для потребляемой и электромагнитной мощностей одинаковы. Функция электромагнитной мощности

$$F_{M\theta} = \frac{x_{d*} - x_{q*}}{2(1 + x_{d*} x_{q*})^2} \times \\ \times \left[ (x_{q*} - x_{d*}) + (x_{d*} x_{q*} - 1) \sin 2\theta + \right. \\ \left. + (x_{d*} + x_{q*}) \cos 2\theta \right]. \quad (2)$$

В (1) и (2)  $x_{d*} = x_d / \eta$  и  $x_{q*} = x_q / \eta$  представляют собой относительные индуктивные со-

противления обмотки статора СРД по продольной и поперечной осям соответственно, где  $\eta$  – активное сопротивление этой обмотки, а  $x_d$  и  $x_q$  – синхронные индуктивные сопротивления обмотки статора СРД по продольной и поперечной осям соответственно. Значения индуктивных сопротивлений  $x_{d*}$ ,  $x_{q*}$  могут меняться теоретически от нуля до бесконечности, возрастая с увеличением мощности СРД. Угол  $\theta$  обусловлен нагрузкой на валу двигателя и возрастает с повышением тормозного момента на его валу.

Функции мощности  $F_{P\theta}$  и  $F_{M\theta}$  являются по существу функциями двух переменных, из которых переменная  $\theta$  в данном случае основная, а переменную  $x_{d*}$  следует рассматривать как варьируемый параметр (имеется в виду, что величина  $x_{q*}$  зависит от  $x_{d*}$ ).

Из (1) и (2) видно, что соответствующие им мощности имеют постоянные составляющие относительно угла нагрузки  $\theta$ , причем в потребляемой мощности  $P_1$  указанная составляющая положительна, в то время как для электромагнитной мощности  $P_{эм}$  постоянная составляющая оказывается отрицательной.

Числовые значения функций  $F_{P\theta}$  и  $F_{M\theta}$ , характеризующих мощности  $P_1$  и  $P_{эм}$ , зависят от параметра  $x_d$  и уменьшаются при возрастании  $x_d$ . Предполагается, что отношение  $x_{q*}/x_{d*}$  остается практически постоянным для фиксированной конструкции ротора СРД, т. е. меняется незначительно при изменении мощности двигателя.

На рис. 1–3 графически представлены пары зависимостей  $F_{P\theta} = f(\theta)$ ,  $F_{M\theta} = f(\theta)$  для трех значений параметра  $x_{d*} = 3, 10$  и  $100$  соответственно. Из рис. 1–3 видно, что во всех случаях графики  $F_{M\theta} = f(\theta)$  располагаются ниже графиков  $F_{P\theta} = f(\theta)$ , но при этом максимумы указанных функций смещены друг относительно друга по горизонтали, т. е. критические углы нагрузки  $\theta_{m1}$  и  $\theta_{mэм}$ , соответствующие максимальным значениям функций  $F_{P\theta}$  и  $F_{M\theta}$ , неодинаковы.

Таким образом, с увеличением параметра  $x_{d*}$ , что сопровождается возрастанием мощности СРД, возрастает функция электромагнитной мощности  $F_{M\theta}$ , а значит, и сама электромагнитная мощность  $P_{эм}$ , повышается максимум функции  $F_{M\theta}$ , смещается вправо, в сторону больших значений угла нагрузки  $\theta$ , но при этом максимум потребляемой мощности сохраняет свое положение.

В частности, для функции  $F_{P\theta} = f(\theta)$  критический угол нагрузки не зависит от числового значения параметра  $x_{d*}$ , т. е. является относительно него постоянным и составляет  $\theta_{m1} = 45^\circ$ .

Для определения критического угла  $\theta_{mэм}$ , характеризующего максимум функции  $F_{M\theta} = f(\theta)$ , необходимо составить выражение для производной  $dF_{M\theta}/d\theta$ , приравнять его нулю и полученное тригонометрическое уравнение, которое в соответствии с (2) будет иметь вид  $(x_{d*}x_{q*} - 1)\cos 2\theta - (x_{d*} + x_{q*})\sin 2\theta = 0$ , решить его относительно угла  $\theta$ . В результате получим

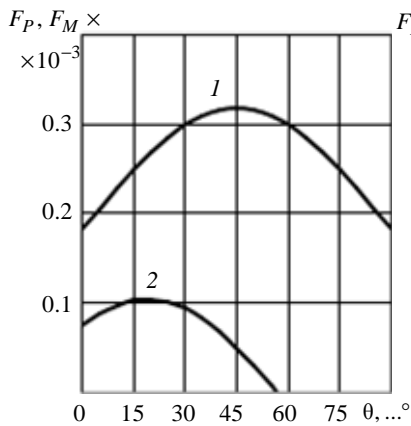


Рис. 1

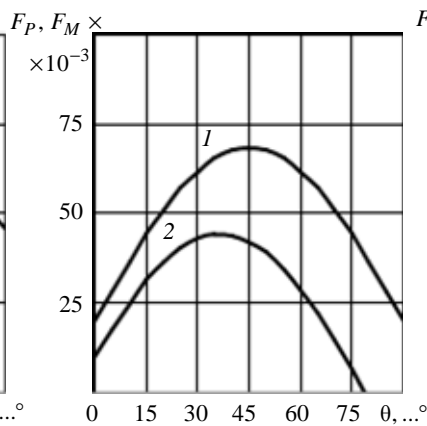


Рис. 2

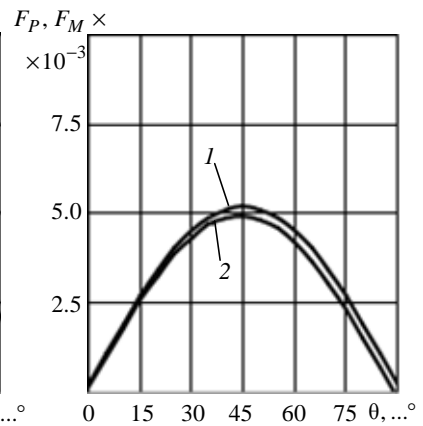


Рис. 3

$$\theta_{mЭМ} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x_{d^*} x_{q^*} - 1}{x_{d^*} + x_{q^*}} = \frac{1}{2} \arctg \frac{\beta x_{d^*}^2 - 1}{x_{d^*} (1 + \beta)}. \quad (3)$$

На рис. 4 графически представлены две зависимости:  $\theta_{m1} = 45^\circ$  (прямая 1) и по (3)  $\theta_{mЭМ} = f(x_{d^*})$  для  $x_{q^*}/x_{d^*} = \beta = \text{const}$ , где  $\beta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  (кривые 2–5 соответственно). Как видно из рис. 4, увеличение параметра  $x_{d^*}$  сопровождается возрастанием угла  $\theta_{mЭМ}$ , который, в конечном итоге, в пределе стремится к  $45^\circ$  независимо от значения коэффициента  $\beta$ , что согласуется с классической теорией синхронных машин в части, касающейся СРД. Кривые рассматриваемой зависимости, построенные при разных значениях параметра  $\beta$ , практически совпадают, образуя общую кривую 2.

$\theta_{m1}, \theta_{mЭМ}, \dots^\circ$

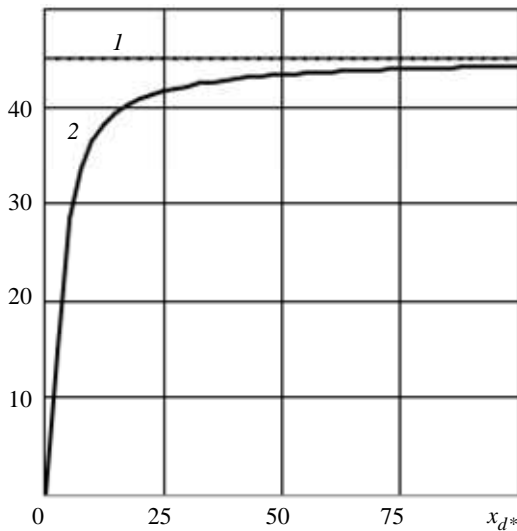


Рис. 4

Имея в виду два вспомогательных тригонометрических соотношения:  $\sin x = 1/\sqrt{1+\text{tg}^2 x}$ ,  $\cos x = 1/\sqrt{1+\text{tg}^2 x}$ , составим с учетом (3) выражения

$$\sin 2\theta_{mЭМ} = (x_{d^*} x_{q^*} - 1) / \sqrt{(1+x_{d^*}^2)(1+x_{q^*}^2)},$$

$$\cos 2\theta_{mЭМ} = (x_{d^*} + x_{q^*}) / \sqrt{(1+x_{d^*}^2)(1+x_{q^*}^2)},$$

подставив которые в (2), получим выражение, определяющее максимум функции электромагнитной мощности СРД относительно угла нагрузки  $\theta$ :

$$F_{M\theta m} = \frac{x_{d^*} - x_{q^*}}{2(1+x_{d^*} x_{q^*})^2} \left[ \sqrt{(1+x_{d^*}^2)(1+x_{q^*}^2)} - (x_{d^*} - x_{q^*}) \right] =$$

$$= \frac{x_{d^*}(1-\beta)}{2(1+\beta x_{d^*}^2)^2} \times$$

$$\times \left[ \sqrt{(1+x_{d^*}^2)(1+\beta^2 x_{d^*}^2)} - x_{d^*}(1-\beta) \right].$$

На рис. 5 графически представлена зависимость  $F_{M\theta m} = f(x_{d^*})$  при  $\beta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  (кривые 1–4 соответственно). Возрастание параметра  $x_{d^*}$  сопровождается снижением максимума величины  $F_{M\theta m}$ , но при учете коэффициента пропорциональности по мощности  $k_p$  действительное значение максимума электромагнитной мощности  $P_{ЭМ m} = k_p F_{M\theta m}$  повышается. Скорость изменения  $F_{M\theta m}$  существенно зависит от мощности СРД. При увеличении параметра  $\beta$  кривые смещаются вниз.

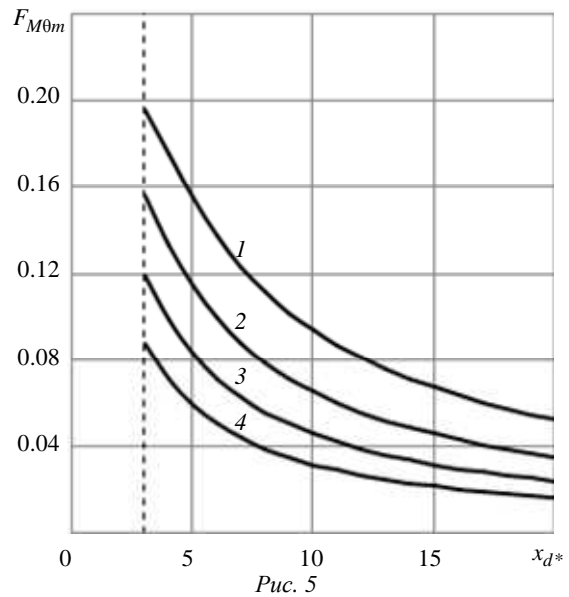


Рис. 5

Поскольку электромагнитный момент синхронной машины  $M_{ЭМ} = P_{ЭМ}/\omega_1$ , где  $\omega_1$  – синхронная скорость, то, следовательно, выражение (3) определяет также критический угол нагрузки СРД по электромагнитному моменту, а максимальный электромагнитный момент –  $M_{ЭМ m} = P_{ЭМ m}/\omega_1$ , где максимальная электромагнитная мощность  $P_{ЭМ m}$  соответствует своей функции  $F_{M\theta m}$ .

Из рис. 1–3 видно, что ширина кривой  $F_{P\theta} = f(\theta)$  в ее основании, определяющая область положительных значений этой функции, превосходит  $180^\circ$ . Для определения положения нулевых значений данной функции, т. е. значений угла  $\theta_0$ , при которых функция  $F_{P\theta} = f(\theta)$  обращается в ноль, воспользуемся вторым из выражений (1) и, приравняв нулю его числитель, найдем значения угла  $\theta_0$ .

Но прежде всего следует обратить внимание на то обстоятельство, что в СРД, работающем под нагрузкой, значения угла  $\theta$ , полученные в результате анализа его статической модели, составленной при учете активного сопротивления обмотки статора, могут отличаться от значений этого угла как угла между осью МДС обмотки статора и продольной осью ротора классической модели синхронной, не учитывающей активное сопротивление обмотки статора. По этой причине целесообразно ввести в рассмотрение некоторый фиктивный или виртуальный угол  $\theta_r$ , учитывающий сопротивление  $r_1$  и не имеющий реального физического смысла.

Таким образом, на основании второго из выражений (1) имеем  $2 + (x_{d*} - x_{q*}) \sin 2\theta = 0$  и отсюда угол  $\theta'_{r0}$ , характеризующий левую границу положительных значений функции  $F_{P\theta} = f(\theta)$ , будет определяться выражением  $\theta'_{r0} = -0.5 \times \arcsin \left[ \frac{2}{(x_{d*} - x_{q*})} \right]$ . Так как аргумент  $\arcsin$  не может быть больше единицы, то отсюда получим ограничивающее условие для минимального значения параметра  $x_{d*}$ , а именно  $x_{d*} = x_{d*\min} \geq 2/(1-\beta)$ . Поэтому, например, при  $\beta = 1/3$   $x_{d*\min} \geq 3$ .

Имея в виду вертикальную симметрию функции  $F_{P\theta} = f(\theta)$ , получим выражение для правой нулевой границы  $\theta''_{r0}$  данной функции, а именно  $\theta''_{r0} = \pi + 0.5 \arcsin \left[ \frac{2}{(x_{d*} - x_{q*})} \right]$ . В результате, вводя в рассмотрение виртуальный угол  $\theta_r$ , за базу принимаем классический интервал значений физического угла  $\theta = (0; \pi)$ , который реализуется при  $x_{d*} \rightarrow \infty$ .

Из (2) следует, что функция электромагнитной мощности  $F_{M\theta} = f(\theta)$  обращается в ноль,

если один из ее множителей числителя  $(x_{q*} - x_{d*}) + (x_{d*}x_{q*} - 1) \sin 2\theta + (x_{d*} + x_{q*}) \cos 2\theta = 0$  и после необходимых преобразований и обозначений  $x_{q*} - x_{d*} = a$ ,  $x_{d*}x_{q*} - 1 = b$ ,  $x_{d*} + x_{q*} = c$  примет вид  $(b^2 + c^2) \sin^2 2\theta + 2ab \sin 2\theta + a^2 + c^2 = 0$ . Решение данного квадратного уравнения относительно  $\sin 2\theta$  имеет вид для левой границы  $\theta'_{r0M} = -2x_{d*} / (1 + x_{d*}^2)$  и для правой  $\theta''_{r0M} = 2x_{q*} / (1 + x_{q*}^2)$ . Из этого следует, что относительно функции электромагнитной мощности  $F_{M\theta} = f(\theta)$  обе границы смещаются влево, но на разные значения, и так как для абсолютных значений  $|\theta'_{r0M}| < |\theta''_{r0M}|$ , то, следовательно, интервал положительных значений функции электромагнитной мощности сужается при учете активного сопротивления  $r_1$ .

Электрические потери в обмотке статора СРД определяются выражением из [1]  $P_{M1} = k_P F_{I\theta}^2$ , в котором величина  $F_{I\theta}$  представляет собой функцию тока обмотки статора СРД, имеющую следующий вид:

$$F_{I\theta} = \left\{ \left[ (2 + x_{d*}^2 + x_{q*}^2) + 2(x_{d*} - x_{q*}) \sin 2\theta + (x_{d*}^2 - x_{q*}^2) \cos 2\theta \right] / 2 \times (1 + x_{d*}x_{q*})^2 \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что функция тока  $F_{I\theta}$  представляет функцию двух переменных – угла нагрузки  $\theta$  и параметра  $x_{d*}$ . Поскольку потери в обмотке статора СРД  $P_{M1}$  пропорциональны квадрату функции тока, то в дальнейшем будем оперировать выражением

$$F_{I\theta}^2 = \left[ (2 + x_{d*}^2 + x_{q*}^2) + 2(x_{d*} - x_{q*}) \sin 2\theta + (x_{d*}^2 - x_{q*}^2) \cos 2\theta \right] / 2(1 + x_{d*}x_{q*})^2, \quad (5)$$

из которого следует, что функция  $F_{I\theta}^2$  имеет постоянную составляющую, не зависящую от угла нагрузки  $\theta$ , и переменную, являющуюся функцией этого угла.

Таким образом, при учете активного сопротивления обмотки статора появляются электриче-

ские потери в обмотке статора, пропорциональные квадрату тока этой обмотки статора, которые в соответствии с [1] можно записать в виде  $P_{M1} = m_1 I_1^2 r_1 = k_P F_{I\theta}^2$ . Электромагнитная мощность  $P_{ЭМ}$  будет определяться разностью между потребляемой мощностью  $P_1$  и электрическими потерями в обмотке статора  $P_{M1}$ , т. е.  $P_{ЭМ} = P_1 - P_{M1}$ . Так как  $P_{M1}$  определяется функцией тока обмотки статора  $F_{I\theta}$ , зависящей от нагрузки на валу СРД, а значит, от угла нагрузки  $\theta$ , и, следовательно, потери  $P_{M1}$  оказываются переменными, то целесообразно ввести в рассмотрение понятие электрического КПД статора СРД  $\eta_{э}$  и определить его выражением  $\eta_{э\theta} = P_{ЭМ}/P_1 = (P_1 - P_{M1})/P_1 = 1 - P_{M1}/P_1$ . Принимая во внимание функции соответствующих мощностей, получим

$$\eta_{э\theta} = 1 - F_{I\theta}^2 / F_{P\theta} \quad (6)$$

Можно предположить, что при холостом ходе СРД его КПД будет иметь нулевое значение и точно так же при значительной нагрузке этот КПД будет стремиться к нулю. Поэтому можно допустить, что при некотором значении угла нагрузки  $\theta = \theta_m$  электрический КПД обмотки статора СРД примет максимальное значение  $\eta_{э\theta_m}$ . Для определения величины  $\theta_m$  вернемся к (6), в котором интерес представляет лишь отношение  $F_{I\theta}^2 / F_{P\theta}$ , имеющее физический смысл относительных электрических потерь в обмотке статора, и, соответственно, минимум этих потерь будет определяться максимумом электрического КПД двигателя. Данное отношение при учете (1) и (5) примет вид

$$F_{I\theta}^2 / F_{P\theta} = \left[ (2 + x_{d*}^2 + x_{q*}^2) + 2(x_{d*} - x_{q*}) \sin 2\theta - (x_{d*}^2 - x_{q*}^2) \cos 2\theta \right] / 2(1 + x_{d*}x_{q*}) \times \left[ 2 + (x_{d*} - x_{q*}) \sin 2\theta \right] \quad (7)$$

Составим выражение для числителя производной  $\frac{d}{d\theta} \frac{F_{I\theta}^2}{F_{P\theta}}$ , приравняем его нулю и после необходимых преобразований получим следующее тригонометрическое уравнение относительно переменной  $\theta$ :

$$\left( 2 - x_{d*}^2 - x_{q*}^2 \right) \cos 2\theta + 2(x_{d*} + x_{q*}) \sin 2\theta + (x_{d*}^2 - x_{q*}^2) = 0 \quad (8)$$

Решение будет иметь более простую форму, если ввести в рассмотрение функцию  $\operatorname{tg} \theta$ , используя соотношения  $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$  и  $\cos \theta = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$ , а также учитывая, что  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ , и тогда (8) примет вид  $(x_{d*}^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta + 2(x_{d*} + x_{q*}) \operatorname{tg} \theta + (1 - x_{q*}^2) = 0$  и его решение –

$$\operatorname{tg} \theta_m = \left[ -(x_{d*} + x_{q*}) \pm (1 + x_{d*}x_{q*}) \right] / (x_{d*}^2 - 1) \quad (9)$$

Следует иметь в виду, что в большинстве случаев  $x_{d*} > 1$  и, чтобы получить положительное значение угла  $\theta$ , необходимо принять в (9) знак «+». При этом условии окончательно получим

$$\operatorname{tg} \theta_m = (x_{q*} - 1) / (x_{d*} + 1); \quad (10)$$

$$\theta_m = \operatorname{arctg} (x_{q*} - 1) / (x_{d*} + 1).$$

При учете обозначения  $\beta = x_{q*} / x_{d*}$  (10) примет вид

$$\theta_m = \operatorname{arctg} (\beta x_{d*} - 1) / (x_{d*} + 1) \quad (11)$$

Зависимость  $\theta_m = f(x_{d*})$  при  $\beta = \text{const}$ , определяемая выражением (11), графически представлена на рис. 6 для четырех значений  $\beta =$

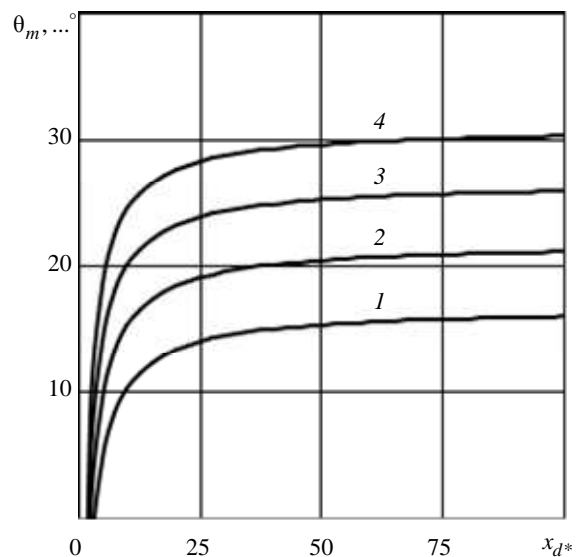


Рис. 6

= 0.3, 0.4, 0.5 и 0.6 (кривые 1–4 соответственно). Видно, что прежде всего повышение увеличение параметра  $x_{d*}$ , т. е. мощности СРД, имеет своим следствием увеличение критического угла  $\theta_m$  и стремящегося к своему предельному значению  $45^\circ$ , при этом меньшим значениям вспомогательного параметра  $\beta$  соответствуют меньшие значения угла  $\theta_m$ .

Подставив из (10) значение угла  $\theta_m$  в (7), получим выражение для минимума относительных электрических потерь в обмотке статора  $(F_{\theta}^2/F_{P\theta})_{\min} = 2/(2 + x_{d*} - x_{q*})$ , и тогда максимум электрического КПД обмотки статора СРД по угловой характеристике в соответствии с (6) будет определяться достаточно простым выражением

$$\eta_{эм\theta} = (x_{d*} - x_{q*}) / (2 + x_{d*} - x_{q*}) = x_{d*}(1 - \beta) / (2 + x_{d*} - \beta x_{d*}). \quad (12)$$

Зависимость  $\eta_{эм\theta} = f(x_{d*})$  при  $\beta = \text{const}$ , определяемая выражением (12), графически представлена на рис. 7 для четырех значений  $\beta = 0.3, 0.4, 0.5$  и  $0.6$  (кривые 1–4 соответственно). Следует обратить внимание на то, что КПД  $\eta_{эм\theta}$ , как и угол нагрузки  $\theta_m$ , возрастает с увеличением мощности двигателя (относительный параметр  $x_{d*}$ ), но здесь меньшим значениям вспомогательного параметра  $\beta$  соответствуют большие значения КПД  $\eta_{эм\theta}$  двигателя.

Таким образом, учет активного сопротивления  $r_1$  обмотки статора и введение относительных синхронных индуктивных сопротивлений

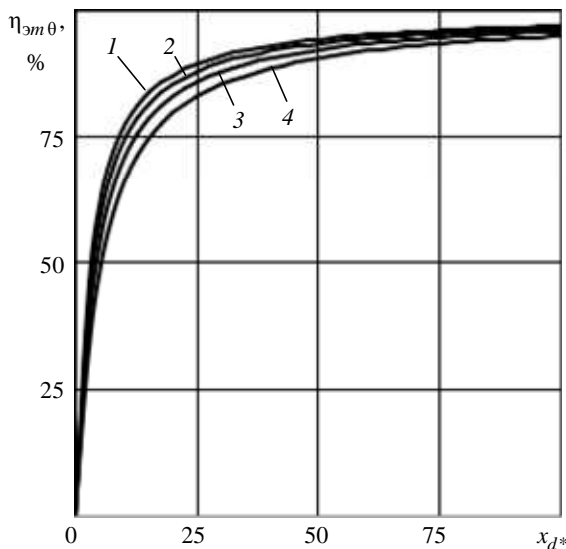


Рис. 7

$x_{d*}$  и  $x_{q*}$ , хотя несколько и усложняет модель СРД, но зато существенно расширяет возможности полученной модели в части, касающейся оценки влияния мощности СРД на его свойства.

На базе векторной диаграммы из [1] составим новую систему уравнений напряжения в проекциях на линию вектора напряжения сети  $\vec{U}_c$  и на направление, ему перпендикулярное:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \cos \varphi_1 + I_q x_{q*} \sin \theta + I_d x_{d*} \cos \theta &= U_1 / r_1, \\ -I_1 \sin \varphi_1 + I_q x_{q*} \cos \theta - I_d x_{d*} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Систему (13) преобразуем таким образом, чтобы она содержала в качестве переменных только ток  $I_1$  обмотки статора и фазу  $\varphi_1$  этого тока относительно напряжения  $U_1$ . С этой целью воспользуемся прежде всего соотношениями  $I_d = I_1 \sin(\varphi_1 - \theta)$  и  $I_q = I_1 \cos(\varphi_1 - \theta)$ , при учете которых система (13) примет вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \cos \varphi_1 + I_1 x_{q*} \sin \theta \cos(\varphi_1 - \theta) + \\ + I_1 x_{d*} \cos \theta \sin(\varphi_1 - \theta) &= U_1 / r_1, \\ -I_1 \sin \varphi_1 + I_1 x_{q*} \cos \theta \cos(\varphi_1 - \theta) - \\ - I_1 x_{d*} \sin \theta \sin(\varphi_1 - \theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Умножим первое уравнение системы (14) на  $\sin \varphi_1$ , второе – на  $\cos \varphi_1$  и сложим их, а затем, умножив первое уравнение этой же системы на  $\cos \varphi_1$ , второе – на  $\sin \varphi_1$  и вычтя из полученного первого выражения второе, получим новую систему уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} I_1 x_{q*} \cos^2(\varphi_1 - \theta) + I_1 x_{d*} \sin^2(\varphi_1 - \theta) &= \\ = (U_1 / r_1) \sin \varphi_1, \\ I_1 + I_1 (x_{d*} - x_{q*}) \sin(\varphi_1 - \theta) \cos(\varphi_1 - \theta) &= \\ = (U_1 / r_1) \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

или, вводя тригонометрические функции двойного аргумента вместо квадратов этих функций:

$$\left. \begin{aligned} I_1 (x_{d*} + x_{q*})_1 + I_1 (x_{d*} - x_{q*}) \times \\ \times \cos 2(\varphi_1 - \theta) &= 2(U_1 / r_1) \sin \varphi_1, \\ 2I_1 + I_1 (x_{d*} - x_{q*}) \sin 2(\varphi_1 - \theta) &= \\ = 2(U_1 / r_1) \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Исключив из полученных уравнений (15)  $\sin 2(\varphi_1 - \theta)$  и  $\cos 2(\varphi_1 - \theta)$ , получим квадратное уравнение относительно тока  $I_1$  обмотки статора

$$I_1^2 (1 + x_{d^*} x_{q^*}) - I_1 U_1 / r_1 \times \\ \times \left[ 2 \cos \varphi_1 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \sin \varphi_1 \right] + (U_1 / r_1)^2 = 0$$

и отсюда

$$I_1 = (U_1 / r_1) F_{I\varphi}, \\ F_{I\varphi} = \left\{ \left[ 2 \cos \varphi_1 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \sin \varphi_1 \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left[ 2 \cos \varphi_1 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \sin \varphi_1 \right]^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 4(1 + x_{d^*} x_{q^*}) \right]^{1/2} \right\} / 2(1 + x_{d^*} x_{q^*}). \quad (16)$$

Запишем (16) в следующем виде:

$$F_{I\varphi} = \cos \varphi_1 \times \\ \times \left\{ \left[ 2 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \operatorname{tg} \varphi_1 \right] - \left[ \left[ 2 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \operatorname{tg} \varphi_1 \right]^2 - \right. \right. \\ \left. \left. 4(1 + x_{d^*} x_{q^*}) (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \right]^{1/2} \right\} / 2(1 + x_{d^*} x_{q^*}). \quad (17)$$

В (16) и (17) величина  $F_{I\varphi}$  представляет собой функцию тока обмотки статора, но в зависимости от фазы тока  $\varphi_1$ , в отличие от функции тока  $F_{I\theta}$ , зависящей от угла нагрузки  $\theta$ .

Имея в виду выражения для потребляемой активной мощности  $P_1 = m_1 U_1 I_1 \cos \varphi_1$ , электрических потерь в обмотке статора  $P_{M1} = m_1 I_1^2 r_1$  и электромагнитной мощности  $P_{ЭМ} = P_1 - P_{M1}$ , при учете первого из выражений (1), а также (16) получим новые выражения для  $P_1 = k_P F_{I\varphi} \cos \varphi_1$ ,  $P_{M1} = k_P F_{I\varphi}^2$ ,  $P_{ЭМ} = k_P F_{I\varphi} \cos \varphi_1 - k_P F_{I\varphi}^2$ , и тогда электрический КПД обмотки статора СРД можно записать в форме

$$\eta_3 = (P_1 - P_{M1} / P_{ЭМ}) = 1 - F_{I\varphi} / \cos \varphi_1. \quad (18)$$

Поскольку функция тока  $F_{I\varphi}$  в соответствии с (16) зависит от  $\varphi_1$  и значит КПД  $\eta_3$  в целом будет также зависеть от фазы  $\varphi_1$ , то можно предположить, что КПД  $\eta_3$  имеет максимум при некотором значении  $\varphi_1$  для фиксированных значений относительных параметров  $x_{d^*}, x_{q^*}$ .

При учете (17) выражение (18) примет следующий вид:

$$\eta_3 = 1 - \left\{ \left[ 2 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \operatorname{tg} \varphi_1 \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left[ 2 + (x_{d^*} + x_{q^*}) \operatorname{tg} \varphi_1 \right]^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 4(1 + x_{d^*} x_{q^*}) (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \right]^{1/2} \right\} / 2(1 + x_{d^*} x_{q^*}).$$

Для определения оптимального значения фазы  $\varphi_{1m}$  составим выражение для производной  $d\eta_3/d(\operatorname{tg} \varphi_1)$ , приравняем его нулю и получим после преобразований следующее уравнение:

$$\left[ 4 - (x_{d^*} - x_{q^*})^2 \right] \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \\ + 4(x_{d^*} + x_{q^*}) \operatorname{tg} \varphi_1 - (x_{d^*} + x_{q^*})^2 = 0,$$

из которого

$$\operatorname{tg} \varphi_{1m} = \frac{2(x_{d^*} + x_{q^*}) \pm \sqrt{(x_{d^*}^2 - x_{q^*}^2)^2}}{4 - (x_{d^*} - x_{q^*})^2}.$$

Поскольку ток обмотки статора СРД – отстающий, индуктивный, т. е. его фаза положительная, то в полученном выражении перед корнем следует выбрать знак «+», и тогда окончательное выражение для  $\operatorname{tg} \varphi_{1m}$  примет вид

$$\operatorname{tg} \varphi_{1m} = (x_{d^*} + x_{q^*}) / (2 + x_{d^*} - x_{q^*}). \quad (19)$$

Из (19) получим фазу тока обмотки статора СРД

$$\varphi_1 = \arctg (x_{d^*} + x_{q^*}) / (2 + x_{d^*} - x_{q^*}) \quad (20)$$

и, кроме того, также можно получить выражения для

$$\sin \varphi_{1m} = \frac{x_{d^*} + x_{q^*}}{\sqrt{2[(x_{d^*} + 1)^2 + (x_{q^*} - 1)^2]}}, \\ \cos \varphi_{1m} = \frac{2 + x_{d^*} - x_{q^*}}{\sqrt{2[(x_{d^*} + 1)^2 + (x_{q^*} - 1)^2]}}. \quad (21)$$

Таким образом, в СРД действительно существует некоторое оптимальное значение фазы  $\varphi_{1m}$  тока обмотки статора, зависящей от значений относительных параметров  $x_{d^*}, x_{q^*}$ , при котором электрический КПД его обмотки статора имеет максимальное значение  $\eta_{ЭМ}$ . При этом функция тока в режиме оптимальной нагрузки относительно максимального значения КПД обмотки статора СРД

$$F_{I\varphi m} = \sqrt{2 / \left[ (x_{d*} + 1)^2 + (x_{q*} - 1)^2 \right]}. \quad (22)$$

Подставив выражения для  $\cos \varphi_{1m}$  из (21) и для  $F_{I\varphi m}$  из (23) в (18), получим еще одно выражение для максимального значения КПД СРД в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_{эм\varphi} &= (x_{d*} - x_{q*}) / (2 + x_{d*} - x_{q*}) = \\ &= x_{d*}(1 - \beta) / (2 + x_{d*} - \beta x_{d*}), \end{aligned}$$

которое полностью совпадает с ранее полученным (12). В результате оказывается, что, когда при изменении нагрузки на валу СРД меняется угол нагрузки  $\theta$ , то одновременно изменяется и коэффициент мощности СРД, и при этом для  $\theta = \theta_m$  фаза  $\varphi_1$  тока обмотки статора также оказывается оптимальной относительно КПД СРД. Таким образом, имеем  $\eta_{эм\varphi} = \eta_{эм\theta}$  и поэтому зависимости  $\eta_{эм\varphi} = f(x_{d*})$  и  $\eta_{эм\theta} = f(x_{d*})$  при  $\beta = 0.3, 0.4, 0.5$  и  $0.6$  полностью совпадают (рис. 7).

Из второго выражения (21) получим выражение, определяющее оптимальное значение фазы тока СРД, соответствующее максимуму электрического КПД его статора

$$\begin{aligned} \varphi_{1m} &= \arccos \frac{2 + x_{d*} - x_{q*}}{\sqrt{2 \left[ (x_{d*} + 1)^2 + (x_{q*} - 1)^2 \right]}} = \\ &= \arccos \frac{2 + x_{d*}(1 - \beta)}{\sqrt{2 \left[ (x_{d*} + 1)^2 + (\beta x_{d*} - 1)^2 \right]}}. \end{aligned}$$

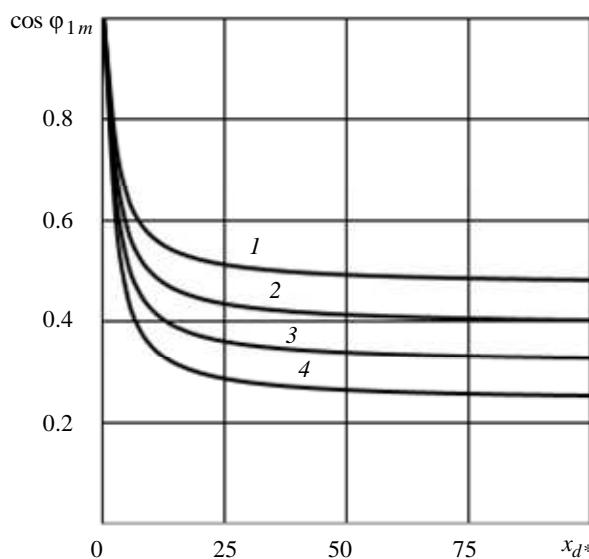


Рис. 8

Зависимости  $\cos \varphi_{1m} = f(x_{d*})$  и  $\varphi_{1m} = f(x_{d*})$  при  $\beta = 0.3, 0.4, 0.5$  и  $0.6$  графически представлены на рис. 8 и 9 (кривые 1–4 соответственно).

Введем в рассмотрение энергетический КПД СРД,  $\eta_{эн}$ , представляющий собой произведение КПД двигателя на его коэффициент мощности. В данном случае это целесообразно сделать для режима, соответствующего максимуму КПД СРД, т. е.  $\eta_{эн m} = \eta_{эм\theta} \cos \varphi_{1m}$ . Принимая во внимание (12) и второе из выражений (18), получим

$$\begin{aligned} \eta_{эн m} &= \\ &= x_{d*}(1 - \beta) / \sqrt{2 \left[ (x_{d*} + 1)^2 + (\beta x_{d*} - 1)^2 \right]}. \quad (23) \end{aligned}$$

Зависимость, определяемая (23), т. е.  $\eta_{эн m} = f(x_{d*})$  при  $\beta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  (кривые 1–4 соответственно) графически представлена на рис. 10. Из рисунка следует, что энергетический КПД СРД быстро повышается с увеличением параметра  $x_{d*}$  на интервале его значений от 0 до 25, т. е. при сравнительно малых мощностях двигателя, а затем остается практически постоянным. При этом уменьшение значения коэффициента  $\beta$ , т. е. синхронного индуктивного сопротивления по поперечной оси двигателя  $x_{q*}$ , сопровождается существенным повышением  $\eta_{эн m}$ .

При  $x_{d*} > 25$  для вычисления значения  $\eta_{эн m}$  можно воспользоваться приближенным выражением

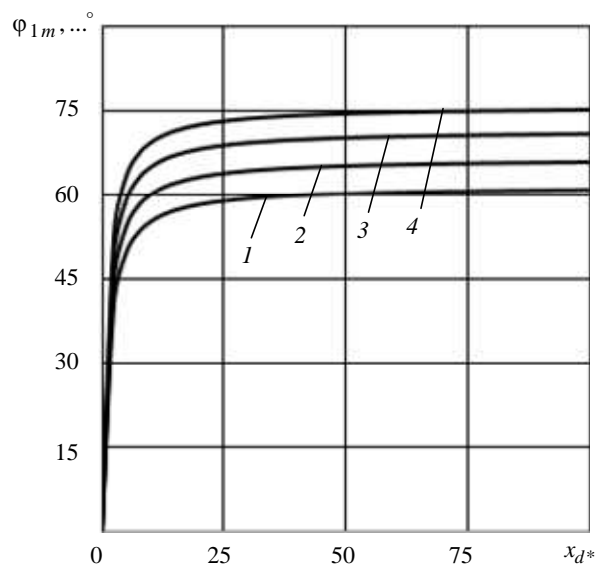


Рис. 9



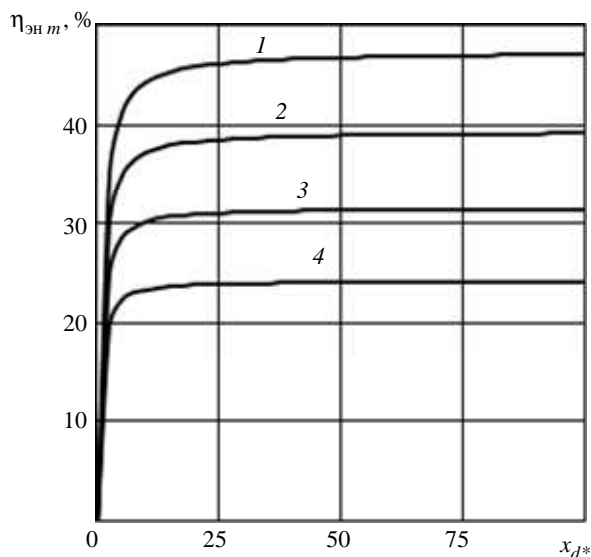


Рис. 10

$\eta_{эм} = (1 - \beta) / \sqrt{2(1 + \beta^2)}$ , которое получается из (23) в результате предельного перехода при  $x_{d*} \rightarrow \infty$ .

На основании выполненного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Разработана модель СРД, позволяющая оценить в общем виде наиболее важные эксплуатационные показатели качества СРД.

2. Получено выражение для функции результирующей электромагнитной мощности СРД и, соответственно, для его электромагнитного момента, а также для угла нагрузки  $\theta_{mэм}$ , при котором указанные величины имеют максимальные значения.

3. Доказано существование оптимального значения угла нагрузки  $\theta_m$ , при котором электрический КПД обмотки статора СРД достигает максимального значения  $\eta_{эм\theta}$ , т. е. СРД имеет минимум относительных электрических потерь в обмотке статора.

4. В СРД существует также оптимальное значение коэффициента мощности, обеспечивающее максимум электрического КПД обмотки статора.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваганов М. А., Скобеев И. И., Селим С. А. Синхронный реактивный двигатель при учете активного сопротивления обмотки статора // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2016. № 7. С. 67–74.

2. Юферов Ф. М. Электрические машины автоматических устройств. М.: Высш. шк., 1988. 315 с.

M. A. Vaganov, I. I. Skobeev  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

### EFFICIENCY AND POWER FACTOR OF SYNCHRONOUS RELUCTANCE MOTOR

*Examines the electrical efficiency of the stator winding synchronous reluctance motor without taking into account magnetic losses in it, as well as its power factor. The analysis of the expression of electromagnetic torque of the motor to ensure optimal cross geometry relative to that point.*

**Synchronous jet engine, efficiency, power factor, power consumption, electromagnetic power, electromagnetic torque, an optimal cross geometry**