

B. G. Stepanov

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

## RADIATION IMPEDANCE OF PIEZOELECTRIC CYLINDERS OF THE TRANSDUCER WAVEGUIDE TYPE AT RADIATION BY IT IN THE SEMI-INFINITE SPACES

*For water filled coaxially located piezoelectric cylinders with the phased excitation as the running wave, forming the transducer of waveguide type, radiating in semi-infinite spaces, results of calculations of frequency characteristics of own, mutual and full radiation impedance are resulted and analyzed. Influence on these characteristics, and also – on frequency dependences of amplitudes of exciting electric pressure, the waves reflected from face-to-face and back apertures of the transducer of waveguide type is shown.*

**Hydroacoustic transducer, guide, radiation in semi-infinite space, radiation impedance**

УДК 620.179.16

К. Е. Аббакумов, М. Я. Пушилина

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Волновые процессы на границах структурированных сред на примере двух моделей: поглощающей и мелкослоистой сред

*Рассмотрен вопрос о том, как по значениям измеренных скоростей вычислить некоторые параметры среды, если известна ее модель. Здесь были рассмотрены две такие модели: модель поглощающей среды и модель мелкослоистой среды. Были проведены расчеты эффективно упругих параметров среды для модели мелкослоистой среды, которые были подставлены в уравнение Рэлея для нахождения эффективной скорости распространения волны в мелкослоистой среде сталь-графит. Расчеты проводились для трех комбинаций толщин слоев: 0.9/0.1; 0.5/0.5; 0.1/0.9 мм.*

### Волновые процессы, мелкослоистая среда, уравнение Рэлея, продольные и поперечные волны

Актуальность данной статьи обусловлена следующими обстоятельствами. Одно из направлений, которое развивается в дефектоскопии – ультразвуковая структурометрия. Ультразвук здесь помогает в том смысле, что оказывается, что значения скоростей для разных типов волн можно измерять с относительно высокой точностью [1]. Зная значения этих скоростей, их можно пересчитать в некоторые интересные для практических целей механические характеристики, а знание механических характеристик – важный эксплуатационный и производственный параметр для любых материалов.

Целью настоящей статьи является описание исследования волновых процессов на границах структурированных сред применительно к зада-

чам акустических измерений физико-механических характеристик промышленных материалов.

*Модель поглощающей среды.* Когда среда однородна, то дисперсионное уравнение Рэлея известно по работе Викторова [2] и описывается формулой

$$\eta^6 - 8\eta^4 + 8(3 - 2\xi^2)\eta^2 - 16(1 - \xi^2) = 0, \quad (1)$$

$$\eta = k_t/k = c/c_t,$$

$$\xi = k_l/k_t = c_t/c_l.$$

Здесь введены обозначения  $\eta = k_t/k = c/c_t$ ;  $\xi = k_l/k_t = c_t/c_l$ , где  $c_t, c_l$  – фазовые скорости продольных и поперечных волн соответственно.

Коэффициент затухания – один из важнейших информативных параметров качества сред и материалов. Убыванию амплитуды рэлеевских волн

вследствие поглощения и рассеяния упругой энергии должны быть присущи особенности, характерные для продольных и поперечных волн, поскольку рэлеевская волна является комбинацией этих волн. Затухание объемных волн изучено довольно подробно, в то время как затухание поверхностных волн для структурированных сред почти не исследовано, поэтому большой интерес представляет установление связи между затуханием объемных и поверхностных волн в случае наличия в материале структурных неоднородностей.

Простейший способ установления такой связи заключается в учете затухания введением мнимых частей в волновые числа и получении из характеристического уравнения выражения для мнимой части волнового числа поверхностной волны через мнимые части волновых чисел объемных волн.

Приведем кратко решение данного уравнения, рассматривая модель поглощенной среды [2]. Рассмотрим упругую среду с потерями, где

$$\bar{k}_l = k_l'' + ik_l', \quad \bar{k}_t = k_t' + ik_t'', \quad \bar{k}_R = k_R'' + ik_R'.$$

Пусть затухание продольных и поперечных волн мало ( $k_l'' \gg ik_l', k_t'' \gg ik_t''$ ) и одинаково во всех точках среды. Затухание рэлеевских волн при этом будем считать так же малым и одинаковым во всех точках среды. Запишем комплексные волновые числа продольной, поперечной и рэлеевской волн в виде

$$\begin{aligned} \bar{k}_l &= \bar{k}_l' (1 + i\alpha); \quad \bar{k}_t = \bar{k}_t' (1 + i\beta); \\ \bar{k}_R &= \bar{k}_R' (1 + i\gamma). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = \frac{k_l''}{k_l'}$ ;  $\beta = \frac{k_t''}{k_t'}$ ;  $\gamma = \frac{k_R''}{k_R'}$  – относительные коэффициенты затухания продольной, поперечной и рэлеевской волн соответственно.

Для определения  $\bar{k}_R$  обратимся к характеристическому уравнению, которое при вещественных волновых числах имеет вид

$$\bar{\eta}^6 - 8\bar{\eta}^4 + 8(3 - 2\bar{\xi}^2)\bar{\eta}^2 - 16(1 - \bar{\xi}^2) = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{\eta}_R^2 = \frac{\bar{k}_t'^2}{\bar{k}_R'^2}$ ,  $\bar{\xi}^2 = \frac{\bar{k}_l'^2}{\bar{k}_t'^2}$ .

Подставим волновые числа (2) в выражения для  $\bar{\eta}_R$  и  $\bar{\xi}$  в уравнении (3). Сохраним в последнем члены порядка единицы и порядка  $\alpha, \beta, \gamma$ , отбросив члены порядка  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  и выше [3].

После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} i \left[ -48\gamma k_R'^4 k_t'^4 + 32\beta k_R'^2 k_t'^6 - 32\alpha k_R'^4 k_t'^2 - 32\gamma k_R'^2 k_t'^6 - \right. \\ \left. - 6\gamma k_t'^8 - 32\beta k_R'^6 k_t'^6 + 32\gamma k_R'^4 k_t'^2 k_t'^2 + 48\beta k_R'^4 k_t'^4 + \right. \\ \left. + 6\beta k_t'^8 \right] + \left[ -k_t'^8 - 16k_R'^6 k_t'^2 + 8k_R'^2 k_t'^6 + 24k_R'^4 k_t'^4 + \right. \\ \left. + 16k_R'^6 k_t'^6 - 16k_R'^4 k_t'^2 k_t'^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая после этого нулю вещественную и мнимую части укороченного уравнения, получим два уравнения. Первое определяет вещественную часть волнового числа рэлеевской волны в рассматриваемой среде через вещественные части волновых чисел продольной и поперечной волн, а второе – мнимую. Из второго имеем выражение

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{3\eta^6 - 16\eta^4 + 24\eta^2 - 16\xi^2}{\eta^2(3\eta^4 - 16\eta^2 + 24 - 16\xi^2)}\beta + \\ &+ \frac{16\xi^2(1 - \eta^2)}{\eta^2(3\eta^4 - 16\eta^2 + 24 - 16\xi^2)}\alpha, \end{aligned}$$

где  $\eta = \frac{c_R}{c_t}$ ,  $\xi = \frac{c_l}{c_t}$ ;  $c_l, c_t, c_R$  – фазовые скорости продольной, поперечной и поверхностной волн;  $\alpha, \beta, \gamma$  – коэффициенты затухания продольной, поперечной и поверхностной волн.

Таким образом, коэффициент затухания рэлеевской волны на длине волны есть линейная комбинация из аналогичных коэффициентов затухания продольных и поперечных волн. Для всех материалов «удельный вес»  $\beta$  больше «удельного веса»  $\alpha$ , т. е. при примерно одинаковых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  коэффициент затухания рэлеевских волн  $\gamma$  определяется в основном коэффициентом затухания поперечных волн  $\beta$ .

В случае если среда содержит неоднородности, например слоистой формы, для того чтобы исследовать распространение поверхностных волн, нужно знать параметры объемной среды с учетом геометрии распространения волн относительно этих слоев. В работе были рассмотрены две модели такой геометрии, когда волновой процесс распространяется параллельно и перпендикулярно слоям.

Среда, состоящая из чередующихся слоев двух однородных и изотропных веществ, в среднем, т. е. в случае достаточно тонких слоев, ведет себя как однородная, но анизотропная. Условие тонкости слоев означает, что их толщины малы по сравнению с длинами волн сжатия и сдвига в материалах.

Таблица 1

Эффективный упругий параметр	Среда 1 (0.9/0.1)	Среда 2 (0.5/0.5)	Среда 3 (0.1/0.9)
$c_{l\text{ef}}, \text{ м/с}$	$5.694 \cdot 10^3$	$5.216 \cdot 10^3$	$4.125 \cdot 10^3$
$c_{t\text{ef}}, \text{ м/с}$	$2.391 \cdot 10^3$	$1.144 \cdot 10^3$	$0.859 \cdot 10^3$
$c_{R\text{ef}}, \text{ м/с}$	$2.25 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^3$	$0.817 \cdot 10^3$
$\tilde{\rho}, \text{ кг/м}^3$	$7.245 \cdot 10^3$	$5.025 \cdot 10^3$	$2.805 \cdot 10^3$
$\gamma$	$0.94\beta + 0.06\alpha$	$0.96\beta + 0.04\alpha$	$0.98\beta + 0.02\alpha$

Модель мелкослоистой среды. Рассмотрим модель мелкослоистой среды типа «сталь–графит» в условиях распространения волны параллельно тонким слоям (рис. 1). Общая толщина слоя принималась равной 1 мм. Частота ультразвука – 1 МГц. Расчеты проводились для трех комбинаций толщин стали и графита: 0.9/0.1; 0.5/0.5; 0.1/0.9 мм.

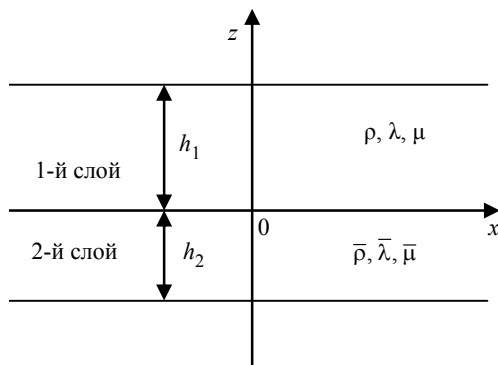


Рис. 1

Решение для данной модели проводилось на основании решений дисперсионных уравнений, полученные Л. М. Бреховских [5], где выражение для скорости распространения волны сжатия описывается формулой

$$c_{l\text{ef}}^2 = \frac{h \left( \frac{h_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{h_2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)^{-1}}{\tilde{\rho}} \times \left[ 1 + (4h_1h_2/h^2)(\mu - \bar{\mu})(\mu + \lambda - \bar{\mu} - \bar{\lambda}) \times (2\mu + \lambda)^{-1}(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})^{-1} \right]. \quad (4)$$

Выражение для скорости распространения сдвиговой волны описывается формулой

$$c_{t\text{ef}}^2 = \frac{h \left( \frac{h_1}{\mu} + \frac{h_2}{\bar{\mu}} \right)^{-1}}{\bar{\rho}}. \quad (5)$$

Выражение для эффективной скорости поперечной волны имеет вид

$$c_{R\text{ef}} = \frac{\omega}{k_R}.$$

Для вычисления скорости эффективной поперечной волны в мелкослоистой структуре эффективные скорости (4) и (5) подставлялись в дисперсионное уравнение Рэлея (1).

Представим результаты расчета данных механических характеристик для трех комбинаций толщин в виде табл. 1.

Аналогично рассмотрению распространения волны параллельно слоям, можно рассмотреть распространение волны перпендикулярно слоям (рис. 2).

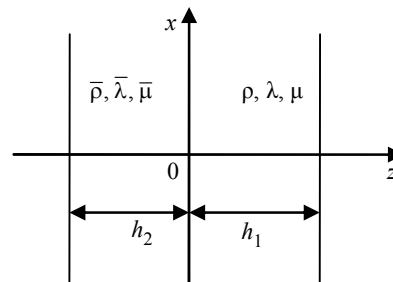


Рис. 2

Опираясь на аналогичные преобразования, получаем для продольной волны скорость сжатия:

$$c_l^2 = \frac{h \left( \frac{h_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{h_2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)^{-1}}{\tilde{\rho}}.$$

Для поперечной волны получаем следующее выражение, в котором, как и следовало ожидать,

$$c_t^2 = \frac{h \left( \frac{h_1}{\mu} + \frac{h_2}{\bar{\mu}} \right)^{-1}}{\bar{\rho}}.$$

Представим результаты расчета данных механических характеристик для трех комбинаций толщин в виде табл. 2.

Сопоставление данных расчетов позволяет сделать вывод о том, что параметры поперечной волны оказываются более чувствительными к поперечному расположению слоев, чем к продольному, что согласуется с известными экспериментальными данными.

Таблица 2

Эффективный упругий параметр	Среда 1 0.9/0.1 мм	Среда 2 0.5/0.5 мм	Среда 3 0.1/0.9 мм
$c_{l\text{ef}}$ , м/с	$4.4 \cdot 10^3$	$3.063 \cdot 10^3$	$3.18 \cdot 10^3$
$c_{t\text{ef}}$ , м/с	$2.391 \cdot 10^3$	$1.144 \cdot 10^3$	$0.859 \cdot 10^3$
$c_{R\text{ef}}$ , м/с	$2.2 \cdot 10^3$	$1.08 \cdot 10^3$	$0.815 \cdot 10^3$
$\tilde{\rho}$ , кг/м <sup>3</sup>	$7.245 \cdot 10^3$	$5.025 \cdot 10^3$	$2.805 \cdot 10^3$
$\gamma$	$0.9\beta + 0.1\alpha$	$0.98\beta + 0.02\alpha$	$0.99\beta + 0.01\alpha$

С использованием дисперсионного уравнения Рэлея проведены расчеты фазовых скоростей распространения звуковой волны и коэффициентов затухания, применительно к модели мелкослоистой среды «сталь–графит» для трех комбинаций толщин слоев.

Анализ результатов показал, что полученные физико-механические характеристики (скорость звуковой волны, коэффициент затухания) сопоставимы с теоретическими значениями для выбранных материалов, что говорит о правильности выбранных методов расчета параметров поверхностных акустических волн.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неразрушающий контроль: справ.: в 8 т. / под общ. ред. В. В. Клюева. Т. 3: Ермолов И. Н., Ланге Ю. В. Ультразвуковой контроль. 2-е изд., испр. М.: Машиностроение, 2006. 864 с.
2. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. Викторов И. А. Затухание поверхностных и объемных ультразвуковых волн // Акуст. журн. 1964. Т. 10, № 1. С. 16–18.
4. Рытов С. М. Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2, № 1. С. 71–83.
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.

K. E. Abbakumov, M. Ya. Pushilina  
Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

#### WAVE PROCESSES AT THE STRUCTURED ENVIRONMENT IN TWO MODELS: ABSORBING AND FINE-LAYERED MEDIA

*The questions of how to calculate the values of the measured velocities, some parameters of the medium, if you know its model are considered. Two such models are described: the absorbing medium and fine-layered model of the medium. Calculations effectively elastic environment settings for fine-layered model of the medium, which were substituted into the equation for finding effective Rayleigh wave propagation velocity in the fine-layered medium steel-graphite were carried out. The calculations for the three combinations of layer thicknesses: 0.9/0.1, 0.5/0.5, 0.1/0.9 mm were performed.*

**Wave processes, fine-layered medium, Rayleigh equation, longitudinal and transverse waves**