УДК 698.35

Е. К. Грудяева, С. Е. Душин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Исследование математической модели Кенейла в технологическом процессе очистки сточных вод

Рассмотрены особенности математической модели Кенейла, описывающей пищевые цепи при биологической очистке. Представлены результаты исследования биохимических процессов в биореакторе, полученные с помощью компьютерного моделирования в программной среде Matlab/Simulink.

Математическая модель, активный ил, модель Кенейла, концентрация, пищевая цепь

Проблема очистки сточных вод возникла еще в древности, однако и по сей день не решена в полной мере. В настоящее время широко применяется биологический способ очистки воды с помощью активного ила. Для достижения наилучшего качества очистки стоков необходимо эффективное управление технологическим процессом, что невозможно без понимания закономерностей процессов, лежащих в основе. На сегодняшний день известно более 20 математических моделей, которые позволяют в той или иной степени описать эти закономерности. Среди них модели Моно, Герберта, Халдейна, Вавилина и др. Возникает задача выбора и исследования достаточно адекватной, но в то же время не слишком сложной модели для целей управления.

Одной из моделей, отвечающей поставленным требованиям, является модель Кенейла. Эта модель учитывает постоянный приток сточных вод на входе биореактора и зависимость концентрации простейших от концентрации бактерий и субстрата [1]–[3].

При составлении модели принимались следующие ограничения и допущения:

– подача субстрата в резервуар биореактора − непрерывная;

– состав активного ила образуется совокупностью биоценозов чистых культур бактерий и простейших;

– влияние температуры на удельные скорости роста, изменение скорости подачи кислорода, а также эффект насыщения простейших отсутствуют;

– процесс отмирания бактерий и простейших не учитывается;

– отсутствует обратная подача активного ила в реактор, т. е. рециркуляция не учитывается.

Математическая модель процесса роста бактерий и простейших вследствие поглощения субстрата может быть представлена системой нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\frac{x_{1\text{вх}}-x_1}{T}-\frac{\mu_m x_1 x_2}{Y(k_1+x_1)};\\ \frac{dx_2}{dt}&=-\frac{x_2}{T}+\frac{\mu_m x_1 x_2}{k_1+x_1}-\frac{f_m x_2 x_3}{g(k_2+x_2)};\\ \frac{dx_3}{dt}&=-\frac{x_3}{T}+\frac{f_m x_2 x_3}{k_2+x_2},\end{aligned} \qquad (1)$$

где x_1, x_2 и x_3 − концентрации субстрата, бактерий и простейших соответственно; $x_{1\text{вх}}$ – постоянная концентрация субстрата на входе; Y, g – экономические коэффициенты бактерий и простейших; μ_m, f_m – максимальные удельные скорости роста бактерий и простейших; k_1, k_2 – константы полунасыщения, равные концентрации субстрата, при которых скорость процесса равна $\mu_m / 2$ и $f_m / 2$ соответственно; T – период аэрации или время контакта составляющих.

Модель (1) может быть приведена к безразмерному виду, если ввести переменные: $x = x_1 / x_{1\text{вх}}$; $y = x_2 / x_{1\text{вх}}Y$; $z = x_3 / x_{1\text{вх}}Yg$; $\tau = Qt / V = t / T$; $A = \mu_m T$; $B = f_m T$; $C = k_1 / x_{1\text{вх}}$; $D = k_2 / x_{1\text{вх}}Y$, где Q – объемный расход; V – объем.

В результате преобразований уравнений (1) получается подобная модель вида

$$\frac{dx}{d\tau}=1-x-A\frac{x}{C+x}y;$$
$$\frac{dy}{d\tau}=A\frac{x}{C+x}y-y-B\frac{y}{D+y}z; \qquad (2)$$
$$\frac{dz}{d\tau}=B\frac{y}{D+y}z-z.$$

Введем обозначение $\varphi=x+y+z$. Тогда в соответствии с уравнениями (2) можно получить $\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{dx}{d\tau}+\frac{dy}{d\tau}+\frac{dz}{d\tau}=1-\varphi$. Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид $\varphi=1-(1-\varphi_0)e^{-\tau}$, где $\varphi_0=x_0+y_0+z_0$ – начальное значение. Следовательно, для любого начального состояния (x_0,y_0,z_0) при $\tau\to\infty$ решение $\varphi(\tau)$ стремится к 1.

Таким образом, все траектории, независимо от начальных условий, будут асимптотически приближаться к поверхности (плоскости) $\psi=\varphi-1=0$, представляющей собой притягивающее многообразие (аттрактор). Это означает, что процесс биологического роста на начальной стадии развивается в сторону асимптотического приближения к многообразию ψ, а на заключительной стадии эволюционирует вдоль многообразия, «застревая» в устойчивой точке либо уходя в бесконечность. Все особые точки принадлежат этому многообразию.

Система уравнений (2) приводится к следующему виду:

$$x=1-y-z;$$
$$\frac{dy}{d\tau}=A\frac{(1-y-z)}{C+1-y-z}y-y-B\frac{y}{D+y}z;$$
$$\frac{dz}{d\tau}=B\frac{y}{D+y}z-z.$$

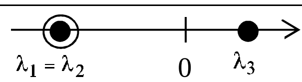
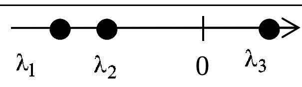
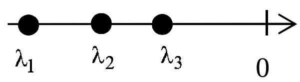
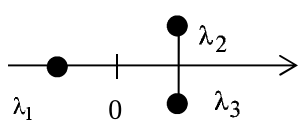
Представленная модель имеет несколько точек равновесия (x_p,y_p,z_p), принадлежащих плоскости ψ, значения координат которых сведены в таблицу. Их анализ показал следующее.

Состояние равновесия № 3 может быть устойчивым, остальные − неустойчивы. Состояние равновесия № 4 физически не осуществимо, поскольку концентрации субстрата и компонентов ила не могут быть отрицательны.

Если скорость роста культуры будет недостаточно высокой и при этом время нахождения культуры в питательной среде – достаточно низким, то необходимая для проведения биохимической реакции концентрация культуры не будет достигнута и произойдет вымывание культуры из реактора. Поэтому на соотношение времени аэрации и максимальных удельных скоростей роста компонентов активного ила налагается ряд условий:

1) $A>1$ для состояния равновесия № 2;
2) $B>1$ для состояния равновесия № 3.

Если входная концентрация субстрата равна начальному значению, то в процессе потребления субстрата бактериями их популяция исчезнет из-за недостатка питания ($x_1<x_{1вх}$). В дополнение к этому очевидному условию количество субстрата на входе биореактора должно удовлетворять неравенству $Ay_p+C\ge 1$ для достижения состояния равновесия № 3.

<table>
<tr><th rowspan="2">Номер точки равновесия</th><th colspan="3">Координаты точки равновесия</th><th rowspan="2">Особенности точки равновесия</th></tr>
<tr><th>x_p</th><th>y_p</th><th>z_p</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{C}{A-1}$</td><td>$1-x_p$</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>$-0{,}5(Ay_p+C-1)+$
$+0{,}5\sqrt{(Ay_p+C-1)^2+4C}$</td><td rowspan="2">$\frac{D}{B-1}$</td><td rowspan="2">$1-x_p-y_p$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$-0{,}5(Ay_p+C-1)-$
$-0{,}5\sqrt{(Ay_p+C-1)^2+4C}$</td><td></td></tr>
</table>

В зависимости от соотношений входной концентрации субстрата и параметров *A*, *B*, *C*, *D* тип особой точки, соответствующей состоянию равновесия № 3, может быть различным.

На тип особой точки влияют знаки дискриминанта характеристического полинома $D_{\text{х.п}}$, определителя $\det \mathbf{J}$ и следа $\operatorname{tr}\mathbf{J}$ соответствующей характеристической матрицы **J**. Это влияние отражено на бифуркационной диаграмме (рис. 1). Область 1 на рис. 1 представляет собой область седел; 2 – область устойчивых узлов; 3 – область вырожденных устойчивых узлов; 4 – область устойчивых фокусов; 5 – область центров; 6 – область неустойчивых фокусов; 7 – область вырожденных неустойчивых узлов; 8 – область неустойчивых узлов. Характеристическая матрица **J** имеет вид

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} s-\left(\dfrac{A(x_{\text{p}}^2+Cx_{\text{p}}-Cy_{\text{p}})}{(C+x_{\text{p}})^2}-1-\dfrac{BDz_{\text{p}}}{(D+y_{\text{p}})^2}\right) & -\dfrac{ACy_{\text{p}}}{(C+x_{\text{p}})^2}-\dfrac{By_{\text{p}}}{D+y_{\text{p}}} \\ \dfrac{BDz_{\text{p}}}{(D+y_{\text{p}})^2} & s-\left(\dfrac{By_{\text{p}}}{D+y_{\text{p}}}-1\right) \end{bmatrix}.$$

Характеристики $D_{\text{х.п}}$, $\det\mathbf{J}$, $\operatorname{tr}\mathbf{J}$ можно выразить с помощью координат точки равновесия № 3. Введем обозначение

$$k=-(AD+C(B-1)-B+1)+$$
$$+\sqrt{\left(AD+C(B-1)-B+1\right)^2+4C\left(B-1\right)^2}.$$

Тогда определитель характеристической матрицы записывается следующим образом:

$$\det\mathbf{J}=\left(\frac{ACD(B-1)}{\left(C(B-1)+0,5k\right)^2}+1\right)\times$$
$$\times\frac{\left(B-1-0,5k-D\right)\left(B-1\right)}{BD}.$$

След характеристической матрицы выражается так:

$$\operatorname{tr}\,\mathbf{J}=\frac{0,25k^2+(0,5Ck-CD)\left(B-1\right)}{\left(C(B-1)+0,5k\right)^2}-$$
$$-1-\frac{\left(B-1-0,5k-D\right)\left(B-1\right)}{BD}.$$

Дискриминант характеристического полинома имеет вид

$$D_{\text{х.п}}=\left(\frac{0,25k^2+(0,5Ck-CD)\left(B-1\right)}{\left(C(B-1)+0,5k\right)^2}-\right.$$
$$\left.-1-\frac{\left(B-1-0,5k-D\right)\left(B-1\right)}{BD}\right)^2-$$
$$-4\left(\frac{ACD(B-1)}{\left(C(B-1)+0,5k\right)^2}+1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\left(B-1-0,5k-D\right)\left(B-1\right)}{BD}\right).$$

Определитель характеристической матрицы будет положительным, т. е. особая точка не является седлом, при одновременном удовлетворении всех следующих условий: $A>1$, $B>1$, $C<C_{\text{det}}$, $D<D_{\text{det}}$, где $C_{\text{det}}=\dfrac{AB-AD-A-B+1}{B-1}$, $D_{\text{det}}=\dfrac{AB-A-B+1}{A}$.

Для того чтобы след $\operatorname{tr}\mathbf{J}=0$, должны одновременно выполняться следующие условия: $A>2$, $B=B_{\text{tr}}$, $C<C_{\text{tr}}$, $D{=}D_{\text{tr}}$, где $B_{\text{tr}}=A-1$, $C_{\text{tr}}=A-1$, $\mathrm{D}_{\text{tr}}=\dfrac{A^2-AC-3A+2C+2}{A(A-1)}$.

Проанализируем поведение модели на примере пищевой цепочки «азот – бактерии-нитрификаторы – хищники», имеющей следующие характеристики: $\mu_m=0,69$ сут$^{-1}$; $f_m=2,0$ сут$^{-1}$; $x_{1\text{вх}}=20$ мг/л; $T=10$ сут; $k_1=9,7$ мг/л; $Y=27,17$ мг/г; $g=1,3$ мг/г [4]. В результате преобразований коэффициентов получим: $A=6,9$, $B=20$, $C=0,485$, $D=0,276$, $\det\mathbf{J}=3,46$, $\operatorname{tr}\mathbf{J}=0,18$, $D_{\text{х.п}}=-13,82$.

Состояние равновесия в этом случае находится в области 6 – неустойчивых фокусов (рис. 1). При этом наблюдаются периодические незатухающие колебания (рис. 2). Такой характер процессов не желателен, поскольку субстрат практически не удаляется. Точка равновесия имеет координаты (0,93; 0,01; 0,05), фазовые траектории образуют предельный цикл (рис. 3).

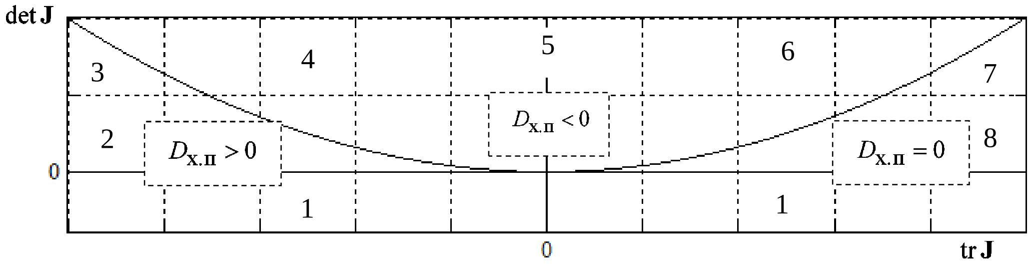


Рис. 1

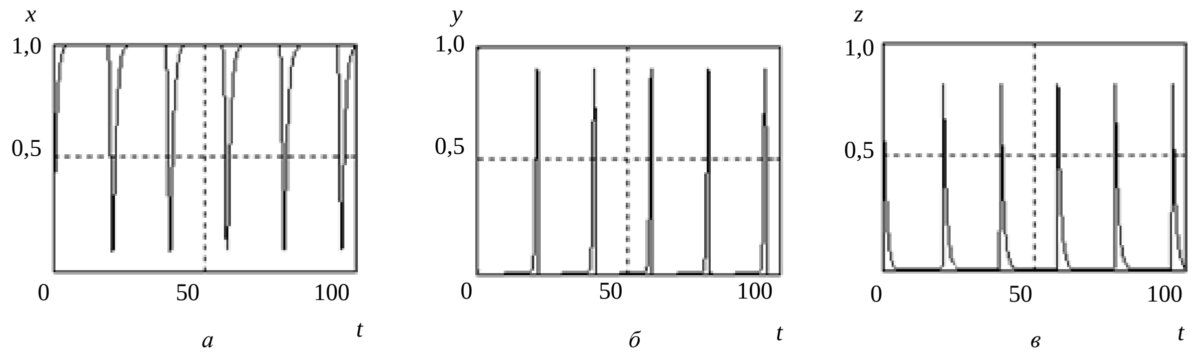


Рис. 2

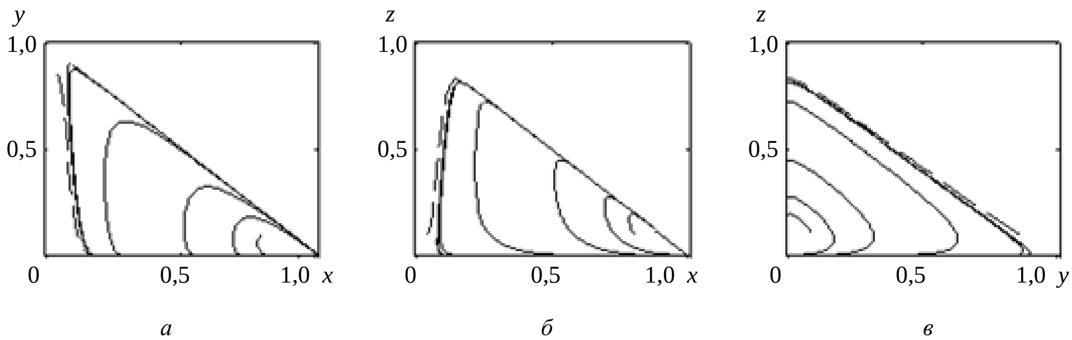
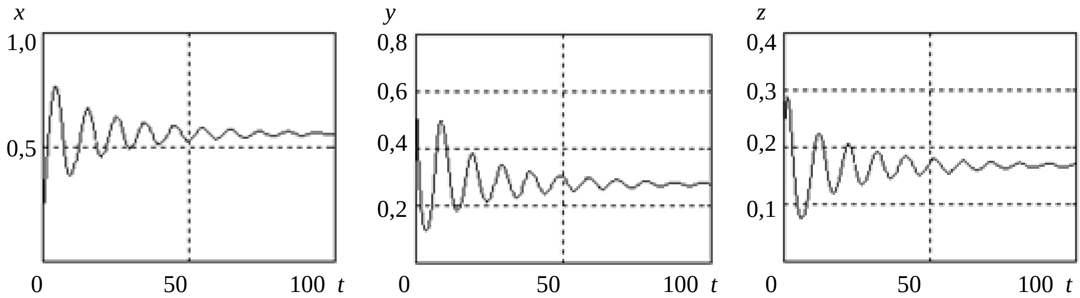


Рис. 3

Поскольку соотношения параметров модели могут быть различными, допустим, что максимальная удельная скорость роста организмов уменьшилась, например из-за снижения температуры, тогда $A = 3, B = 2$. Состояние равновесия в этом случае находится в области 4 – устойчивых фокусов. Точка равновесия имеет координаты (0,55; 0,27; 0,16). Соответствующее поведение системы представлено графиками переходных процессов (рис. 4) и фазовыми траекториями, стремящимися к аттрактивной плоскости ψ и образующими на ней предельный цикл и устойчивый фокус (рис. 5). Характер переходных процессов становится колебательным затухающим, очистка – более эффективной, поскольку в данном случае популяция хищников позволяет вырасти популяции бактерий, необходимой для поглощения субстрата.

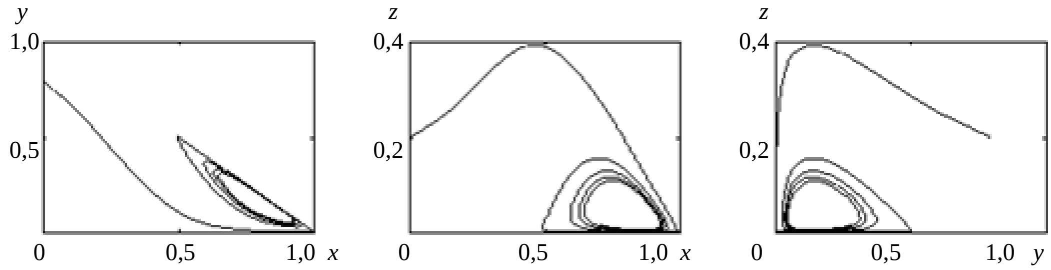
Рассмотрим случай, когда $A = 6{,}9$, $B = 1{,}6$, например в результате влияния ингибиторов на хищников. Состояние равновесия в этом случае попадает в область 2 – устойчивых узлов. Координаты точки равновесия (0,17; 0,46; 0,37). Характер переходных процессов становится апериодическим затухающим (рис. 6), на фазовой плоскости траектории сходятся к состоянию равновесия (рис. 7). При данных параметрах системы концентрация бактерий и простейших выше, чем в двух предыдущих случаях, следствием чего является снижение загрязнений.

Проанализируем характер поведения системы в зависимости от влияния входной концентрации субстрата $x_{1\,\text{вх}}$. Увеличение субстрата на входе приводит к тому, что период колебаний растет и превалирующим состоянием системы во времени становится то, при котором субстрат практически равен входному, а концентрация бактерий и простейших близка к нулю. Данный режим свидетельствует о том, что система очистки не справляется с загрязнениями на входе. При снижении субстрата на входе состояние равновесия смещается из области 6 в область 4, характер процессов



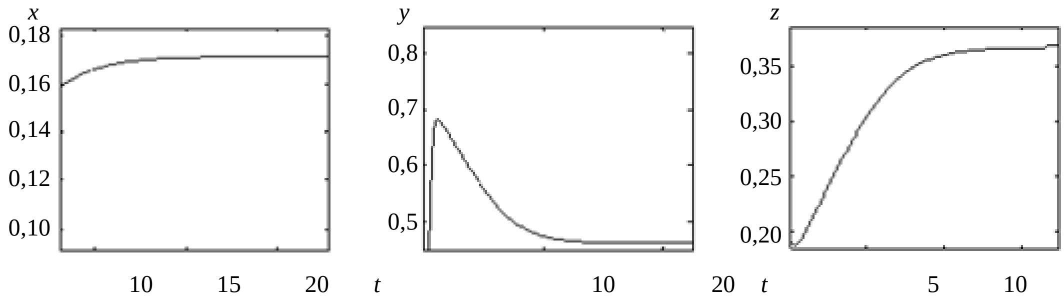
а *б* *в*

Рис. 4



а *б* *в*

Рис. 5



а *б* *в*

Рис. 6

становится аналогичным изображенным на рис. 2. Точка равновесия смещается в область устойчивых фокусов, а характер переходных процессов становится колебательным затухающим.

Дальнейшее снижение субстрата на входе приводит к тому, что состояние равновесия переходит в область 2, характер процессов аналогичен графикам, представленным на рис. 4. Состояние равновесия переходит в область устойчивых узлов, наблюдаются апериодические затухающие процессы. Различие состоит в том, что в данном случае количество субстрата на входе не позволяет вырасти популяции бактерий, поэтому очистка происходит неэффективно. Отметим, что концентрация простейших уменьшается вплоть до устойчивого равновесного состояния в силу недостаточной поступающей входной концентрации субстрата, которая не может обеспечить увеличение популяции бактерий до числа, необходимого для роста популяции простейших.

В частном случае, когда в системе отсутствуют бактерии или простейшие, получаются состояния равновесия № 1 и 2. На рис. 8, *а* и *б* изображены фазовые траектории в окрестностях неустойчивых состояний равновесия № 1 и 2 соответственно. В пределах плоскости, в которой лежат траектории, состояния равновесия являются устойчивыми узлами.

Если начальная концентрация бактерий или простейших будет отлична от нуля, траектории попадают в состояние равновесия № 3.

Сравнивая поведение модели Моно [5] с поведением модели Кенейла, можно заметить, что последняя является более совершенной, поскольку учитывает состав активного ила, включающий бактерии и простейших, и может использоваться при моделировании более сложных пищевых цепей. Как и модель Моно, модель Кенейла имеет одно устойчивое состояние равновесия, а также

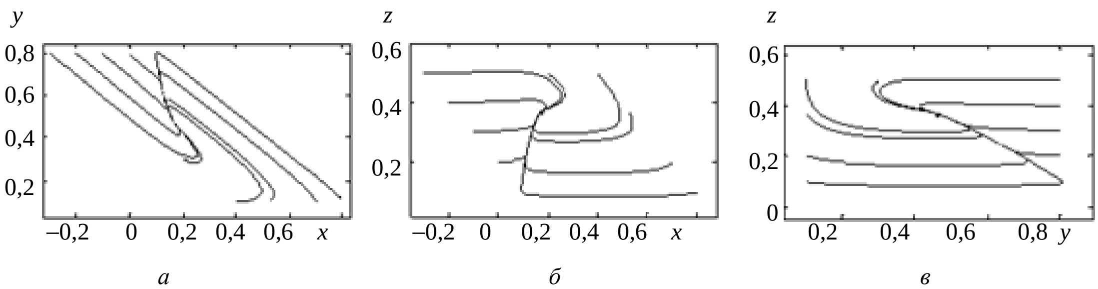


Рис. 7

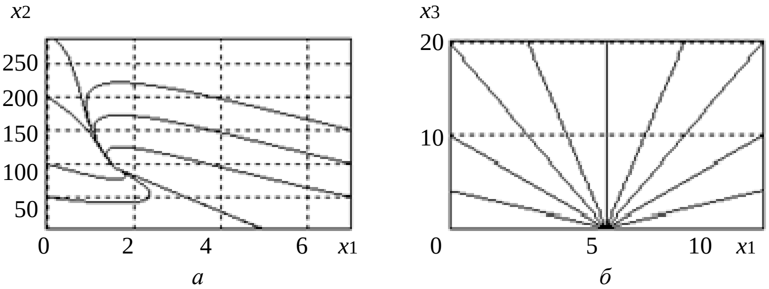


Рис. 8

требует обеспечения условия необходимого времени контакта составляющих пищевой цепи с субстратом. Кроме того, в отсутствие простейших модель Кенейла преобразуется к модели Моно. Наилучшая очистка происходит в том случае, если состояние равновесия принадлежит области устойчивых узлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Canale R. P. Predator-pray relationships in a model for activated process // Biotech. Bioeng. 1969. Vol. 11, № 5. P. 887–907.

2. Кафаров В. В., Седых Л. Г., Гарнаев А. Ю. Синтез оптимального управления очисткой сточных вод активным илом // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 4. С. 920–924.

3. Вавилин В. А., Васильев В. Б. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод активным илом. М.: Наука, 1979.

4. Хенце М., Армоэс П. Очистка сточных вод. Биологические и химические процессы. М: Мир, 2009.

5. Грудяева Е. К., Душин С. Е., Шолмова Н. Е. Анализ технологического процесса очистки сточных вод с мембранным биореактором // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2013. № 5. С. 48–56.

E. K. Grudyaeva, S. E. Dushin
Saint-Petersburg State Electrotechnical University «LETI»

RESEARCH OF CANALE'S MATHEMATICAL MODEL AT TECHNOLOGICAL PROCESS OF WASTEWATER TREATMENT

This article presents the results of the researches on the biochemical processes in a bioreactor using the Canale's mathematical model. Dynamic mathematical models of heat and mass exchange are presented. The results are received by computer simulation in a software tool Matlab/Simulink.

Mathematical model, activated sludge, Canale's model, concentration, food chain