УДК 621.753

Е. С. Сулоева, Э. И. Цветков
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Установление правила принятия решения по результатам бинарного сличения эталонов, воспроизводящих требуемое значение величины

Рассматривается проблема формирования правила принятия решения по результатам бинарного сличения в отсутствии априорных знаний о систематической погрешности, но известных свойствах дополнительных погрешностей. В основу правила принятия решения положено апостериорное распределение плотности вероятности разности систематических погрешностей сличаемых эталонов. Результаты теоретических расчетов сопоставляются с результатами машинного эксперимента.

Сличение, априорные знания, эталоны, метрологический анализ, неисключенная систематическая погрешность

Результат сличения двух эталонов (бинарное сличение) в [1], [2] и др. представлен в виде суммы двух компонентов, первый из которых равен разности неисключенных систематических погрешностей ($\Delta_{сст}\lambda_{12}$), а второй – так называемой дополнительной погрешности ($\Delta_{доп}\lambda_{12}$), включающей в себя разность случайных погрешностей сличаемых эталонов ($\delta_{сл}\lambda_{12}$), а также погрешности вспомогательных средств, используемых при сличении (компараторов и транспортируемых эталонов).

Таким образом, результат бинарного сличения, по которому принимается решение о соответствии требованиям сличаемых эталонов, представляется следующим образом:

$$\delta\lambda_{12} = \Delta_{сст}\lambda_{12} + \Delta_{доп}\lambda_{12},$$

где $\Delta_{сст}\lambda_{12} = \Delta_{сст}\lambda_1 - \Delta_{сст}\lambda_2$ и $\Delta_{доп}\lambda_{12} = = \Delta_{сл}\lambda_1 - \Delta_{сл}\lambda_2 + \Delta_{кмп}\lambda_{12} + \Delta_{трн}\lambda_{12}$.

Свойства $\Delta_{доп}\lambda_{12}$ полагаются известными.

В [1] предложена процедура принятия решения о соответствии сличаемых эталонов требованиям на основе условного распределения вероятности результата сличения $\delta\lambda_{12}$, соответствующего значению разности систематических погрешностей $\Delta_{сст}\lambda_{12} - w(\delta\lambda_{12}/\Delta_{сст}\lambda_{12})$.

Именно полагая $\Delta_{кмп}\lambda_{12}$ и $\Delta_{трн}\lambda_{12}$ пренебрежимо малыми, получаем:

$$w(\delta\lambda_{12}/\Delta_{сст}\lambda_{12}) = w(\Delta_{сл}\lambda_1 - \Delta_{сл}\lambda_2 - \Delta_{сст}\lambda_{12}),$$

Обратившись к распределению, соответствующему допустимому пределу $\Delta_{сст}\lambda_{12} - \Delta_{max}\lambda_{12}$, можно оценить вероятностные характеристики $\delta\lambda_{12}/\Delta_{max}\lambda_{12}$ (в частности, вероятности ошибок первого и второго рода).

Недостатком такого подхода следует признать именно привязку используемой вероятностной характеристики к конкретному значению $\Delta_{max}\lambda_{12}$. Это не позволяет в полной мере использовать конкретные результаты сличения (значение $\delta\lambda_{12}$) и снижает степень адекватности принимаемых решений.

Далее предлагается и анализируется альтернативный подход, опирающийся на использование апостериорной вероятности непосредственного объекта оценивания $\Delta_{сст}\lambda_{12}$.

Условное распределение плотности вероятности w разности систематических погрешностей $\Delta_{сст}\lambda_{12}$ при имеющейся информации о дополнительной погрешности $w(\Delta_{доп}\lambda_{12})$ и фиксированном результате сличения $\delta\lambda_{12}$ определяется выражением

$$w\left(\Delta_{сст}\lambda_{12}/\delta\lambda_{12}\right)=w\left(\delta\lambda_{12}-\Delta_{доп}\lambda_{12}\right).$$

Тогда вероятность попадания P разности систематических погрешностей в установленный интервал $[-c,\ c]$ при фиксированном значении результата сличения равна:

$$P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right]=$$
$$=\int_{-c}^{c} w\left(\Delta_{сст}\lambda_{12}/\delta\lambda_{12}\right)d\left(\Delta_{сст}\lambda_{12}\right).$$

Если значения $-c$ и c характеризуют предъявляемые к сличаемым эталонам требования, то $P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right]$ характеризует вероятность их соответствия этим требованиям. Соответственно $1-P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right]$ – вероятность несоответствия эталонов предъявляемым требованиям.

Из изложенного следует, что $P[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}]$ – функция от $\delta\lambda_{12}$. Это позволяет представить процедуру принятия решения о соответствии (несоответствии) сличаемых эталонов требованиям следующими отображениями:

$\delta\lambda_{12}\le\delta_{п}\to$ соответствие $\vee\delta\lambda_{12}>\delta_{п}\to$ несоответствие.

Здесь пороговое значение $\delta_{п}$ – решение уравнения

$$\delta_{п}=\mathrm{rad}\left(P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right]=P_{тр}\right),$$

где $P_{тр}$ – требуемое значение вероятности соответствия сличаемых эталонов требованиям.

Заметим, что при $\delta\lambda_{12}\le\delta_{п}$, когда принимается решение о соответствии эталонов требованиям ($\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]$), возможна ошибка, если $\Delta_{сст}\lambda_{12}\notin[-c,c]$. Вероятность такой ошибки (первого рода)

$$P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\notin[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right]=$$
$$=1-P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right].$$

Вероятность ошибки второго рода при $\delta\lambda_{12}>\delta_{п}$, соответствующая $\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]$, равна $P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}\right]$.

Вероятности ошибок первого и второго рода также зависят от $\delta\lambda_{12}$, что позволяет устанавливать $\delta_{п}$ не только на основе $P_{тр}$, но и на основе допустимого уровня вероятности ошибки второго рода $P_{доп}$.

Пример. Пусть $w(\Delta_{доп}\lambda_{12})$ – нормальное распределение с дисперсией D = 2. О значении неисключенных систематических погрешностей нет никакой информации.

В этом случае вероятность попадания в интервал будет рассчитываться по формуле

$$P\left[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,\ c]/\delta\lambda_{12}\right]=$$
$$=\int_{-c}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{сл}}\exp\left(-\frac{(\Delta_{сст}\lambda_{12}-\delta\lambda_{12})^2}{2\sigma_{сл}^2}\right)d\Delta_{сст}\lambda_{12},$$

при $\delta\lambda_{12}\le c$ $P[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}]=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\delta\lambda_{12}+\right.\right.$ $\left.\left.+c/\sigma_{сл}\right)+\Phi\left(c-\delta\lambda_{12}/\sigma_{сл}\right)\right)$; при $\delta\lambda_{12}>c$ $P[\Delta_{сст}\lambda_{12}\in$ $\in[-c,c]/\delta\lambda_{12}]=\frac{1}{2}(\Phi(\delta\lambda_{12}+c/\sigma_{сл})+\Phi(\delta\lambda_{12}-c/\sigma_{сл}))$,

где $\sigma_{сл}$ – СКО для разности случайных погрешностей; $\Phi(\cdot)$ – функция Крампа.

Соответственно пороговое значение $\delta\lambda_{12}$ на основе $P_{тр}$ при $\delta\lambda_{12}\le c$ – решение уравнения

$$\delta_{п}=\mathrm{rad}\left(\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\delta\lambda_{12}+c/\sigma_{сл}\right)+\Phi\left(c-\delta\lambda_{12}/\sigma_{сл}\right)\right)=P_{тр}\right),$$

а при $\delta\lambda_{12}>c$ – решение уравнения $\delta_{п}=$

$$=\mathrm{rad}\left(\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\delta\lambda_{12}+c/\sigma_{сл}\right)+\Phi\left(\delta\lambda_{12}-c/\sigma_{сл}\right)\right)=P_{тр}\right).$$

Для подтверждения достоверности получаемых с помощью вышеприведенных соотношений результатов целесообразно сопоставить соответствующие расчетные результаты с результатами, полученными с использованием машинного эксперимента.

Алгоритм имитационного моделирования (машинный эксперимент [3], [4]) представляется следующей последовательностью отображений, основанных на априорных знаниях (АЗ):

$$\text{АЗ}=(\delta\lambda_{12}=\Delta_{сст}\lambda_{12}+\Delta_{сл}\lambda_{12},\Delta_{сл}\lambda_{12}=$$
$$=\Delta_{сл}\lambda_1+\Delta_{сл}\lambda_2,\omega(\Delta_{сл}\lambda_1),\omega(\Delta_{сл}\lambda_2),$$
$$\left|P[\Delta_{сст}\lambda_{12}\right|\le c/\delta\lambda_{12}])\to$$
$$\to\left\{\Delta_{сл}\lambda_1,\Delta_{сл}\lambda_2/\delta\lambda_{12}\right\}_{s=1}^{N}\to$$
$$\to\{\Delta_{сст}\lambda_{12}=\delta\lambda_i-\Delta_{сл}\lambda_{12}\}_{N_1}\to$$
$$\to\left\{\Delta_{сст}\lambda_{12}<c/\delta\lambda_{12}=\Delta_{сст}\lambda_{12}+\Delta_{сл}\lambda_{12}\right\}_{N_2}\to$$
$$\to\left|P[\Delta_{сст}\lambda_{12}\right|\le c/\delta\lambda_{12}]=N_2/N_1.$$

Для одинаковых распределений случайной погрешности (Гаусс (1, 0)) из всей совокупности N случаев выбирается необходимая часть N_1 (для примера $N_1 = 1000$), и уже среди этих N_1 выбираются те, которые соответствуют поставленным ограничениям по результирующему значению и пороговому уровню; таких значений оказывается N_2. Результатом имитационного моделирования являются гистограммы распределений полученных вероятностных характеристик $P[\Delta_{\text{сст}}\lambda_{12} \in [-c, c]/\delta\lambda_{12}]$ с шагом в одну единицу.

Значение вероятности непревышения разностью систематических погрешностей некоторого порогового уровня показаны для трех различных максимальных значений $c = 1, 2, 3$, изображенных на рис. 1, *а*, *б*, *в* соответственно. На графиках по оси абсцисс откладываются значения результата измерения $\delta\lambda_{12}$, а по оси ординат в соответствии – вероятность непревышения $P\left[\Delta_{\text{сст}}\lambda_{12} \in [-c, c]/\delta\lambda_{12}\right]$. Под аббревиатурой «ИМ» (рис. 1) подразумеваются столбцы гистограммы значений, полученные в результате имитационного моделирования. Сплошная линия отражает вероятность непревышения, полученную с помощью предложенного аналитического метода («аналитика»).

Данные, полученные в результате аналитического расчета, совпадают с данными имитационного моделирования, что говорит об их достоверности и адекватности выбранной модели. Также видно, что при одинаковых АЗ результирующие вероятностные характеристики контролируются выставленным пороговым уровнем, требования к которому продиктованы уровнем эталонного средства. Незначительное увеличение этого значения может отразиться на результате сличения, пропуская отклонившиеся на минимальную величину отбракованные объекты. Корректность этих значений необходимо проверить серией экспериментов, которые покажут вероятности ошибок первого и второго рода в зависимости от выбора вероятностной характеристики $P[\Delta_{\text{сст}}\lambda_{12} \in [-c, c]/\delta\lambda_{12}]$ или $P[\Delta_{\text{сст}}\lambda_{12} \notin [-c, c]/\delta\lambda_{12}]$.

В качестве примера берется минимальный пороговый уровень $c = 1$, где вероятность ошибки первого рода будет максимальна относительно других, более широких интервалов предельно допустимых значений систематической погрешности.

На рис. 2 штриховой линией изображена ситуация $\Delta_{\text{сст}}\lambda_{12} \notin [-c, c]$ при $\delta\lambda_{12} \le \delta_{\text{п}}$, когда при-

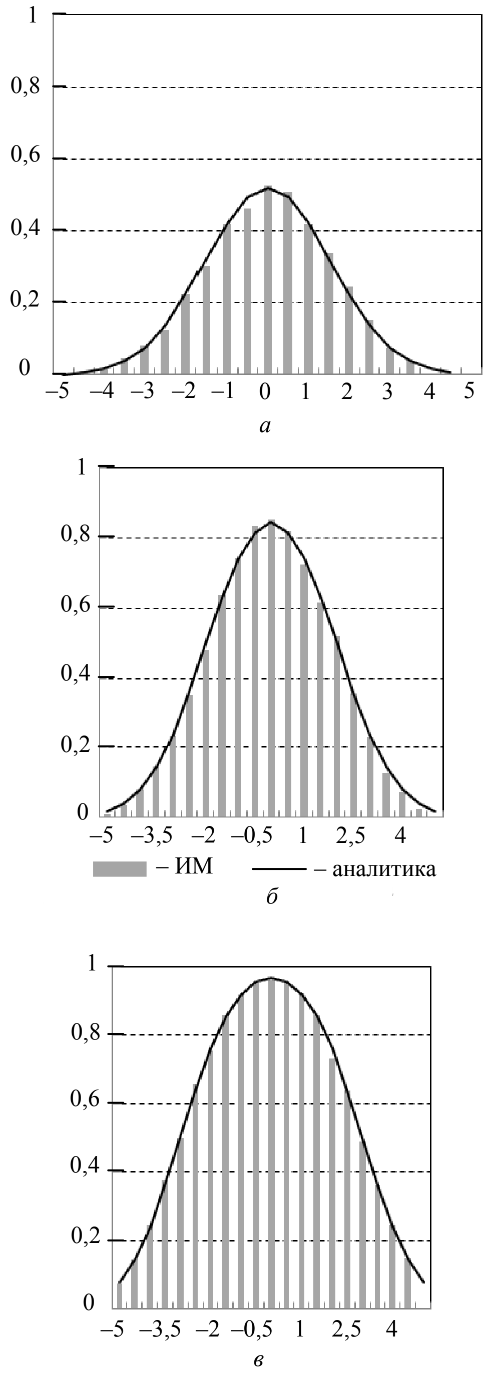

Рис.1

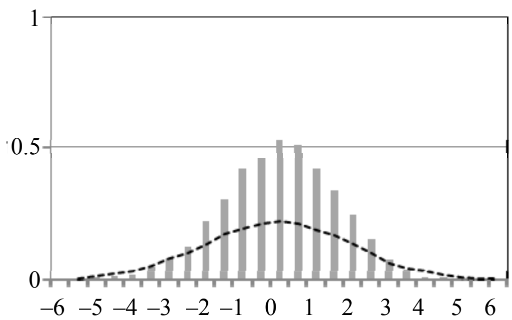

Рис. 2

нимается решение о соответствии эталонов требованиям, но в действительности решение принято неверно из-за несоответствия разности систематических погрешностей предельно возможному значению. Аналогичным образом возможно проиллюстрировать вероятность ошибки второго рода, суть которой была описана.

Из представленных иллюстраций видно, что при отсутствии знаний о систематической погрешности есть возможность принимать решение о соответствии сличаемых эталонов требованиям, не разделяя результат для каждого из объектов. Такой подход основан на выработке аналитического выражения, посредством которого рассчитываются вероятностные характеристики, необходимые для принятия решения. Данные, полученные с помощью этого алгоритма действий, подтверждены машинным экспериментом для различных входных данных. Следовательно, при помощи предложенного алгоритма можно обрабатывать результаты сличения в случае, когда в качестве сличаемых объектов выступает пара эталонов. Также можно дать рекомендации по установлению порогового уровня, выбор которого решает вопрос о соответствии требованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tsvetkov E. I. Analysis of the results of a comparison of two standards // Measurement Techniques. 2013. Vol. 56, № 4. P. 368–371.

2. Чуновкина А. Г. Оценивание данных ключевых сличений национальных эталонов. СПб.: Профессионал, 2009.

3. Сулоева Е. С. Возможности бинарного сличения при наличии сведений о систематических погрешностях // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2015 . № 2. С. 51–54.

4. Сулоева Е. С., Цветков Э. И., Ломаченко М. А. Принятие решения по результатам бинарного сличения при различных априорных знаниях // XVIII Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям: сб. докл. СПб., 19–21 мая 2015 г. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. С. 87–90.

E. S. Suloeva, E. I. Tsvetkov

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

DETERMINATION DECISION-MAKING RULES BASED ON THE RESULTS OF BINARY COMPARISONS OF STANDARDS WHICH REPRODUCE THE DESIRED SETTING VALUE

The problem of decision rules formation based on the results of binary comparisons in the absence of a priori knowledge of the systematic error, but the known properties of additional errors is considered. The basis of decision-making rules laid a posteriori probability density difference between the systematic errors compared the standards .The results of theoretical calculations with the results of computer simulation are compared.

Comparison, a priori knowledge, standards of measurement, not excluded systematic error, metrological analysis