УДК 621.31.001.57

А. С. Серебряков, В. Л. Осокин
Нижегородский государственный инженерно-экономический университет

Моделирование переходных процессов в активно-емкостных цепях при постоянном питающем напряжении и дискретном изменении параметров элементов

Предложена математическая модель переходных процессов в электрических цепях с накопителями электрической энергии при постоянном питающем напряжении, реализованная в пакете MathCad. Рассмотрено решение дифференциальных уравнений в форме Коши методом Рунге–Кутты. Предложены методы, позволяющие избежать ошибок при скачкообразном изменении сопротивления зарядного резистора или емкости электрического конденсатора.

Компьютерное моделирование, MathCad, законы коммутации, численный метод решения дифференциальных уравнений, метод припасовывания

При моделировании в пакете MathCad переходных процессов в электрических цепях с накопителями электрической энергии численным методом Рунге–Кутты решаются дифференциальные уравнения в форме Коши [1]–[6]. При дискретном изменении параметров элементов рассматриваемой цепи должны соблюдаться два закона коммутации, согласно которым ток в цепи, содержащей индуктивную катушку, и заряд электрического конденсатора не могут изменяться скачком, а сохраняют после коммутации те значения, которые они имели до коммутации. Напряжение на индуктивной катушке и ток конденсатора при этом могут изменяться скачком [7], [8]. Если при анализе процессов в пакете MathCad параметры элементов при их скачкообразном изменении задавать в виде функции if с условием (если), то производные напряжений и токов также будут изменяться скачком, однако сами функции не будут иметь разрывов, что приводит к ошибкам при моделировании переходных процессов в цепях с накопителями электрической энергии [9]–[12]. Рассмотрим, какими способами можно избежать таких ошибок.

Принципиальная схема заряда конденсатора от источника постоянного напряжения U представлена на рис. 1. Проанализируем сначала включение цепочки RC на постоянное напряжение U = const при скачкообразном изменении сопротивления резистора R при отключенном ключе P.

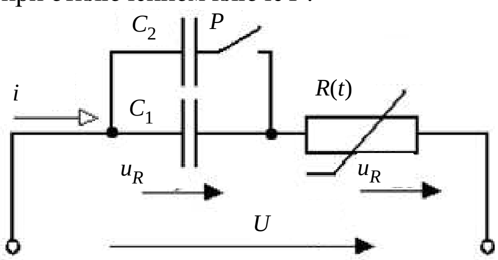

Рис. 1

На рис. 2 показан процесс заряда конденсатора, когда сопротивление нелинейного зарядного резистора $R(t)$ скачком увеличивается, а на рис. 3 – когда оно скачком уменьшается. Аналитический расчет процессов, показанных на рис. 2 и 3, произведен методом стадий или методом припасовывания, когда в начале каждой стадии вычисляются соответствующие начальные условия для решения системы дифференциальных уравнений:

$$u_R + u_C = R(t)i + u_C = U, \qquad (1)$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}, \qquad (2)$$

где $R(t)$ – сопротивление нелинейного резистора, изменяющееся с течением времени.

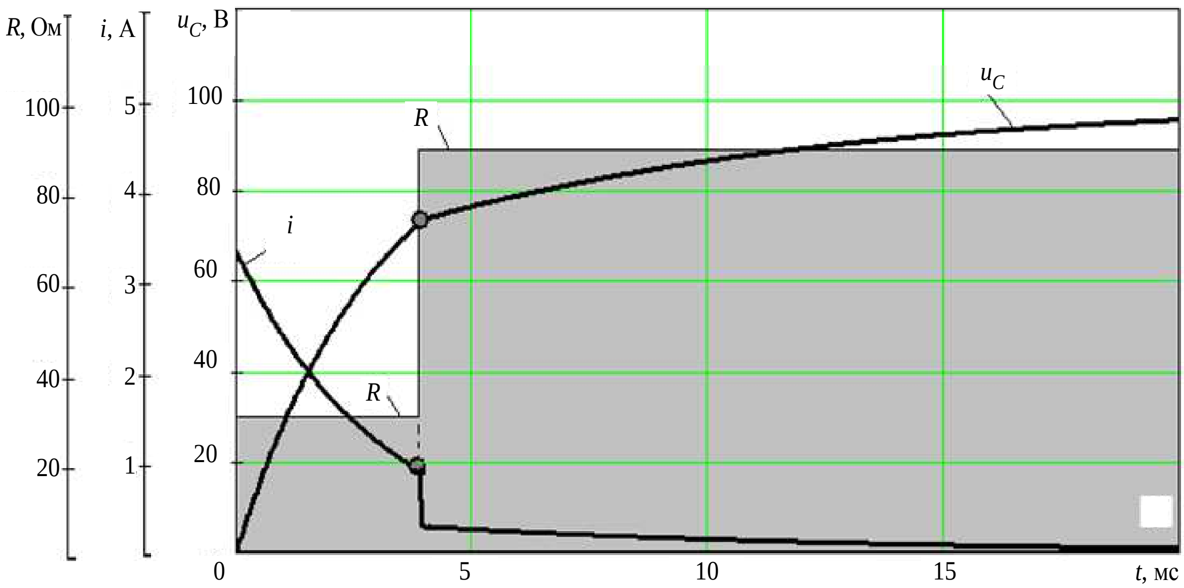

Рис. 2

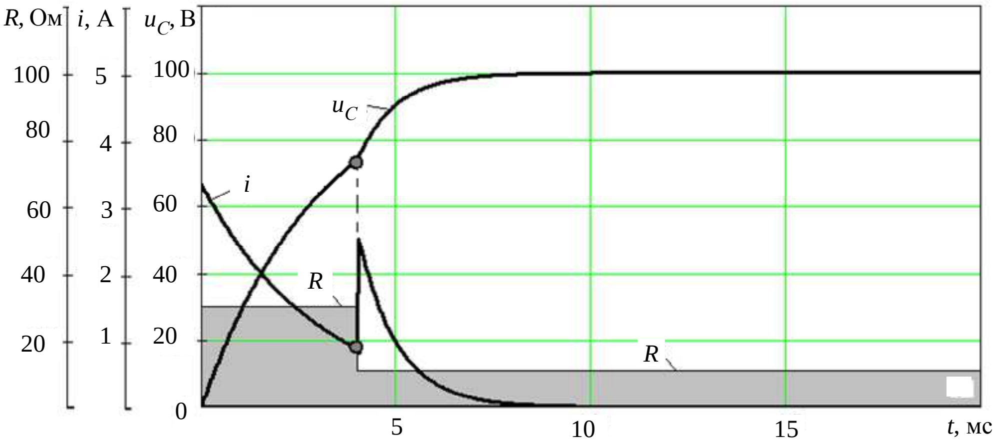

Рис. 3

Как видно из рис. 2 и 3, в соответствии с законом коммутации для конденсаторов напряжение на конденсаторе при скачкообразном изменении сопротивления $R(t)$ сохраняет свое значение, но при этом происходит скачок тока.

Когда сопротивление зарядного резистора R скачком увеличивается, то наблюдается скачкообразное уменьшение тока (рис. 2). Когда же сопротивление зарядного резистора $R(t)$ скачком уменьшается, то наблюдается скачкообразное увеличение тока (рис. 3). Дифференциальные уравнения (1) и (2) можно решить в интегрированном пакете MathCad численным методом Рунге–Кутты, записав их в форме Коши:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-du_C/dt}{R(t)} = \frac{-i/C_1}{R(t)} = \frac{-i}{R(t)C_1}, \tag{3}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C_1} = \frac{U - u_c}{C_1 R(t)}. \tag{4}$$

Программа и результаты решения дифференциальных уравнений (3) и (4) в интегрированном пакете MatCad показаны на рис. 4 и 5. На рис. 4 приведено решение дифференциальных уравнений при скачкообразном увеличении сопротивления, а на рис. 5 – при скачкообразном уменьшении сопротивления. Для решения дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка используется стандартная функция rkfixed интегрирования дифференциальных уравнений в форме Коши с фиксированным шагом интегрирования. В скобках функции rkfixed перечисляются через запятую: вектор x начальных условий, начальная 0 и конечная 0.4 точки времени интервала интегрирования в секундах, число точек 10 000, не считая нулевой точки, и вектор-функция D первых производных искомых функций. Для вектора D первых производных в скобках указывается сначала переменная t, по которой берутся производные, и через запятую указывается функция x, от которой берутся производные. Начальные условия задаются в виде вектора x. В программе введены следующие ком-

$$C1{:=}100 \quad U{:=}100 \quad R(t):=\mathrm{if}(t \le 0.004, 30, 90)$$

$$x:=\begin{pmatrix} \dfrac{U}{R(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,x):=\begin{pmatrix} \dfrac{-x_0}{C1R(t)} \\ \dfrac{U-x_1}{C1R(t)} \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} 3.333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z:=\mathrm{rkfixed}(x, 0, 0.4, 10000, D) \qquad n:=0...10000$$

$$t_n:=Z_{n,0} \quad i_n:=Z_{n,1} \quad u_n:=Z_{n,2}$$

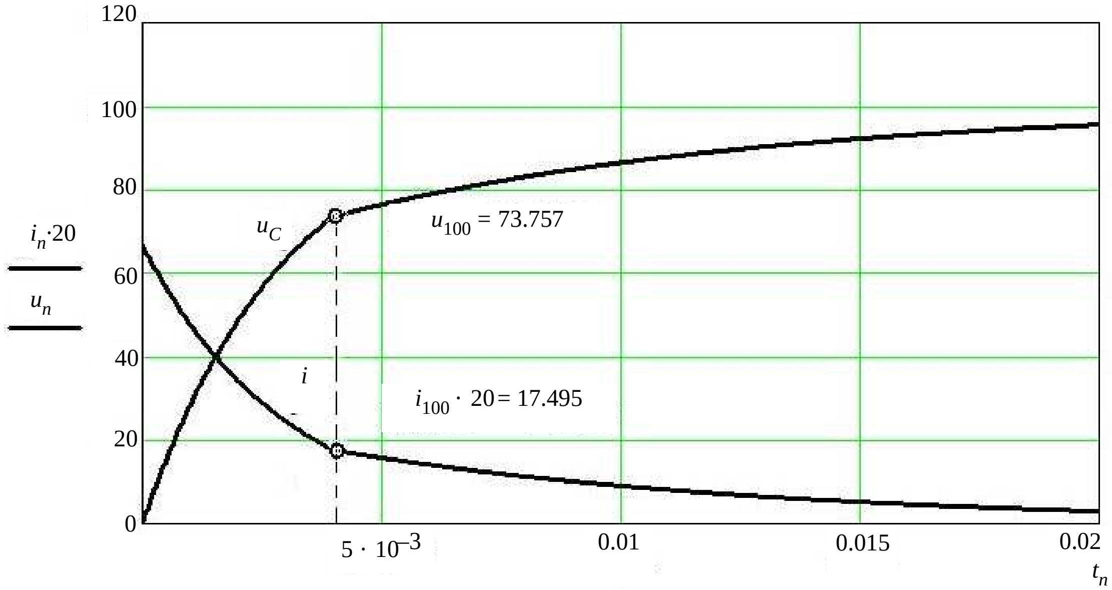

Рис. 4

$$C1:=100 \cdot 10^{-6} \quad U:=100 \quad R(t):=\mathrm{if}(t \le 0.004, 30, 10)$$

$$x:=\begin{pmatrix} \dfrac{U}{R(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,x):=\begin{pmatrix} \dfrac{-x_0}{C1 \cdot R(t)} \\ \dfrac{U-x_1}{C1 \cdot R(t)} \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} 3.333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z:=\mathrm{rkfixed}(x, 0, 0.4, 10000, D) \quad n:=0...10000$$

$$t_n:=Z_{n,0} \quad i_n:=Z_{n,1} \quad u_n:=Z_{n,2}$$

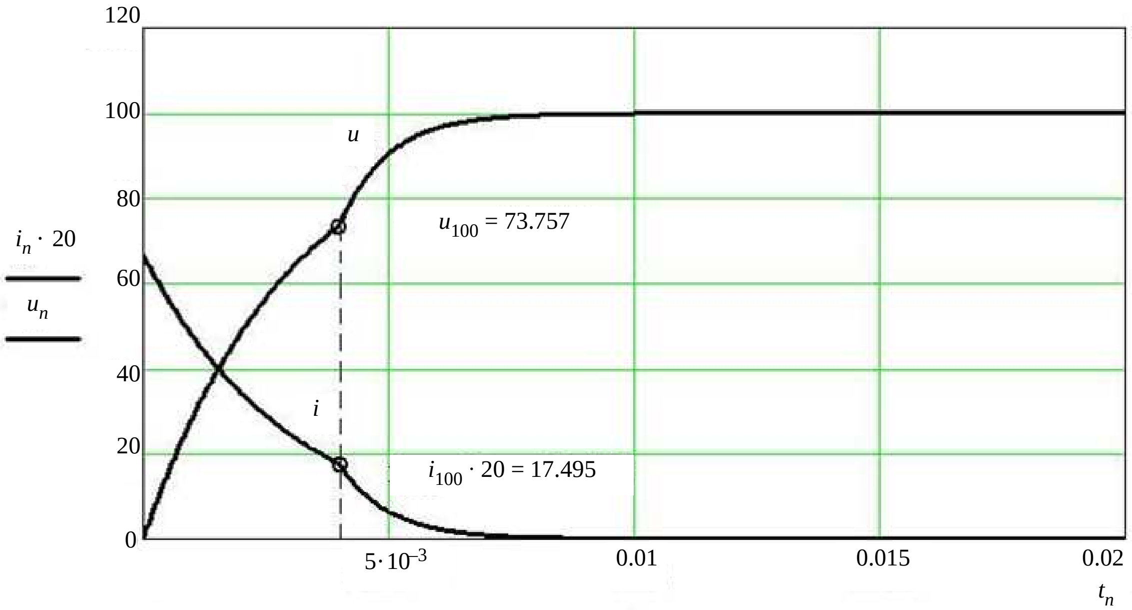

Рис. 5

$$C1 := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100 \quad R(t) := \mathrm{if}(t \le 0.004, 30, 10)$$

$$x := \begin{pmatrix} \dfrac{U}{R(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} \dfrac{-x_0}{C1 \cdot R(t)} \\ \dfrac{U - x_1}{C1 \cdot R(t)} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 0.4, 10000, D) \quad n := 0...10000 \quad t_n := Z_{n,0} \quad u_n := Z_{n,2}$$

$$R_n := \mathrm{if}\left(n \le \frac{0.004 \cdot 10000}{0.4}, 30, 10\right) \quad i_n := \frac{U - u_n}{R_n}$$

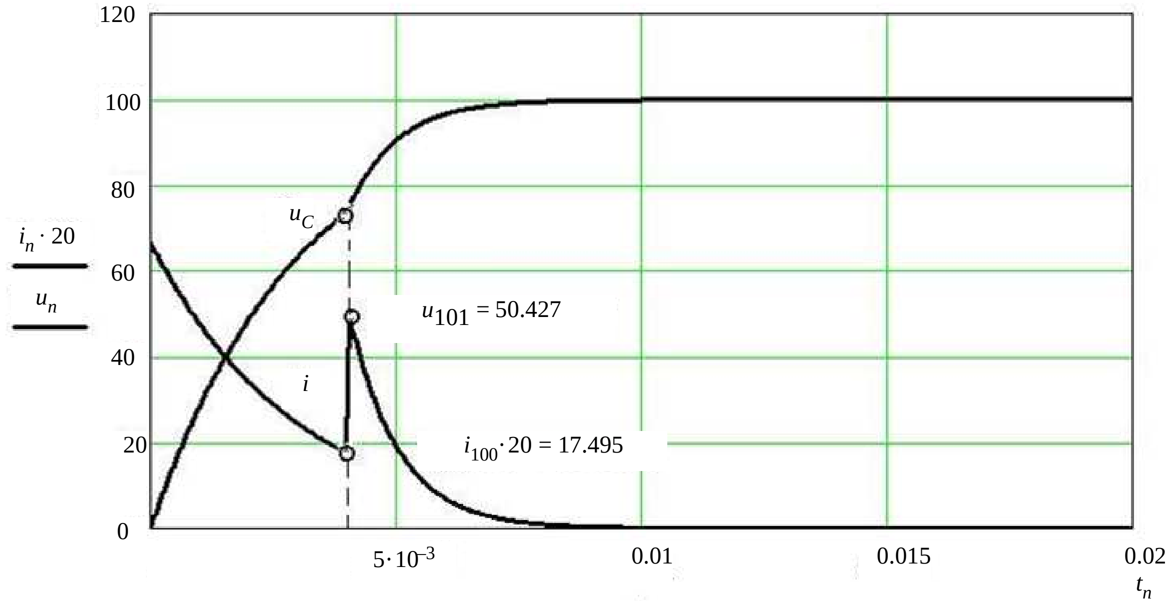

Рис. 6

пьютерные переменные: x_0 – ток i, x_1 – напряжение на конденсаторе u_C. Решение дифференциальных уравнений получается в виде матрицы Z, имеющей три столбца. Первый столбец с индексом 0 содержит 10 000 точек времени t, в которых ищется решение дифференциальных уравнений. Второй и третий столбцы содержат столько же значений найденных решений для тока и напряжения на конденсаторе. По результатам расчета на рис. 4 и 5 построены кривые тока и напряжения на конденсаторе. Для построения кривых по вычисленным точкам введены индексные переменные t_n, i_n, u_n, где n – номер точки в векторе данной переменной.

Как видно из этих рисунков, кривые тока в момент скачкообразного изменения значения сопротивления $R(t)$ не претерпевают разрывов, показанных на рис. 2 и 3. Следовательно, характер тока воспроизводится неверно. Это получается потому, что в дифференциальные уравнения в форме Коши входят только производные искомых величин. Начальные условия даются только в начале вычислений. Для разрывных же функций при каждой коммутации следует вводить новые начальные условия. Кривая напряжения на конденсаторе по законам коммутации не имеет разрывов. Поэтому она вычисляется верно. Чтобы кривая тока моделировалась правильно, ток следует вычислять, пользуясь формулой (1), как это показано на рис. 6. В программе, приведенной на рис. 6, решаются два дифференциальных уравнения. Однако в этом случае задачу можно упростить и решать только одно дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе. Программа для этого случая представлена на рис. 7. На рис. 6 и 7 функция if с условием задается как функция точки расчета (n = 100). Это сделано для того, чтобы можно было точно определить значение тока до коммутации (n = 100) и после коммутации (n = 101). На рис. 6 показаны значения тока в этих двух указанных точках: до скачка (n = 100) и после скачка (n = 101), что соответствует по времени моменту коммутации резистора $R(t)$ при t = 0.004 с.

Заметим, что решение, близкое к действительному, можно получить, если в рассматриваемую цепь ввести небольшую индуктивность L (рис. 8), что делает кривую тока неразрывной функцией. Ток в цепи с индуктивностью по закону коммутации не может изменяться скачком – только плавно. Дифференциальные уравнения для этого случая запишутся следующим образом:

$$\frac{di}{dt}=\frac{U-R(t)i-u_C}{L},$$

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{i}{C_1}.$$

Значение введенной индуктивности на рис. 8 равно 0.0005 Гн. Поскольку введенная индуктивность мала, ток изменяется без скачка, но очень быстро, что по форме напоминает скачок. Как видно из рис. 8, характер изменения тока близок к реальному. Погрешность вычисления не превышает 10 %. Поэтому таким приемом можно пользоваться для качественной оценки переходного процесса.

Рассмотрим случай, когда скачком изменяется емкость конденсатора. Например, параллельно конденсатору C_1 на схеме (рис. 1) подключается конденсатор C_2. В контуре, образованном конден-

$$\mathrm{C1}:=100\cdot10^{-6}\quad \mathrm{U}:=100\quad \mathrm{R(t)}:=\mathrm{if}\,(\mathrm{t}\le0.004,30,10)$$

$$\mathrm{x}:=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{R(0)}}\\ 0\end{pmatrix}\quad \mathrm{D(t,x)}:=\left(\frac{\mathrm{U}-\mathrm{x}}{\mathrm{C1}\cdot\mathrm{R(t)}}\right)$$

$$\mathrm{Z}:=\mathrm{rkfixed}(\mathrm{x},0,0.4,10000,\mathrm{D})\quad \mathrm{n}:=0...10000\quad \mathrm{t_n}:=\mathrm{Z_{n,0}}\quad \mathrm{u_n}:=\mathrm{Z_{n,1}}$$

$$\mathrm{R_n}:=\mathrm{if}\left(\mathrm{n}\le\frac{0.004\cdot10000}{0.4},30,10\right)\quad \mathrm{i_n}:=\frac{\mathrm{U}-\mathrm{u_n}}{\mathrm{R_n}}$$

Рис. 7

$$\mathrm{C1}:=100\cdot10^{-6}\quad \mathrm{R0}:=30\quad \mathrm{U}:=100\quad \mathrm{R(t)}:=\mathrm{if}\,(\mathrm{t}\le0.004,30,10)\quad \mathrm{L}:=0.0005$$

$$\mathrm{x}:=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \mathrm{D(t,x)}:=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{U}-\mathrm{R(t)}\cdot\mathrm{x_0}-\mathrm{x_1}}{\mathrm{L}}\\ \dfrac{\mathrm{x_0}}{\mathrm{C1}}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Z}:=\mathrm{rkfixed}(\mathrm{x},0,0.4,10000,\mathrm{D})\quad \mathrm{n}:=0...100000\quad \mathrm{t_n}:=\mathrm{Z_{n,0}}\quad \mathrm{t_{1000}}=4\cdot10^{-3}$$

$$\mathrm{i_n}:=\mathrm{Z_{n,1}}\quad \mathrm{u_n}:=\mathrm{Z_{n,2}}\quad \mathrm{i_{1000}}\cdot20=18.109\quad \mathrm{i_{1034}}\cdot20=47.023$$

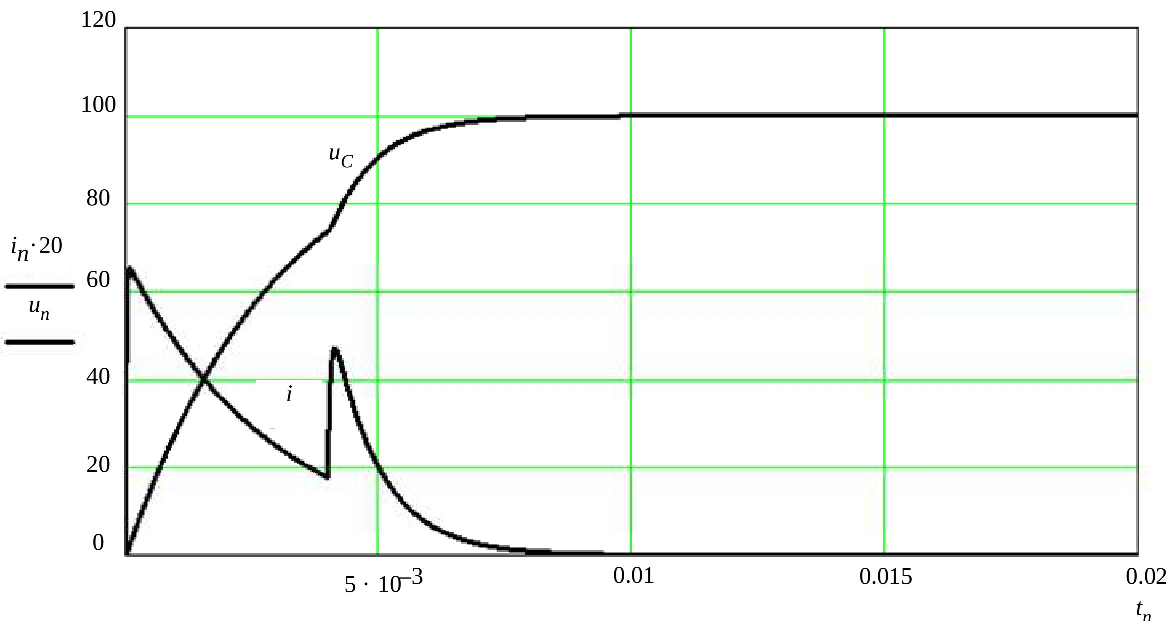

Рис. 8

саторами C_1 и C_2, отсутствует активное сопротивление. Поэтому в этом контуре происходит так называемая «некорректная» коммутация, при которой заряд в системе конденсаторов остается неизменным. При этом заряд конденсатора C_1 перераспределяется нам два конденсатора. C_1 и C_2 и напряжение на обоих конденсаторах изменяется скачком. В этом случае задачу в пакете MathCad следует решать методом стадий (рис. 9).

Решение для первой стадии, когда в схеме находится только конденсатор C1 представлено на рис. 9 в виде матрицы Z1, а для второй стадии, когда подключается конденсатор C2 – матрицей Z2. Начальные условия для первой стадии задаются вектором x1, а для второй стадии – вектором x2. Для формирования вектора x2 используется последнее значение напряжения на конденсаторе C1 в первой стадии $Z1_{400,2}$, т. е. значение напряжения на конденсаторе перед коммутацией (n = 400, t = 0.004 с). Как видно из рис. 9, и напряжение на конденсаторе, и ток в цепи изменяются скачкообразно.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. При решении численным методом дифференциальных уравнений в форме Коши, описывающих переходные процессы в электрических цепях с емкостными накопителями электрической энергии и скачкообразном изменении параметров

$$\mathrm{C1} := 100\cdot 10^{-6} \quad \mathrm{C2} := 500\cdot 10^{-6} \quad \mathrm{R0} := 30 \quad \mathrm{U} := 100$$

$$x := \begin{pmatrix} \frac{100}{30} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{D1}(t, x1) := \begin{pmatrix} \dfrac{x1_0}{\mathrm{C1}\cdot\mathrm{R0}} \\ \dfrac{\mathrm{U} - x1_1}{\mathrm{C1}\cdot\mathrm{R0}} \end{pmatrix} \quad x1 = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Z} := \mathrm{rkfixed}(x1, 0, 0.004, 400, \mathrm{D1}) \quad n := 0...400 \quad m := 0...4000$$

$$t1_n := Z1_{n,0} \quad i1_n := Z1_{n,1} \quad u1_n := Z1_{n,2}$$

$$x2 := \begin{pmatrix} \dfrac{100 - \dfrac{Z1_{400,2}}{\mathrm{C1}+\mathrm{C2}}\cdot\mathrm{C1}}{\mathrm{R0}} \\ \dfrac{Z1_{400,2}}{\mathrm{C1}+\mathrm{C2}}\cdot\mathrm{C1} \end{pmatrix} \quad \mathrm{D2}(t, x2) := \begin{bmatrix} \dfrac{-x2_0}{1(\mathrm{C1}+\mathrm{C2})\cdot\mathrm{R0}} \\ \dfrac{\mathrm{U} - x2_1}{(\mathrm{C1}+\mathrm{C2})\cdot\mathrm{R0}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Z} := \mathrm{rkfixed}(x2, 0, 0.04, 4000, \mathrm{D2}) \quad n := 0...4000$$

$$t2_n := Z2_{n,0} \quad i2_n := Z2_{n,1} \quad u2_n := Z2_{n,2} \quad x2 = \begin{pmatrix} 2.924 \\ 12.273 \end{pmatrix}$$

$$t_n := \mathrm{if}(n \le 400, t1_n, t2_n) \quad i_n := \mathrm{if}(n \le 400, Z1_{n,1}, Z2_{n-m,1})$$

$$u_n := \mathrm{if}(n \le 400, Z1_{n,2}, Z2_{n-m,2})$$

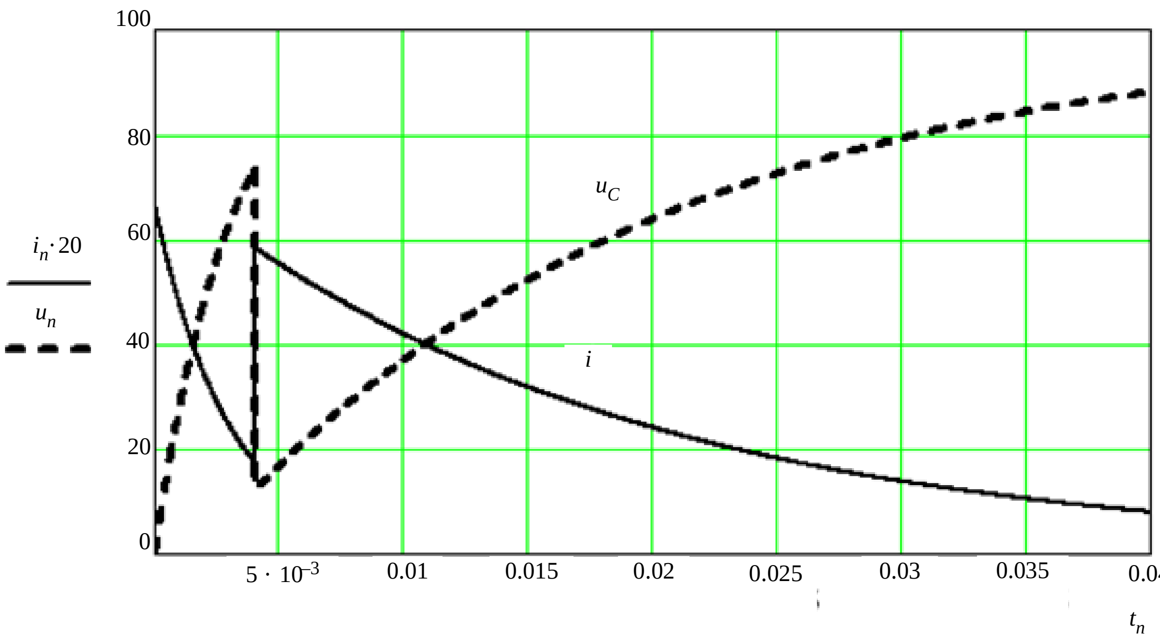

Рис. 9

элементов производные напряжений и токов также будут изменяться скачком. Однако при этом сами функции не будут иметь разрывов, что приводит к ошибкам.

2. Чтобы избежать ошибок при скачкообразном изменении сопротивлении зарядного резистора следует рассчитывать ток не по его производной, а с использованием уравнения цепи, составленного по второму закону Кирхгофа.

Чтобы избежать ошибок при скачкообразном изменении емкости электрического конденсатора при постоянном значении зарядного резистора следует рассчитывать ток и напряжение на конденсаторе методом припасовывания или методом стадий, используя метод Рунге–Кутты и определяя начальные условия для каждой стадии процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяконов В. П. MATHPAD 8/2000: спец. справ. СПб.: Питер, 2000. 592 с.

2. Серебряков А. С., Шумейко В. В. MATHPAD и решение задач электротехники: учеб. пособие для вузов ж.-д. транспорта. М.: Маршрут, 2005. 240 с.

3. Демирчян К. С., Бутырин П. А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей: учеб. пособие для электр. и электроэнерг. спец. вузов. М.: Высш. шк., 1988. 335 с.

4. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / пер. с англ. М.: Наука, 1986.

5. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.

6. Смит Дж. М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1980.

7. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1, 2. Л.: Энергоиздат, 1981.

8. Основы теории цепей: учеб. для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. 5-е изд., перераб. М.: Энергоатомиздат, 1989. 528 с.

9. Демирчян К. С. Проблемы численного моделирования процессов в электрических цепях // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 2. С. 18–24.

10. Зайцев И. А., Демирчян К. С. Определение начальных условий при скачкообразных изменениях токов и напряжений // Электричество. 1961. № 7.

11. Бахвалов Н. С. Численные методы. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.

12. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость метода Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / пер. с англ. М.: Мир, 1988.

A. S. Serebryakov, V. L. Osokin
Nizhniy Novgorod State Engineering-Economic University

MODELLING IN THE PAPKET OF MATHPAD OF TRANSITION PROPESSES IN RESISTIVE-PAPAPITIVE PIRPUITS IN PASE OF DP SUPPLY VOLTAGE AND DISPRETE PHANGE OF PARAMETERS OF ELEMENTS

The mathematical model of transitional processes in electrical circuits with storage of electric energy in case of constant power voltage realized in MathCad packet is offered. The solution of differential equations in the form of Cauchy by the Runge-Kutta method is considered. The methods allowing to avoid errors in case of spasmodic changes of resistance of charge resistor or capacity of electrical condenser are offered.

Computer modeling, transition processes, electric chains of DC supply voltage with energy stores, integrated packet MathCad, laws of commutation, numerical method of solution of differential equations, fitting method