УДК 517.442

А. С. Колпаков, Ар. Ю. Филатов, Ан. Ю. Филатов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Аппроксимация функции Хевисайда многочленами Тейлора для экспоненты

Рассматривается применение аппарата Виддера для нахождения значения функции-оригинала по значению ее преобразования Лапласа. Для примера взята функция Хевисайда, смещенная по аргументу на единицу. В результате применения метода к данному примеру устанавливается связь этой функции с суммой, асимптотика которой представляет самостоятельный интерес. Относительно этой асимптотики сформулирована и доказана теорема.

Обратное преобразование Лапласа, формула Тейлора, метод Виддера, функция Хевисайда, гамма-функция, скорость сходимости

Для описания состояния объекта или системы объектов часто используются дифференциальные уравнения. Решения этих уравнений находят, прибегая, например, к преобразованию Лапласа, переводящему функцию-оригинал $f(t)$ вещественного аргумента t в функцию-изображение $F(p)$ комплексного аргумента p по формуле

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

которое заменяет операцию дифференцирования операцией умножения, что упрощает нахождение ответа. Однако, найдя решение в p-области, необходимо провести обратное преобразование, что в реальных задачах очень редко может быть сделано при помощи известных таблиц. Одним из способов нахождения значения функции-оригинала по функции-изображению является использование агрегата, предложенного Д. Виддером в [3]:

$$W_n(f,t)=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right), \qquad (1)$$

где n – целочисленное значение, устремляемое в бесконечность.

В [2, с. 778] сформулировано утверждение, что

$$W_n(f,t)=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}+\frac{a_1(f,t)}{n^{1/2}}+$$
$$+\frac{a_2(f,t)}{n}+\frac{a_3(f,t)}{n^{3/2}}+\ldots+\frac{a_k(f,t)}{n^{k/2}}+\ldots,$$

где $a_i(f,t)$ – некоторые коэффициенты, зависящие от значения функции $f(t)$ и самой точки t.

Трудоемкие вычисления, основанные на применении метода Лапласа для исследования асимптотики интегралов, показывают, что

$$a_1(f,t)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(f(t+)-f(t-)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\left(f'(t+)-f'(t-)\right),$$
$$a_2(f,t)=\frac{1}{2}t\left(f'(t+)+f'(t-)\right),$$
$$a_3(f,t)=\frac{23}{540}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(f(t+)-f(t-)\right)+$$
$$+\frac{11}{24}\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\left(f'(t+)-f'(t-)\right)+$$
$$+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}t^2\left(f''(t+)-f''(t-)\right).$$

Это позволяет выдвинуть гипотезу, что

$$a_{2i}(f,t)=b_{2i}(t)\left(f^{(i)}(t+)+f^{(i)}(t-)\right), i>0,$$
$$a_{2i+1}(f,t)=$$
$$=\sum_{j=0}^{i+1}c_{2i+1,j}(t)\left(f^{(j)}(t+)-f^{(j)}(t-)\right), i\ge 0,$$

где $b_{2i}(t)$ и $c_{2i+1,j}(t)$ – некоторые коэффициенты, зависящие только от вещественного параметра t.

Следуя гипотезе, если в окрестности точки t исходная функция-оригинал $f(\cdot)\equiv\text{const}$, а $f(t+)=f(t-)$ и $f^{(j)}(t)=0$ при $j\ge 1$, то коэффициенты $a_i(f,t)$ равны нулю для любого натурального i. Это, в свою очередь, будет означать, что $f(t)-W_n(f,t)=o(n^{-\ell})$ для любого натурального ℓ, где $o(f)$ обозначает функцию, пренебрежимо малую относительно функции f.

Проверку гипотезы было решено начать с примера кусочно-постоянной функции с одним скачком, а именно сдвинутой функции Хэвисайда $H(t-1)$. Преобразование Лапласа от такой функции $F(p)=L\{H(t-1)\}=e^{-p}/p$. Тогда производная порядка n от $F(p)$ будет выглядеть следующим образом:

$$F^{(n)}(p)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(p^{-1}\right)^{(n-k)}\left(e^{-p}\right)^{(k)},$$

где C_n^k – биномиальный коэффициент.

Легко показать, что

$$F^{(n)}(p)=\frac{(-1)^n n!}{e^p p^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k}{k!},$$

откуда очевидно, что

$$W_n\left(H(t-1),t\right)=e^{-\frac{n}{t}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n}{t}\right)^k\frac{1}{k!}.$$

Асимптотика данной суммы представляет самостоятельный интерес, так как ее предельное равенство функции Хэвисайда не очевидно. Для дальнейшей простоты и наглядности формулировок и вычислений вместо $1/t$ будем писать t.

Полученная сумма является многочленом Тейлора для экспоненты e^{tn}:

$$C_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(tn)^i}{i!}. \qquad (1)$$

В нем присутствует параметр t, и при $t=1$ формула (1) имеет вид

$$C_n(1)=\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}.$$

Асимптотика такой суммы установлена в [1, с. 302]. Вызывает интерес, к чему сходится (1) при $0<t<1$, $t>1$. Справедлива следующая теорема:

1. Если $0<t<1$, то $e^{-tn}\sum_{i=0}^{n}\frac{(tn)^i}{i!}=1+O(\alpha^n)$, где $\alpha=\alpha(t)<1$.

2. Если $t>1$, то $e^{-tn}\sum_{i=0}^{n}\frac{(tn)^i}{i!}=O(\alpha^n)$, $\alpha=\alpha(t)<1$, где $O(f)$ – функция, асимптотически схожая с функцией f.

Доказательство. Поскольку, как отмечено ранее, сумма (1) является многочленом Тейлора, имеет место следующее равенство:

$$e^{tn}=C_n(t)+R_n(tn), \qquad (2)$$

где $R_n(tn)$ – остаток формулы Тейлора.

Остаток может быть представлен в интегральной форме с переменной интегрирования ξ:

$$R_n(tn)=\frac{1}{n!}\int_0^{tn}(tn-\xi)^n e^{\xi}d\xi.$$

Преобразуем этот интеграл с помощью замены $y=(nt-\xi)/n$. Тогда легко показать, что

$$R_n(tn)=\frac{e^{tn}n^{n+1}}{n!}\int_0^t\left[ye^{-y}\right]^n dy. \qquad (3)$$

Заметим, что функция ye^{-y} достигает максимума в точке 1. Действительно,

$$\left(ye^{-y}\right)'=e^{-y}-ye^{-y}=e^{-y}(1-y)=0.$$

Таким образом, оказывается, что при $t>1$ точка максимума подынтегральной функции попадает в промежуток интегрирования, а при $0<t<1$ – нет. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

1. $0<t<1$. Так как максимум лежит вне промежутка интегрирования, то свое максимальное значение на промежутке $[0;t]$ функция ye^{-y} принимает при $y=t$. Грубо оценим сверху значение этого интеграла, заменив подынтегральную функцию ее значением в этой точке:

$$\left|R_n(tn)\right|\le\frac{e^{tn}n^{n+1}}{n!}\left[te^{-t}\right]^n t.$$

Теперь воспользуемся формулой Стирлинга [1, с. 289]:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и продолжим оценку $\left|R_n(tn)\right|$:

$$\left|R_n(tn)\right|\le e^{tn}\left[te^{1-t}\right]^n\frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Отметим, что при $t\in(0;1)$ значение $te^{1-t}\in(0;1)$, а значит

$$R_n(tn)=e^{tn}O(\alpha^n),\ \alpha<1.$$

Подставив эту оценку в (2), получим:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(tn)^i}{i!}=e^{tn}\left(1+O(\alpha^n)\right),\ \alpha<1.$$

2. $t>1$. В (3) представим интеграл как разность двух интегралов:

$$R_n(tn)=\frac{e^{tn}}{n!}\times$$
$$\times\left(n^{n+1}\int_0^{+\infty}\left[ye^{-y}\right]^n dy-n^{n+1}\int_t^{+\infty}\left[ye^{-y}\right]^n dy\right).$$

Обратим внимание, что первый интеграл, взятый с коэффициентом n^{n+1}, равен гамма-функции $\Gamma(n+1)$, а следовательно и $n!$. Поэтому данную формулу можно переписать в следующем виде:

$$R_n(tn)=e^{tn}\left(1-\frac{n^{n+1}}{n!}\int_t^{+\infty}\left[ye^{-y}\right]^n dy\right).$$

Вновь воспользуемся формулой Стирлинга для факториала и получим, что

$$R_n(tn)=e^{tn}\left(1+O\left(\sqrt{n}\int_t^{+\infty}\left[ye^{1-y}\right]^n dy\right)\right). \quad (5)$$

Теперь рассмотрим отдельно интеграл

$$I=\sqrt{n}\int_t^{+\infty}\left[ye^{1-y}\right]^n dy.$$

Умножим и разделим подынтегральную функцию на $e^{\lambda y}$, $\lambda=\text{const}$:

$$I=\sqrt{n}\int_t^{+\infty}\left[ye^{1-y}\right]^n e^{\lambda y}e^{-\lambda y}dy.$$

Отметим, что максимум функции $ye^{1-y}e^{\frac{\lambda}{n}y}$ достигается в $y_{\max}=\dfrac{n}{n-\lambda}\underset{n\to+\infty}{\to}1$, а значит, при $t>1$ он располагается вне промежутка интегрирования. Грубо оценим I, заменив функцию $\left[ye^{1-y}\right]^n e^{\lambda y}$ ее максимальным значением на луче $[t,+\infty)$, достигающимся на краю этого промежутка, в точке $y=t$:

$$|I|\le\sqrt{n}\left[te^{1-t}\right]^n e^{\lambda t}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Так как при $t\in(1;+\infty)$ значения $te^{1-t}\in(0;1)$, то из (4) получается итоговая оценка $R_n(tn)$:

$$R_n(tn)=e^{tn}\left(1+O\left(\alpha^n\right)\right),\ \alpha<1.$$

Подставлив это в (2), получаем:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(tn)^i}{i!}=e^{tn}O\left(\alpha^n\right),\ \alpha<1.$$

Что завершает доказательство.

Интерес представляет также асимптотика суммы (1) для значений $t<0$. С одной стороны, следовало бы ожидать, что $C_n(t)=o\left(e^{tn}\right)$, так как функция Хевисайда равна нулю при этих значениях t. С другой стороны, сумма (1) была порождена применением метода Виддера, основывающимся на преобразовании Лапласа. Это преобразование не существует при отрицательных значениях аргумента, поэтому с этой точки зрения рассматривать отрицательные значения параметра t не имеет смысла. Вычисления говорят в пользу второго из тезисов. Действительно, ведь последний член суммы (1) $(tn)^n/n!$ не стремится к нулю, а значит, ожидание $C_n(t)=o\left(e^{tn}\right)$ не оправдано при $t<0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров Б. М., Подкорытов А. Н. Лекции по вещественному анализу. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 688 с.
2. Рябов В. М. Нахождение скачка функции-оригинала по его изображению по Лапласу // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 5. С. 777–785.
3. Widder D. The Laplace transform. Princeton: Princeton university press, 1946. 425 с.

A. S. Kolpakov, Ar. Yu. Filatov, An. Yu. Filatov
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

THE HEAVISIDE STEP FUNCTION APPROXIMATION WITH TAYLOR POLYNOMIAL OF EXPONENT

The Widder's method is considered in this paper. It allows finding the value of original function using its Laplace transform value. This method is applied to Heaviside step function which is shifted on one point by argument. After that a special sum appears. The asymptotic behavior of this sum is interesting and is developed, and the theorem about it is formulated and proved.

The inverse Laplace transform, Taylor formula, Widder's method, Heaviside step function, Gamma-function, the rate of convergence