

УДК 681.787

Е. В. Шалымов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

О вырождении поперечных мод в кольцевом конфокальном резонаторе

Рассматривается традиционный (линейный) оптический конфокальный резонатор, который характеризуется вырождением высших поперечных мод. Также анализируется оптический кольцевой конфокальный резонатор и его свойства. Анализ выполняется как в параксиальном, так и в ином приближении. Проверяется гипотеза о том, что спектр такого резонатора, как и у линейного конфокального резонатора, характеризуется вырождением частот его высших поперечных мод.

Вырождение мод, конфокальный резонатор, линейный резонатор, кольцевой резонатор

Линейный конфокальный резонатор представляет собой пару одинаковых вогнутых сферических зеркал, фокальные точки (F_1 и F_2) которых совмещены (рис. 1). Так как фокус сферического зеркала радиусом R расположен на расстоянии $R/2$, то радиусы кривизны зеркал резонатора (R_1 и R_2) равны длине резонатора L [1].

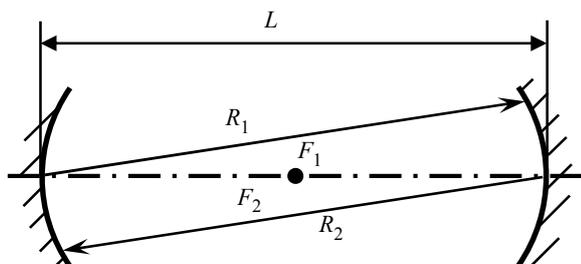


Рис. 1

В конфокальном резонаторе существуют вырождения мод двух типов. Вырождение первого типа состоит в том, что любое наперед заданное на одном из зеркал конфокального резонатора симметричное распределение поля, имеющее кривизну волнового фронта, совпадающую с кривизной зеркала, перейдет само в себя при полном обходе резонатора. Вырождение второго типа связано с тем, что частоты высших поперечных мод линейного конфокального резонатора равны частотам фундаментальных поперечных мод или располагаются

посередине между ними (вырождение частот высших поперечных мод) [2]. У произвольного устойчивого резонатора собственные частоты различных мод не совпадают друг с другом, и его спектр имеет гребенчатую структуру. Спектр линейного конфокального резонатора имеет эквидистантный характер (рис. 2).

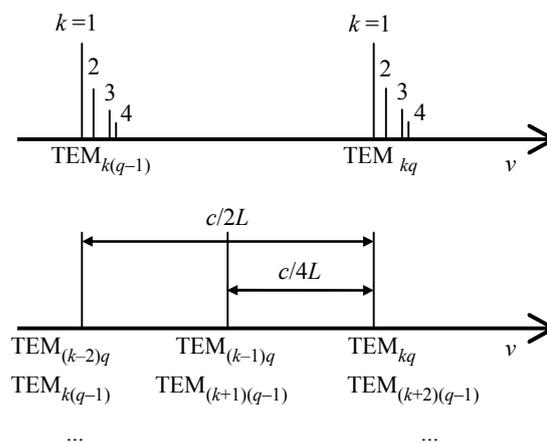


Рис. 2

Собственные частоты мод TEM_{qmn} устойчивого резонатора определяются следующей известной формулой:

$$\nu(q, k = m + n) = \frac{c}{2L} \left(q + \frac{k+1}{\pi} \arccos \left[1 - \frac{L}{R} \right] \right), \quad (1)$$

где q – продольный, k, m, n – поперечные индексы мод; c – скорость света; $R = R_1 = R_2$. Если $R = L$, формула (1) трансформируется в простое соотношение

$$v(q, k = m + n) = \frac{c}{4L}(2q + k). \quad (2)$$

Вырождение частот высших поперечных мод – это важное свойство линейного конфокального резонатора, т. е. конфокального интерферометра Фабри–Перо, широко используемого в измерительных интерферометрах и эталонах различных видов. Основное преимущество такого прибора состоит в следующем: в обычном интерферометре Фабри–Перо с плоскими зеркалами необходимо использовать пучок со сферическим волновым фронтом. При этом накладываются жесткие ограничения на отклонение оси вводимого пучка от оси интерферометра. В конфокальном резонаторе не важно, идеально ли ось пучка согласована с осью интерферометра, наклонена или смещена; фронт пучка может быть плоским, сходитьсся или расходиться. Важно, совпадает ли его частота с величиной, определенной выражением (2), или нет. Если совпадает, то резонатор прозрачен. Таким образом, вырождение мод существенно упрощает настройку и применение интерферометра.

Помимо линейных существуют также и кольцевые резонаторы, применяемые, например, в качестве чувствительных элементов оптических гироскопов. В имеющейся литературе отсутствует анализ свойств кольцевого конфокального резонатора. Цель данной работы – проанализировать свойства кольцевого конфокального резонатора и проверить гипотезу о том, что спектр такого резонатора, как и линейного конфокального, характеризуется вырождением частот его высших поперечных мод.

Параксиальный подход. Рассмотрим кольцевой резонатор, содержащий p перетяжек пучка. Пусть такой резонатор состоит из p одинаковых вогнутых зеркал и нескольких плоских зеркал. Спектр (собственные частоты) такого резонатора будет оцениваться с использованием стандартных матричных методов [3], [4]. Ограничимся рассмотрением плоских кольцевых резонаторов. Кольцевой резонатор не является осесимметричным, т. е. он должен характеризоваться двумя (ABCD) матрицами \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 , соответствующими

лучам, распространяющимся в плоскости резонатора и в перпендикулярной резонатору плоскости.

Рассчитываемый резонатор состоит из повторяющихся периодов, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением одного периода. Также задачу можно упростить, если использовать для расчета резонатора семеричный период. Спектр кольцевого резонатора описывается следующей формулой [3], [4]:

$$v_{nmq} = \frac{c}{L} \left[q + \frac{p}{2\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \left(\frac{A_1 + D_1}{2} \right) + \frac{p}{2\pi} \left(m + \frac{1}{2} \right) \arccos \left(\frac{A_2 + D_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \right], \quad (3)$$

где c – скорость света; L – длина осевого контура резонатора; q – продольный, m, n – поперечные индексы мод; p – число перетяжек пучка за один обход резонатора; $A_1 + D_1, A_2 + D_2$ – суммы диагональных элементов лучевых матриц периода резонатора \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 соответственно; ε – коэффициент, равный нулю при четном числе зеркал.

Из формулы (3) видно, что при $A_1 + D_1 = A_2 + D_2 = 0$ частотный интервал между соседними поперечными модами будет кратен интервалу между соседними продольными модами. В этом случае спектр резонатора будет определяться следующим выражением:

$$v_{nmq} = \frac{c}{L} \left[q + \frac{p}{4} (n + m + 1) + \frac{1}{2} \varepsilon \right].$$

При этом если $p = 1$, то расстояние между любыми двумя поперечными модами равно целому числу четвертей расстояний между двумя соседними продольными фундаментальными модами. Если $p = 2$, то этот случай аналогичен линейному конфокальному резонатору, у которого это расстояние равно целому числу половин расстояний между двумя соседними продольными фундаментальными модами. При $p = 4$ частота любой поперечной моды совпадает с частотой некоторой продольной.

Рассмотрим условие вырождения мод. В параксиальном приближении волновой фронт гауссова пучка можно считать сферическим. Пусть резонатор имеет квадратную форму со стороной, равной a , и пусть одно из зеркал (зеркало 2) является вогнутым сегментом тора, а другие (зеркала 1, 3 и 4) – плоскими (рис. 3).

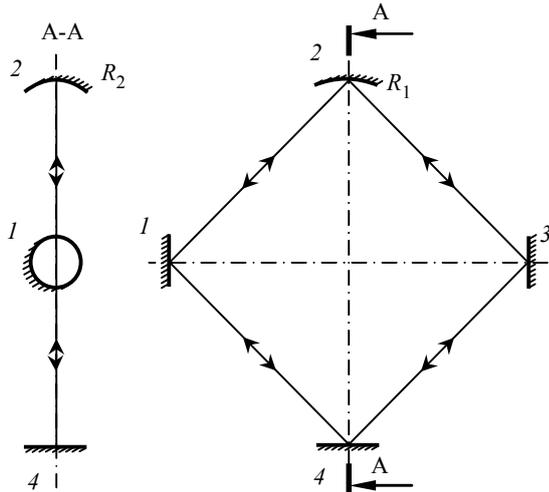


Рис. 3

Побочные фокусные расстояния, соответствующие плоскости резонатора и ортогональной ей плоскости, равны [4]:

$$f_1 = \frac{R_1 \cos \vartheta}{2}, \quad f_2 = \frac{R_2}{2 \cos \vartheta},$$

где ϑ – угол падения осевого луча на вогнутое зеркало; R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности зеркала, соответствующие плоскости резонатора и ортогональной ей плоскости. Предположим сначала, что вогнутое зеркало имеет сферическую форму с радиусом кривизны $R = R_1 = R_2$. В этом случае сумма элементов главной диагонали лучевых матриц резонатора будет равна:

$$\begin{cases} A_1 + D_1 = 2 - \frac{8a}{R \cos \vartheta}; \\ A_2 + D_2 = 2 - \frac{8a \cos \vartheta}{R}. \end{cases}$$

Таким образом, выражение собственных частот поперечных мод требует, чтобы два следующих условия были выполнены одновременно:

$$\begin{cases} R = \frac{4a}{\cos \vartheta}; \\ R = 4a \cos \vartheta. \end{cases}$$

Конечно, это невозможно для сферического, но возможно для указанного ранее торообразного вогнутого зеркала, кривизна которого в плоскости резонатора $R_1 = 4a / \cos \vartheta$, и $R_2 = 4a \cos \vartheta$ – в перпендикулярной резонатору плоскости. В этом случае спектр резонатора будет выглядеть следующим образом:

$$\nu_{nmq} = \frac{c}{L} \left[q + \frac{1}{4}(n + m + 1) \right].$$

Видно, что при этом $f_1 = f_2 = 2a$, а фокальные точки вогнутого зеркала (передняя и задняя) совмещены. В случае, когда резонатор квадратной формы содержит два одинаковых вогнутых зеркала на противоположных углах, моды будут вырождаться при $R_1 = 2a / \cos \vartheta$, $R_2 = 2a \cos \vartheta$ и $f_1 = f_2 = a$.

Непараксиальный подход. Моды кольцевого плоского резонатора достаточно точно описываются с помощью астигматичного пучка Эрмита–Гаусса [3]:

$$\begin{aligned} E_{nm}(x, y, z) &= A(x, y, z) \exp \{ j\varphi(x, y, z) \} = \\ &= A(x, y, z) \exp \left\{ j \left[\frac{(z - z_1) k x^2}{2[(z - z_1)^2 + b_1^2]} + \right. \right. \\ &+ \frac{(z - z_2) k y^2}{2[(z - z_2)^2 + b_2^2]} - \left. \left. \left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_1}{b_1} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(m + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_2}{b_2} \right) + kz + \varphi_0 \right] \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где n и m целые значения – поперечные индексы мод; $A(x, y, z)$ – амплитуда гауссова пучка, $\varphi(x, y, z)$ – его фаза; $z_{1,2}$ – расстояния от начала координат до перетяжек в плоскостях xOz и yOz соответственно; k – волновое число; $b_{1,2}$ – параметры конфокальности гауссова пучка в тех же плоскостях и φ_0 – начальная фаза гауссова пучка.

Вырождение спектра резонатора требует, чтобы моды с одинаковой суммой поперечных индексов имели одинаковую фазу, а значит $z_1 = z_2 = z_0$ и $b_1 = b_2 = b$. Таким образом, уравнение (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{nm}(x, y, z) &= A(x, y, z) \times \\ &\times \exp \left\{ j \left[\frac{(z - z_0) k r^2}{2[(z - z_0)^2 + b^2]} - \right. \right. \\ &\left. \left. - (n + m + 1) \operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_0}{b} \right) + kz + \varphi_0 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

При расчете резонатора можно использовать свойства симметрии. Однократный обход резонатора, состоящего из p одинаковых сегментов с длиной l , на резонансных частотах приводит к набегу фазы, который равен:

$$\frac{plkr^2}{2 \left[b^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]} - p(n+m+1) \times \arctg \left(\frac{lb}{b^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} \right) + kpl + \varphi' = 2\pi q, \quad (5)$$

где φ' – набег фазы за счет прохождения таких элементов, как вогнутые зеркала, линзы и т. д.; q – продольный целочисленный индекс моды. Из (5) получаем спектр резонатора:

$$v_{nmq} = \frac{c}{L} \left[q + \frac{p}{2\pi} (n+m+1) \times \arctg \left(\frac{lb}{b^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} \right) - \frac{plkr^2}{4\pi \left[b^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]} - \frac{\varphi'}{2\pi} \right]. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что при $b = l/2$ частотный интервал между соседними продольными модами равен целому числу интервалов между соседними продольными модами. При этом спектр резонатора выглядит следующим образом:

$$v_{nmq} = \frac{c}{L} \left[q + \frac{p}{4} (n+m+1) - \frac{pkr^2}{2\pi l} - \frac{\varphi'}{2\pi} \right]. \quad (7)$$

Волновой фронт гауссова пучка имеет параболическую форму, поэтому, чтобы обеспечить взаимную компенсацию третьего и четвертого членов в формуле (7), необходимо использовать параболические зеркала в резонаторе. Рассмотрим условие вырождения в непараксиальной области на следующем примере. Пусть резонатор состоит из трех плоских и одного параболического зеркала, расположенных в вершинах квадрата со стороной a . Побочные фокусные расстояния параболического зеркала в двух главных меридиональных сечениях, равны:

$$f_1 = F \cos \vartheta, \quad f_2 = \frac{F}{\cos \vartheta}, \quad (8)$$

где F – главное фокусное расстояние этого зеркала.

Волновой фронт гауссова пучка описывается как [3]

$$z = z_0 - \frac{r^2}{2 \left(z_0 + \frac{b^2}{z_0} \right)}, \quad (9)$$

где z_0 – значение z , при котором $r = 0$, т. е. в точке $(0, z_0)$ волновой фронт пересекает ось z . При $z_0 = l/2 = 2a$ свет достигает параболического зеркала. Используя (8) и (9), можно получить:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 - \frac{r^2}{2 \left(z_0 + \frac{b^2}{z_0} \right)} = z_0 - \frac{r^2}{4f_1} \\ z_0 - \frac{r^2}{2 \left(z_0 + \frac{b^2}{z_0} \right)} = z_0 - \frac{r^2}{4f_2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{l}{2 \cos \vartheta}; \\ F = \frac{l \cos \vartheta}{2}. \end{array} \right.$$

Эти условия не выполняются для осесимметричного параболического зеркала, но могут быть выполнены для зеркала с различными главными фокусными расстояниями в двух главных меридиональных сечениях равными: $F_1 = l/[2 \cos \vartheta] = 2a/[\cos \vartheta]$ в плоскости падения и $F_2 = [l \cos \vartheta]/2 = 2a \cos \vartheta$ в ортогональной плоскости. Следующая формула определяет спектр резонатора:

$$v_{nmq} = \frac{c}{4a} \left[q + \frac{1}{4} (n+m+1) - \frac{kr^2}{8\pi a} - \frac{kr^2}{4\pi f} \right].$$

Поскольку $f = f_1 = f_2 = 2a = l/2$, то

$$v_{nmq} = \frac{c}{4a} \left[q + \frac{1}{4} (n+m+1) \right].$$

Если квадратный резонатор будет составлен двумя плоскими и двумя одинаковыми астигматическими параболическими зеркалами, то спектр станет вырожденным при $F_1 = l/[2 \cos \vartheta] = a/[\cos \vartheta]$ и $F_2 = [l \cos \vartheta]/2 = a \cos \vartheta$. В этом случае $f = f_1 = f_2 = a = l/2$.

В заключение можно сказать следующее. Были проанализированы свойства кольцевого конфокального резонатора. Подтверждена гипотеза о том, что спектр такого резонатора, как и линейного конфокального резонатора, характеризуется вырождением частот его высших поперечных мод. Таким образом, в случае, когда пучок с произвольным волновым фронтом на входе в резонатор имеет частоту, совпадающую с одной из этих вырожденных собственных частот, он будет возбуждать в резонаторе одну или несколько мод. Это свойство может быть, в частности, использовано в оптических гироскопических приборах.

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук В. Ю. Венедиктову и д-ру техн. наук В. Ю. Филатову за плодотворные и стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салех Б. Тейх М. Оптика и фотоника. Принципы и применения. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2012. Т. 1. 760 с.

2. Малютин, А. А. Вырожденные эллиптические моды конфокального резонатора // Квантовая электроника. 1997. Т. 24, № 8. С. 736–740.

3. Быков В. П. Силичев О. О. Лазерные резонаторы. М.: Физматлит, 2004. 320 с.

4. Ищенко. Е. Ф. Открытые оптические резонаторы: Некоторые вопросы теории и расчета. М.: Сов. радио, 1980. 208 с.

E. V. Shalymov

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

ON THE DEGENERATION OF TRANSVERSE MODES IN A RING CONFOCAL CAVITY

There is well-known device – classic confocal resonator (linear confocal cavity). Linear confocal cavities are characterized by degeneration of higher transverse modes. There is no analysis of the properties of the ring confocal cavity in the literature. In the article properties of a ring confocal cavity are analyzed and the hypothesis that the spectrum of this device are characterized by degeneration of higher transverse modes is checked.

Degeneration of modes, confocal cavity, linear cavity, ring cavity

УДК 534.232

Б. Г. Степанов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Об излучении одиночным преобразователем волноводного типа через его водозаполненные апертуры в полубесконечные пространства

Для одиночного преобразователя волноводного типа, образованного соосным набором пьезоцилиндров с фазированным возбуждением по типу бегущей волны, получено решение задачи об излучении через его водозаполненные апертуры в граничащие с ними полубесконечные пространства. Приводятся примеры расчетов распределения нормальных компонент колебательной скорости во фронтальной и тыльной апертурах, частотных характеристик звукового давления при излучении во фронтальном и тыльном направлениях, а также характеристик направленности. Анализируется влияние конструктивных параметров преобразователя волноводного типа на указанные характеристики.

Гидроакустический преобразователь, волновод, излучение в полупространство, синтез частотных характеристик

В работах [1], [2] рассматривались принцип построения и основные характеристики эффективных сверхширокополосных (3 октавы и более) гидроакустических преобразователей волноводного типа (ПВТ), которые представляют собой соосный набор N идентичных, водозаполненных пьезоцилиндров l с внутренним радиусом a , высотой l и межцентровым расстоянием d (рис. 1), разделенных по торцам акустически гибкими проклад-

ками 2, обеспечивающими независимость колебаний пьезоцилиндров. Внешняя боковая поверхность пьезоцилиндров и всего ПВТ является свободной, например граничит с воздухом. Возбуждение пьезоцилиндров осуществляется электрическими напряжениями $U_i = U_{mi}(\omega)e^{j\psi_i(\omega)}$, где $U_{mi}(\omega)$ и $\psi_i(\omega)$ – амплитуды и фазы электрических напряжений, которые в общем случае зави-