УДК 519.23, 004.94

Е. Ю. Закемовская
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Выбор частоты дискретизации при применении ортогонального дискретного вейвлет-преобразования

Определены основные условия восстановления ортогональным дискретным вейвлет-преобразованием информативного сигнала на фоне белого шума с минимальными амплитудно-фазовыми искажениями. Большое внимание уделено выбору частоты дискретизации исследуемого сигнала до осуществления преобразования.

Частота дискретизации, адаптивные фильтры, вейвлет-фильтр

Постановка задачи. Проблема применения ортогонального дискретного вейвлет-преобразования (ОДВП) для выделения информативной составляющей сигнала на фоне шума состоит в зависимости результатов данного типа дискретного вейвлет-преобразования от выбора частоты дискретизации исследуемой выборки. При осуществлении ОДВП используется двухканальная схема, в которой исходный сигнал делится на две субполосы, каждая из которых за счет операции прореживания отсчетов в два раза меньше исходной. В результате рекурсивного повторения этого процесса для обеих субполос получаем древовидное разбиение спектра на определенное количество уровней. Операция «прореживание отсчетов» может привести к эффекту наложения спектров (элайзингу) внутри каждой из субполос, следовательно, большей зависимости результатов преобразования от точности определения уровня разложения и числа нулевых моментов выбранного базиса. Уменьшение числа отсчетов исследуемой выборки при переходе с уровня J на уровень $(J+1)$ вейвлет-дерева делает это преобразование зависимым от статистических свойств шума, от соответствующего продолжения сигнала конечной длины на его границах. Чтобы снизить влияние операции «прореживание отсчетов» на результаты вейвлет-преобразования, следует применять фильтры с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) [1], но данный тип вейвлет-фильтров (с большим числом нулевых моментов) более подвержен эффекту Гиббса, который возникает в результате ограниченности спектра вейвлет-фильтра и неограниченности спектра сигнала [2].

Анализ проблемы. Далее будет показано, что выбор частоты дискретизации $f_{д}$ исследуемого сигнала, чтобы снизить влияние эффекта наложения спектров, может быть осуществлен согласно следующему выражению:

$$f_{д} = 2 f_{\max} L_{fc}, \qquad (1)$$

где $f_{\max}$ – максимальная частота в спектре исследуемого сигнала; L_{fc} – основной период (число отсчетов) базисной вейвлет-функции.

Условия восстановления информативного сигнала из аддитивной смеси «сигнал-помеха» с помощью ОДВП с минимальными амплитудно-фазовыми искажениями могут быть сформулированы следующим образом:

– соответствующий расчет фильтров анализа и синтеза;

– соответствующее продолжение сигнала конечной длины после разрыва;

– выбор способа пороговой обработки вейвлет-коэффициентов;

– выбор уровня разложения.

Рассмотрим основные требования, предъявляемые к вейвлет-фильтрам анализа и синтеза для осуществления ОДВП полного восстановления сигнала.

Полное восстановление исходного сигнала на выходе системы анализа-синтеза, свободное от элайзинга, обеспечивают квадратурно-зеркальные фильтры [1] – фильтры с конечной импульсной характеристикой, частотная характеристика которых симметрична относительно половины частоты дискретизации. Эта частота называется квадратурной.

Вейвлет-базисы, построенные на основе квадратурно-зеркальных фильтров, являются ортогональными. К множеству ортогональных вейвлетов с компактным носителем относятся вейвлеты Добеши, симлеты, койфлеты и т. д., обладающие различными частотно-временными свойствами [3].

Следует отметить, что квадратурно-зеркальные фильтры обеспечивают ликвидацию элайзинга (вне зависимости от частотных свойств ортонормированного базиса) только на выходе всей системы анализа-синтеза, в то время как в отдельных субполосах элайзинг остается и при недостаточно точно выбранной частоте дискретизации влияет на результат преобразования.

Среди ортогональных вейвлет-базисов вейвлеты Добеши оптимальны в том смысле, что они имеют минимальный размер носителя при заданном числе нулевых моментов [3]. Вейвлет-фильтры Добеши также являются нелинейно-фазовыми фильтрами.

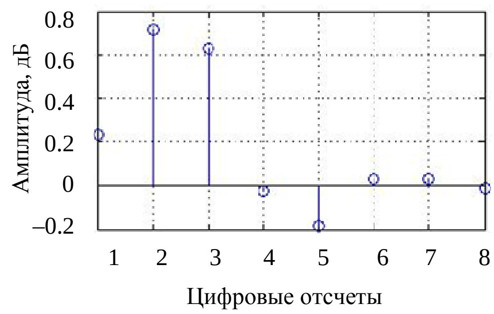
На рис. 1 приведены импульсные характеристики низкочастотных (НЧ) фильтров анализа (*а*) и синтеза (*б*) Добеши 4.

На рис. 2 приведены амплитудно- и фазочастотная (ФЧХ) характеристики НЧ-вейвлет-фильтров анализа Добеши 4 (*а* и *б* соответственно), а на рис. 3 – АЧХ и ФЧХ НЧ-вейвлет-фильтров синтеза Добеши 4 (*а* и *б* соответственно). На рис. 4 изображены графики фазовых задержек, вносимых этими фильтрами (*а* – синтеза; *б* – анализа) в результат преобразования.

На графиках частотных характеристик вейвлет-фильтров (рис. 2–4) по оси абсцисс отложена нормированная частота Найквиста.

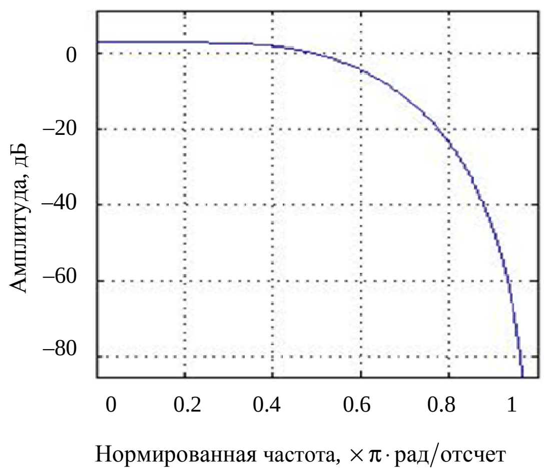
В отличие от фурье-преобразования функции анализа и синтеза прямого и обратного вейвлет-преобразований не являются комплексно-сопряженными, что приводит к групповому запаздыванию

а

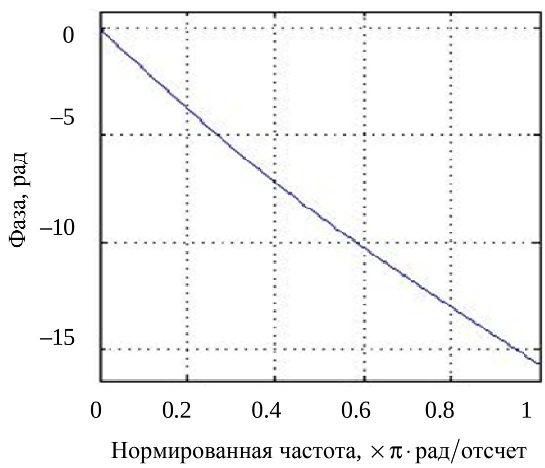


б

Рис. 1



а



б

Рис. 2

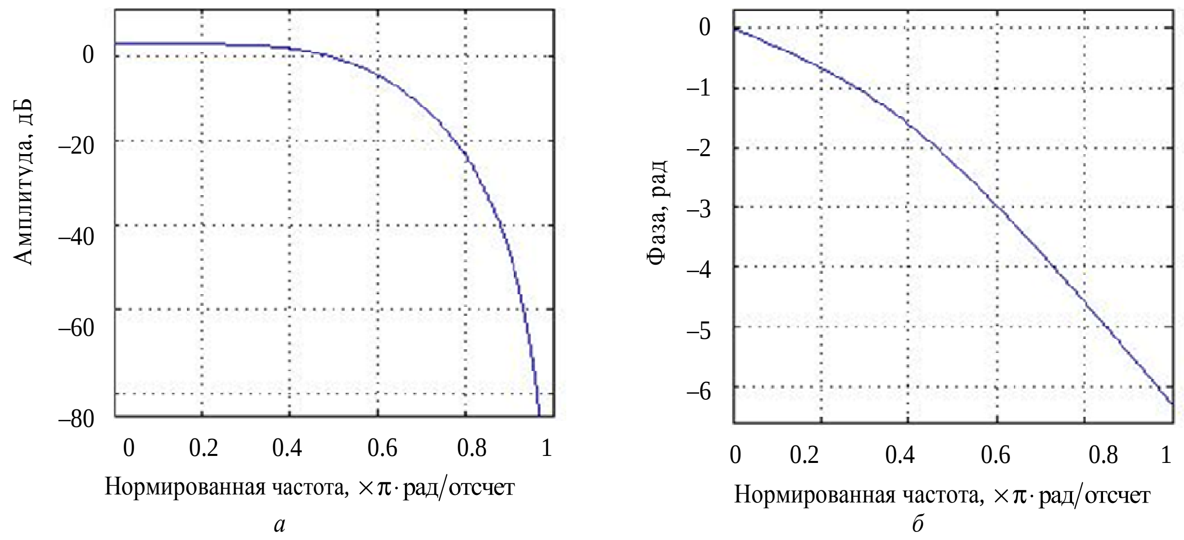


Рис. 3

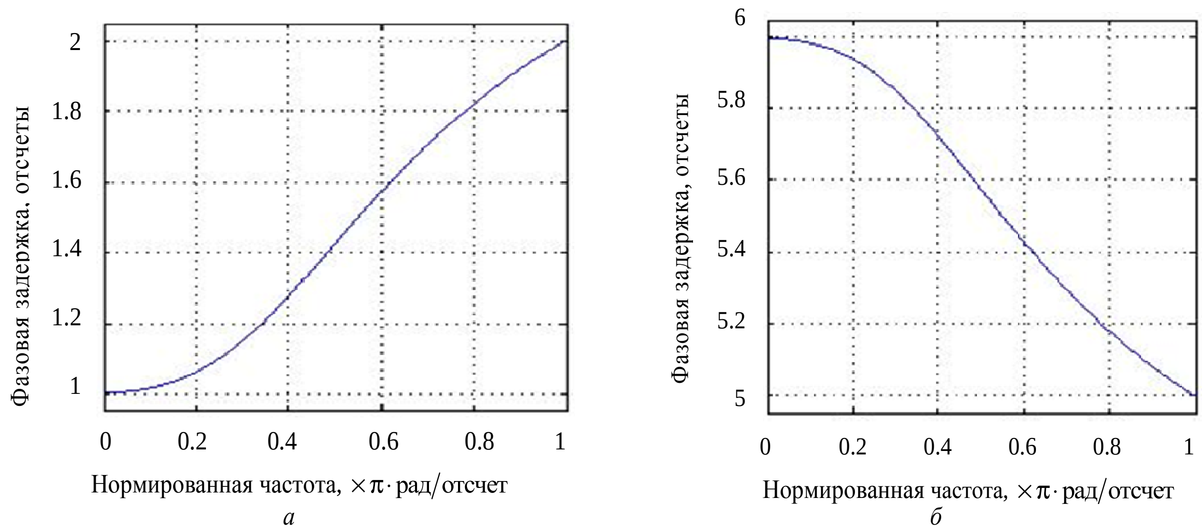


Рис. 4

результатов фильтрации. Задержка τ, вносимая фильтрами анализа и синтеза, при ОДВП одна и та же для каждого уровня вейвлет-дерева и может быть определена как $\tau = \frac{L_f}{2}$ (где L_f – число отсчетов импульсной характеристики вейвлет-фильтра) и скомпенсирована при выполнении обратного ОДВП.

Второе условие полного восстановления сигнала, как было указано ранее, – соответствующее продолжение сигнала конечной длины после разрыва. Проблема фильтрации сигналов конечной длины заключается в пересечении фильтром границы сигналов. Существующие способы решения данной проблемы приведены в [1]. В данной статье применен метод периодического продолжения сигнала, так как для выполнения ОДВП выбран несимметричный вейвлет Добеши. Длительность отрезков продолжения по краям разрывов сигнала составляет $t = \frac{L_f}{2} - 1$ [1] – для каждого уровня разложения.

Третьим условием восстановления сигнала с помощью ОДВП с минимальными амплитудно-фазовыми искажениями является соответствующий способ пороговой обработки.

Пороговая вейвлет-обработка характеризуется пороговой функцией $\rho_T(x)$ и порогом T. Существующие способы пороговой обработки рассмотрены в [3].

Для рассмотренного сигнала Bumps далее будет применена мягкая пороговая вейвлет-обработка с минимаксным порогом, который вычисляется на основе среднеквадратического риска с помощью минимизации максимальной оценки функции риска. Следует также отметить, что зна-

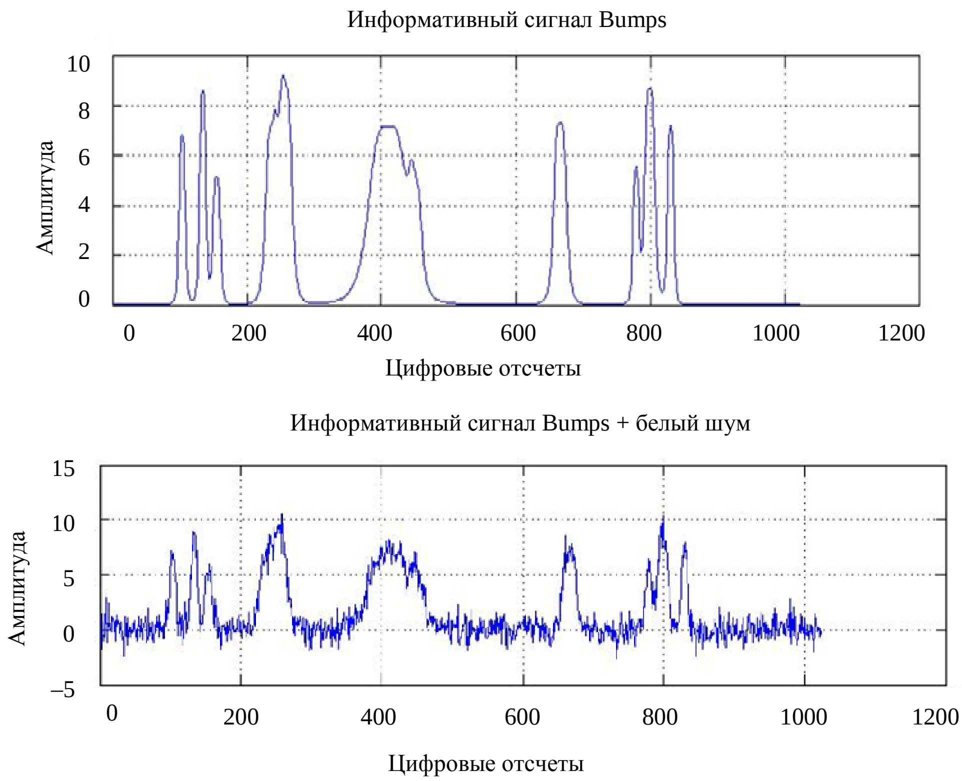


Рис. 5

чение порога принимается фиксированным для всех уровней разложения.

Четвертым условием восстановления является выбор оптимального дерева (уровня) вейвлет-разложения.

Для оценки оптимального дерева вейвлет-разложения естественно использовать алгоритм динамического программирования [3] и классические критерии на основе энтропии [3], которые обладают свойством аддитивности (объединения) по отношению к сигналам и дают информационные оценки сигналам.

В данной статье используется критерий на основе энтропии Шеннона $E(W) = -\sum_i W_i^2 \log\left(W_i^2\right)$ при следующем соглашении: $0 \cdot \log(0) = 0$, где W_i – вейвлет-коэффициенты i-го уровня разложения.

Будем считать, что основная информативная часть сигнала содержится в низкочастотной области. Фильтровая реализация ОДВП как одностороннего дерева вейвлет-разложения приведена в [3].

Пример. Применим ОДВП вейвлетом Добеши 4 для выделения информативной составляющей сигнала Bumps, приведенного на рис. 5: отношение сигнал/шум исходной смеси составляет 12 дБ, шум белый гауссов, число отсчетов на период принято равным 1024 отсчета (далее будет изменяться и в итоге уточнено).

На рис. 6 приведена зависимость результатов фильтрации ОДВП сигнала Bumps от уровня разложения при заданном числе отсчетов на период. Видно, что с ростом числа отсчетов на период погрешность фильтрации менее зависима от уровня разложения. На рис. 7 приведена зависимость результатов фильтрации ОДВП сигнала Bumps от числа нулевых моментов вейвлет-базиса при заданном числе отсчетов на период. Видно, что с ростом числа отсчетов на период погрешность фильтрации менее зависима от выбранного базиса.

Из результатов, приведенных на рис. 6, 7, следует возрастающее влияние эффекта наложения спектра с уменьшением частоты дискретизации.

Все погрешности на рис. 6 приведены в относительных величинах. Величина относительной среднеквадратической погрешности фильтрации [%] (СКО-погрешность) равна:

$$\sigma_{\mathrm{Osko}} = \frac{\sigma_{\mathrm{sko}}}{\sigma_{\mathrm{s}}} 100, \qquad (2)$$

где $\sigma_{\mathrm{sko}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{x}_i\right)^2}$ – абсолютная среднеквадратическая погрешность фильтрации; x_i –

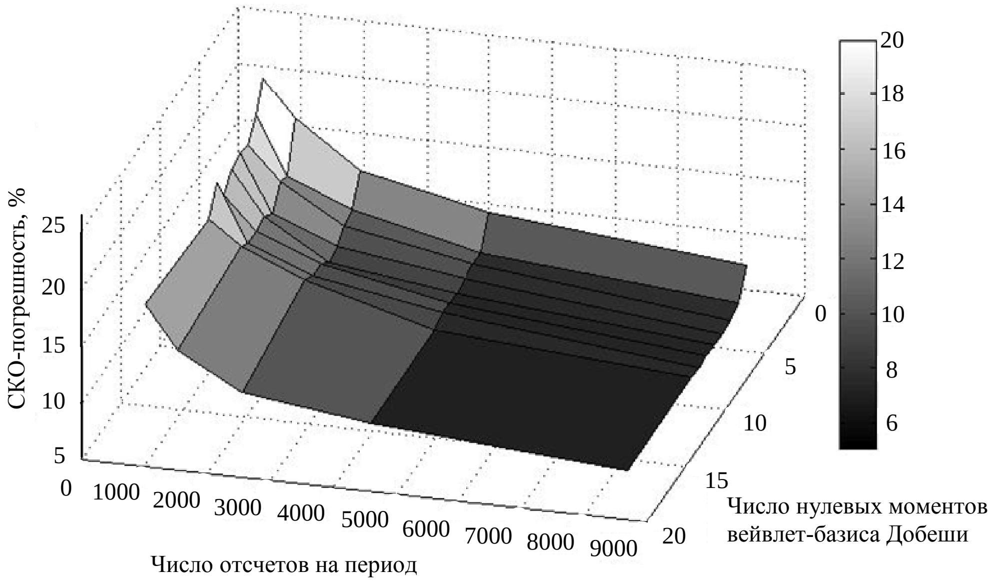


Рис. 6

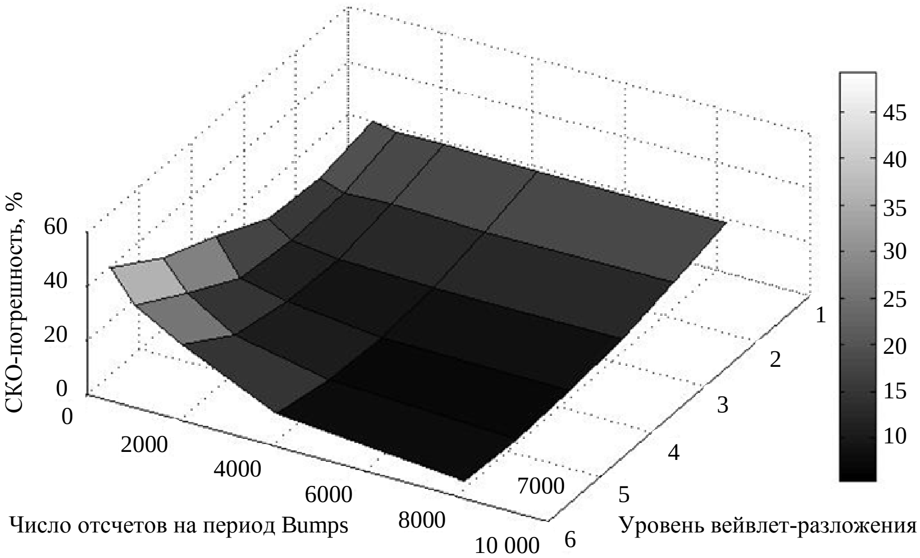


Рис. 7

исходный полезный сигнал; $\hat{x}_i$ – оценка исходного полезного сигнала; N – количество отсчетов исследуемого сигнала; $\sigma_S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$ – среднеквадратическое (действующее) значение сигнала.

Относительная погрешность фильтрации [%] в равномерной метрике равна:

$$\sigma_{O\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\max|x_i|}100,$$

где $\Delta_{\max} = \max\limits_{i=1:N}|x_i - \hat{x}_i|$ – абсолютная погрешность фильтрации в равномерной метрике.

Методика выбора частоты дискретизации. Из теоремы Котельникова [3] известно, что если носитель функции $\hat{f}$, которая равна свертке исходного сигнала с идеальным НЧ-фильтром (частота среза фильтра $2\pi/T$) содержится в $[-\pi/T; \pi/T]$, то это условие гарантирует отсутствие резких изменений f между последовательными отсчетами и это позволяет восстановить ее с помощью интерполяции. Вейвлет-фильтр не обладает прямоугольной АЧХ, поэтому частота дискретизации (1) увеличивается на множитель L_{fc}, равный длительности основного периода базисной вейвлет-функции. На рис. 8 приведена вейвлет-функция Добеши 4 (db4) *1* и выделена основная гармоника *2* в ее спектре, период которой составляет 1.4 отсчета; центральная частота 0.71429.

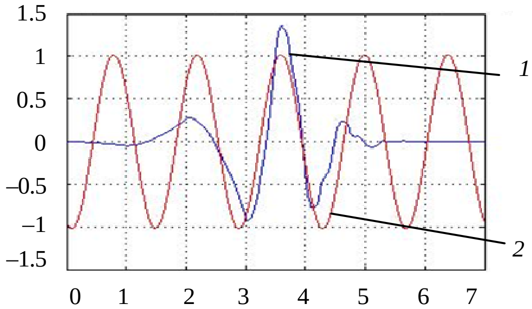


Рис. 8

На рис. 9 приведено относительное распределение энергии сигнала Bumps, построенное спектроанализатором, в зависимости от числа отсчетов на период данного сигнала.

Из рис. 9 следует, что для полного описания энергетического спектра сигнала Bumps достаточно 1024 отсчетов (рис. 9, *а*). Ясно, что чем больше число отсчетов на период, тем выше частота дискретизации. Во избежание путаницы в обозначениях далее примем, что максимальная частота в спектре исследуемого сигнала 256 отсчетов в секунду (1024 отсчета за 4 с).

Соответственно, по (1) частота дискретизации сигнала Bumps, требуемая для осуществления преобразования, равна:

$$f_{\text{д}} = 2 f_{\max} \cdot L_{fc} = 2 \cdot 256 \cdot 1.4 = 716.8 \ \text{с}^{-1},$$

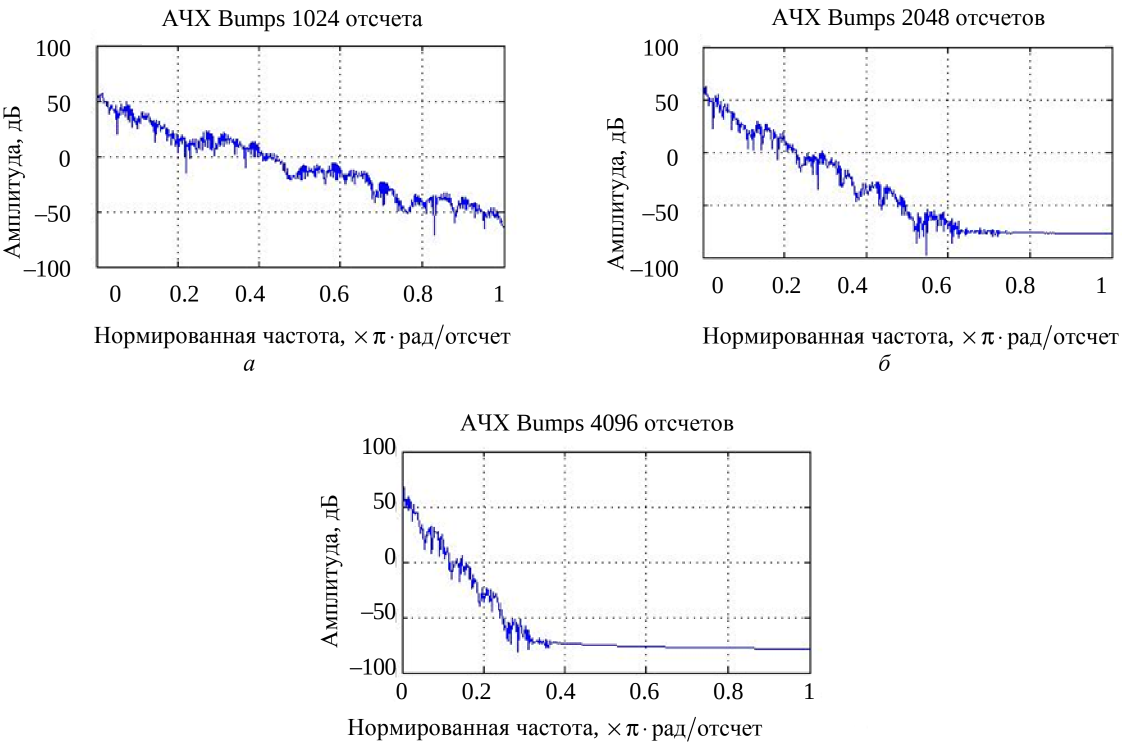
что соответствует числу отсчетов на период сигнала Bumps – 2867 отсчетов.

На каждом уровне древовидного ОДВП сигнал должен быть четной длины [1], поэтому число отсчетов на период следует выбирать пропорциональным степени двойки. Ближайшее по верхней границе к 2867 отсчетам, кратное степени двойки число отсчетов – 4096 отсчетов для осуществления ОДВП.

Результат фильтрации сигнала Bumps для выбранного числа отсчетов на период – 4096 отсчетов – представлен на рис. 10.

На рис. 11, *а* приведена зависимость относительной среднеквадратической погрешности фильтрации, вычисленной по (2), от числа отсчетов на период исходного сигнала Bumps. На рис. 11, *б* приведена зависимость вычислительной сложности (O) вейвлет-алгоритма ОДВП от числа отсчетов на период сигнала Bumps.

Таким образом, методика выбора минимальной частоты дискретизации входного непрерывного сигнала, неограниченного по частоте, при осуществлении ОДВП для исключения эффекта наложения спектра может быть описана следующими шагами:



а *б* *в*

Рис. 9

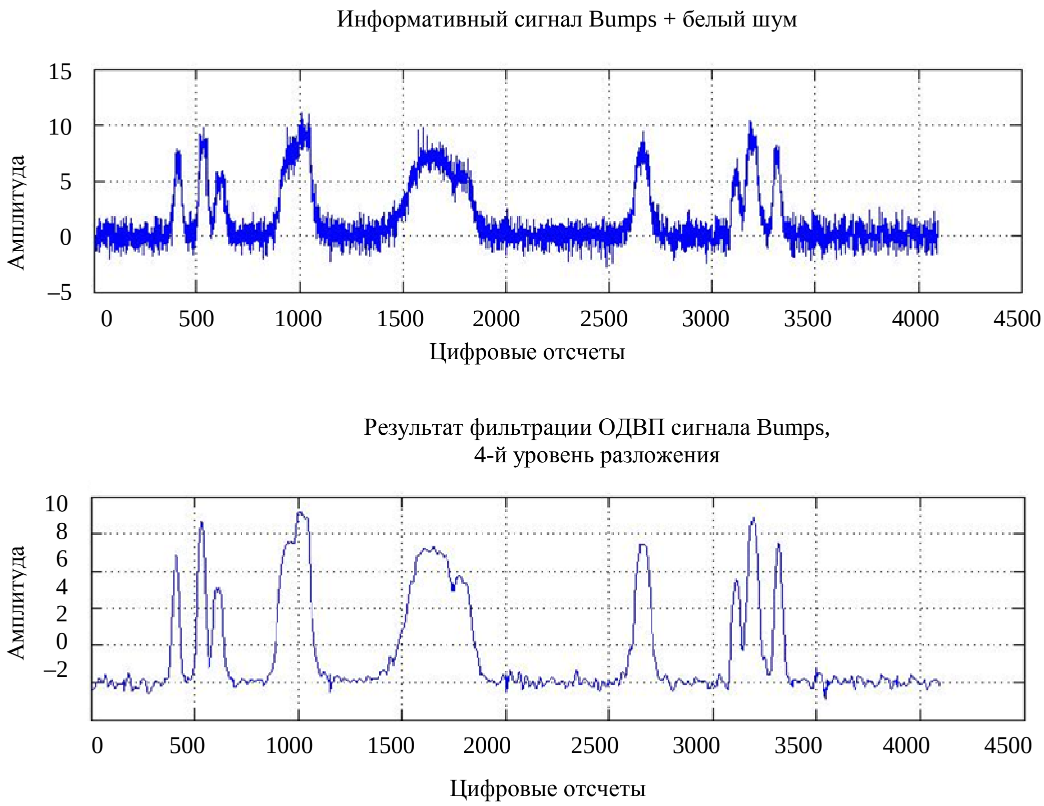


Рис. 10

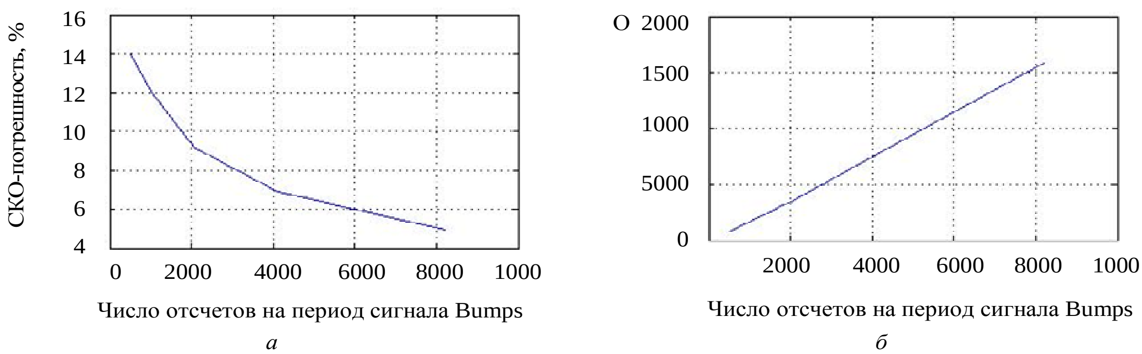


Рис. 11

1) провести предварительную фильтрацию непрерывного сигнала НЧ-фильтром с частотой среза $f_{\max}$;

2) рассчитать теоретическую частоту дискретизации $f_д^*$ полученного сигнала согласно теореме Котельникова: $f_д^* = 2 f_{\max}$;

3) определить основной период L_{fc} базисной вейвлет-функции;

4) рассчитать уточненную частоту дискретизации входного сигнала согласно выражению $f_д = f_д^* L_{fc}$.

Таким образом, результат фильтрации ОДВП сигнала Bumps при выборе частоты дискретизации согласно (1) менее зависим от уровня разложения, способа пороговой обработки, выбранного базиса, влияния краевого эффекта. Увеличение частоты дискретизации приводит к уменьшению погрешности фильтрации, но к увеличению вычислительной сложности алгоритма. Из рис. 11 следует, что, начиная с 4096 отсчетов на период сигнала Bumps, погрешность фильтрации уменьшается много медленнее, чем растет вычислительная сложность алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев В. И., Грибунин В. А. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999.

2. Авдеев Б. Я., Закемовская Е. Ю. Адаптивный вейвлет-алгоритм для измерительных каналов // Материалы 65-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава СПбГЭТУ «ЛЭТИ». СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.

3. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.

E. Yu. Zakemovskaya

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

CHOICE OF FREQUENCY OF DIGITIZATION AT APPLICATION OF ORTHOGONAL DISCRETE WAVELET-TRANSFORMATION

In article the basic conditions of restoration by orthogonal discrete wavelet-transformation (ODWT) an informative signal against whitenoise with the minimum peak-phase distortions are allocated. Much attention is given a choice frequency of digitization of an investigated signal before transformation realisation.

Sampling rate, adaptive filters, wavelet-filter