УДК 681.883.67.001.24

С. И. Коновалов, А. Г. Кузьменко
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

К вопросу о сдвиге резонансной частоты пьезопластины в зависимости от значения коэффициента электромеханической связи пьезоматериала

На основе использования аппарата электрических схем-аналогов рассмотрена пьезокерамическая пластина, нагруженная с двух сторон. Для частного случая симметричной нагрузки пластины активными импедансами (в том числе равными нулю) получено уравнение для определения частоты резонанса через частоту антирезонанса в зависимости от квадрата коэффициента электромеханической связи β^2. Приводятся результаты численных расчетов для различных степеней приближения β^2 к нулю. Полученные результаты могут быть использованы для расчета частотных характеристик и импульсных режимов работы пьезопреобразователей.

Пьезоэлектрический преобразователь, пьезопластина, частота резонанса, частота антирезонанса

Получение информации о разнообразных средах, материалах и объектах акустическими методами невозможно без использования пьезоэлектрических преобразователей (ПЭП). В их задачу в режиме излучения входит преобразование энергии возбуждающего электрического сигнала в энергию зондирующего акустического импульса. Принятый акустический сигнал поступает на приемный ПЭП, где он вновь преобразуется в электрический, после чего поступает в тракт обработки. В качестве активного элемента преобразователя в настоящее время используются как пьезокварц, так и пьезокерамика различных типов. Стоит отметить, что для пьезокварца коэффициент электромеханической связи обычно имеет достаточно малое значение ($\beta \approx 0.1$). Для пьезокерамических материалов в зависимости от состава пьезокерамики β может достигать значений порядка 0.4…0.5. Данное обстоятельство в режиме излучения приводит к некоторому изменению амплитудно-частотной характеристики ПЭП в зависимости от значений коэффициента β, а именно: с ростом коэффициента электромеханической связи частота резонанса смещается в область низких частот. Сдвиг частоты тем больше, чем больше значение β. Этот факт хорошо известен специалистам в области разработки пьезопреобразователей. Для пьезокварцевых ПЭП смещением частоты обычно пренебрегают вследствие малости коэффициента β.

При исследовании импульсного режима работы ПЭП, выполненных на основе пьезокерамики, необходимо учитывать указанную особенность поведения частотных характеристик преобразователей в зависимости от коэффициента β. В связи с этим при построении теоретических моделей работы импульсных преобразователей и разработке математических алгоритмов их расчета авторами [1], [2] предложено использовать «привязку» не к резонансной частоте преобразователя (это огограничивает общность результатов решения задач определения акустического сигнала на выходе ПЭП), а к антирезонансной. При этом возникает вопрос об определении связи резонансной и антирезонансной частот преобразователя. Ответ на поставленный вопрос может быть получен экспериментальным или теоретическим способом. Экспериментальное определение указанных частот не вызывает затруднений. Настоящая статья посвящена рассмотрению возможного теоретического способа решения задачи.

На рис. 1 приведена электрическая схема-аналог пьезокерамической пластины, которая нагружена с одной стороны на импеданс $Z_{н1}$, а с другой – на импеданс $Z_{н2}$ [3]. В схеме-аналоге $Z_1 = \rho_к c_к S \operatorname{tg}\dfrac{kl}{2}$; $Z_2 = \dfrac{\rho_к c_к S}{j \sin kl}$. Здесь $\rho_к$ – плотность пьезокерамики; $k = \dfrac{\omega}{c_к}$; $c_к = \sqrt{c_{33}^D / \rho_к}$ – скорость звуковой волны в пьезокерамике в режиме холостого хода электрической стороны (c_{33}^D – элемент матрицы жесткостей при постоянной электрической индукции D); $\beta^2 = \dfrac{e_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}^u c_{33}^D}$ – квадрат коэффициента электромеханической связи для пьезокерамической пластины ($\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; ε_{33}^u – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики при постоянной деформации); $k_U = e_{33} S / l$ – коэффициент электромеханической трансформации (e_{33} – пьезоконстанта; S – площадь грани с электродом; l – толщина пьезопластины); $C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_{33}^u S / l$ – электрическая емкость механически заторможенной пьезопластины.

Рассмотрим пьезопластину, не нагруженную с обеих сторон на среду. Это соответствует случаю, когда $Z_{н1} = Z_{н2} = Z_н = 0$. Тогда схема, представленная на рис. 1, приводится к схеме, показанной на рис. 2, где сопротивление $Z_н = 0$. Складывая последовательно включенные импедансы Z_2 и $\dfrac{Z_1}{2}$, получаем: $Z_2 + \dfrac{Z_1}{2} = -j\dfrac{Z_к}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x_к}{2}$, и схема принимает вид, представленный на рис. 3. Здесь $x_к = kl$ – частотный аргумент.

Если импеданс $Z_н$ чисто активный (в том числе и $Z_н = 0$), условием резонанса будет равенство нулю суммы реактивных сопротивлений:

$$-j\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_к}{2} - \frac{\beta^2}{x_к}\right) Z_к = 0,$$

и для определения значения $x_к$ при резонансе получаем трансцендентное уравнение

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_к}{2} - \frac{\beta^2}{x_к} = 0.$$

Это уравнение можно решать на ЭВМ численно с желаемой точностью. При $\beta^2 = 0$ решением уравнения будет $x_к = \pi$. При $\beta^2 \neq 0$ на резонансе $x_к \neq \pi$, причем, как будет видно из расчетов, $x_к < \pi$. Чем больше β^2, тем больше будет сдвиг резонансной частоты вниз.

Представляет интерес оценить порядок понижения резонансной частоты с тем, чтобы использовать это в дальнейших работах для расчета импульсного режима работы пьезопластины. При небольших значениях β^2 (некоторые оценки будут приведены далее) сдвиг резонансной частоты будет мал

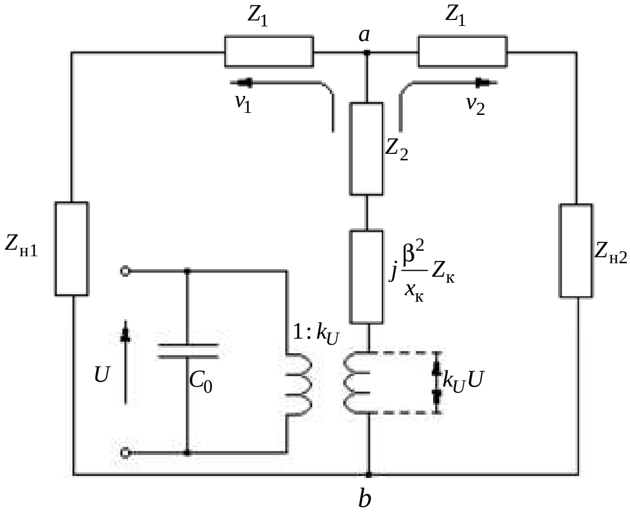

Рис. 1

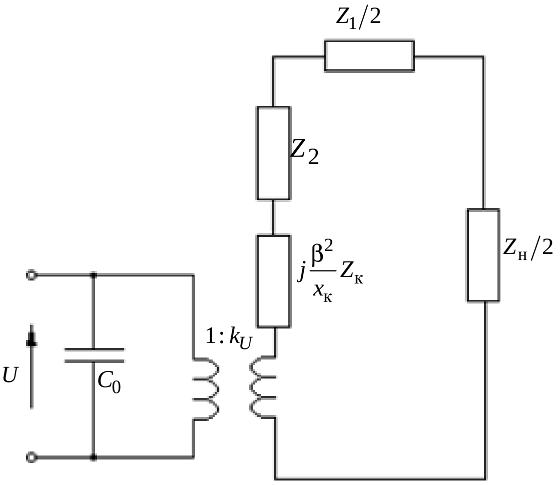

Рис. 2

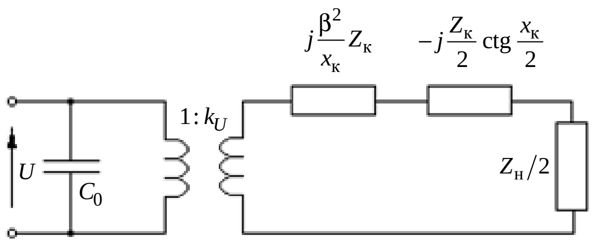

Рис. 3

по сравнению с π, т. е. $x_{рез} = \pi - \alpha$, где $\alpha << \pi$. Раскладывая в ряд $\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2}$, получим:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда для определения α получаем приближенное уравнение

$$\frac{\alpha}{4} - \frac{\beta^2}{\pi-\alpha} = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2 - \pi\alpha + 4\beta^2 = 0.$$

Его решением будет

$$\alpha_{рез} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16\beta^2}{\pi^2}}\right),$$

откуда

$$x_{рез} = \pi - \alpha_{рез} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{16\beta^2}{\pi^2}}\right),$$

или

$$\frac{x_{рез}}{\pi} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{16\beta^2}{\pi^2}}\right).$$

Из приведенного решения квадратного уравнения видно, что оно имеет смысл лишь в случае $16\beta^2 < \pi^2$, или $\beta^2 < \frac{\pi^2}{16} \approx 0.625$.

Если $\beta^2 << \frac{\pi^2}{16}$, то $\sqrt{1 - \frac{16\beta^2}{\pi^2}} \approx 1 - \frac{8\beta^2}{\pi^2}$, и тогда решением приближенного уравнения станет $\frac{\alpha}{\pi} \approx \frac{4\beta^2}{\pi^2}$.

В таблице для различных значений β^2 приведены значения α/π, вычисленные из точного уравнения, из точного решения приближенного уравнения и из приближенного решения приближенного уравнения.

Учитывая, что волновой аргумент, соответствующий антирезонансу, удовлетворяет соотношению $k_а l = \frac{\omega_а}{c_а} l = \pi$, а $k_{рез} l = \frac{\omega_{рез}}{c_{рез}} l = \pi$, получаем, что эффективная скорость звука в пластине при $\beta^2 \neq 0$ меньше скорости $c_а$; $\frac{\omega_а}{c_а} = \frac{\omega_{рез}}{c_{рез}}$, откуда $c_{рез} = c_а \frac{\omega_{рез}}{\omega_а} = c_а w_{ra}$, где $w_{ra} = f_{рез}/f_а$. Удобно ориентироваться на скорость звука в пластине при антирезонансе, так как ее значение вполне определено: $c_а = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho_к}}$, где c_{33}^D – упругий модуль пьезокерамики, а $\rho_к$ – плотность пьезокерамики. Тогда для пластины с коэффициентом $\beta^2 \neq 0$ можно волновой аргумент записать следующим образом:

$$x_{пл} = \frac{\omega}{c_а} l = \frac{\omega}{c_{рез}} l w_{ra} = x_{рез}\, w_{ra} = x_{рез}\, w_{ra}.$$

Отсюда следует практический вывод: чтобы оставаться в «координатах антирезонанса», в формулах для расчета частотной характеристики пьезопластины в режиме излучения следует аргумент x заменить на $x w_{ra}$.

α/π	β^2										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Точное уравнение	0	0.043	0.089	0.139	0.196	0.258	0.33	0.41	0.517	0.655	1.0
Точное решение приближенного уравнения	0	0.042	0.089	0.142	0.204	0.282	0.417	Не существует			
Приближенное решение приближенного уравнения, $\alpha/\pi = 4\beta^2/\pi^2$	0	0.041	0.081	0.122	0.162	0.203	0.243				

Используя формулы, приведенные в [1, с. 77] для пластины, нагруженной с одной стороны на демпфер с удельным импедансом $z_д$, а с другой – на воду с удельным импедансом $z_в$, для колебательной скорости $\dot{\xi}$ на поверхности пластины, граничащей с водой, можно записать

$$\dot{\xi} = -\left(\frac{k_U U}{Z_к}\right) \cdot F(x),$$

где $k_U = \frac{e_{33} S}{l}$ – коэффициент электромеханической трансформации; U – электрическое напряжение возбуждения; $Z_к = \rho_к c_к S$ – полное механическое сопротивление пьезокерамики;

$$F_{изл}(x) = \frac{A(x w_{ra})}{B(x w_{ra}) + jC(x w_{ra})},$$

где $A(x) = 1 - \cos x - j\frac{z_д}{z_к}\sin x$; $B(x) = \left(\frac{z_д}{z_к} + \frac{z_в}{z_к}\right) \times \left(\cos x - \frac{\beta^2}{x}\sin x\right)$;

$$C(x) = \left(1 + \frac{z_в z_д}{z_к^2}\right)\sin x - \frac{2\beta^2}{x}(1 - \cos x).$$

В случае отсутствия демпфера принимаем $z_д = 0$.

Таким образом, в настоящей статье разработан математический алгоритм, позволяющий оценить связь резонансной и антирезонансной частот пластинчатого пьезоизлучателя в зависимости от значения коэффициента электромеханической связи пьезоматериала. Полученные результаты могут быть использованы при проведении исследования импульсного режима работы пьезокерамического преобразователя.

Публикация выполнена в рамках государственной программы «Проведение научно-исследовательских работ (фундаментальных научных исследований, прикладных научных исследований и экспериментальных разработок)» базовой части государственного задания Минобрнауки России. Код проекта: 8.6743.2017/БЧ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов С. И., Кузьменко А. Г. Особенности импульсных режимов работы электроакустических пьезоэлектрических преобразователей. СПб.: Политехника, 2014. 294 с.

2. Коновалов С. И., Кузьменко А. Г. Физические основы работы и проектирования импульсных пьезопреобразователей в задачах измерения и контроля. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 228 с.

3. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / под ред. У. Мэзона; пер. с англ. // Физическая акустика. М.: Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204–324.

S. I. Konovalov, A. G. Kuz'menko

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

TO THE PROBLEM OF RESONANCE FREQUENCY SHIFT FOR A PIEZOCERAMIC PLATE SUBJECT TO VALUE OF ELECTROMECHANICAL COUPLING FACTOR OF A PIEZOCERAMIC MATERIAL

With use of the method of electric scheme-analogs, a piezoceramic plate loaded on both sides is considered. In a special case of a symmetrical load being an active impedance (including equality to zero), the equation is obtained for determing the resonance frequency trough the antiresonant frequency in dependence on square of electromechanical coupling factor β^2. The results of numerical calculations are given for different extent of approach β^2 to zero. The obtained results may be used for calculations frequency responses and pulsed modes of piezoelectric transducers.

Piezoelectric transducer, piezoceramic plate, resonance frequency, antiresonance frequency