СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wit C. T. Photosynthesis of leaf canopies. Wageningen, Netherlands: Centre for Agricultural Publications and Documentation, 1965. 57 p.

2. Sinclair T. R., Seligman N. G. Crop modeling: from infancy to maturity // Agronomy J. 1996. № 88(5). P. 698–704.

3. Lemmon H., Chuk И. Object-oriented design of a cotton crop model // Ecological Modelling. 1997. № 94(1). P. 45–51.

4. Вэньлун И. Проведение научных исследований по проекту «Разработка веб-ориентированной экспертной системы по выращиванию гибридного риса // 68-я Науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава СПбГЭТУ «ЛЭТИ»: сб. докл. студентов, аспирантов и молодых ученых. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. С. 122–125.

5. Vapnik V. N. Statistical Learning Theory. Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control. New York, USA: Wiley, 1998. 768 p.

6. Vapnik V. N. The Nature of Statistical Learning Theory. Statistics for Engineering and Information Science. 2nd edition. New York, USA: Springer, 2000. 314 p.

7. Scholkopf B., Smola A. J. Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond. Cambridge, Massachusetts, USA: The MIT Press, 2001. 626 p.

8. Chang C. C., Lin C. J. LIBSVM: A Library for Support Vector Machines // ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology. 2011. Vol. 2, iss. 3. 27 p. URL: http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/papers/libsvm.pdf.

Yi Wenlong, I. V. Gerasimov, S. A. Kuzmin
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»
He Huojiao, Yang Hongyun
Jiangxi Agricultural University (Nanchang, China)

APPLICATION OF SUPPORT VECTOR REGRESSION IN MODELING AND DATA PROCESSING OF RICE LEAVES

By applying support vector regression, the modeling data of rice leaves collected in our study were grouped into sample training set and test set, and three machine learning prediction models on rice growing environment against leaf blade length, width and SPAD value were constructed.

Rice leaf, physiological ecology, machine learning, support vector machine

УДК 519.7

Н. А. Перязев,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Ю. В. Перязева,
Гимназия № 24 (Санкт-Петербург)

И. К. Шаранхаев
Бурятский государственный университет

Минимальные алгебры унарных мультиопераций

Получено матричное представление алгебр унарных мультиопераций конечного ранга и список тождеств, выполняемых в таких алгебрах. Эти результаты используются для доказательства основного результата: описания минимальных алгебр унарных мультиопераций конечного ранга. Как следствие этой теоремы получен список всех таких минимальных алгебр для небольших рангов.

Мультиоперация, алгебра, минимальная алгебра, матрица, операция, подстановка

Рассматриваемые в статье алгебры унарных мультиопераций являются конечными алгебрами. Для изучения их строения большое значение имеет описание минимальных алгебр [1]. В работе [2] получено описание всех алгебр унарных мультиопераций ранга 3. Основной результат данной работы анонсирован в [3]. Отметим, что алгебры унарных мультиопераций находят применение при изучении суперклонов, а значит, и клонов [4].

Пусть $B(A)$ – множество всех подмножеств множества A. Отображение из A в $B(A)$ называется унарной мультиоперацией на A. Используем обозначение M_A^1 для множества всех унарных мультиопераций на A.

Мультиоперации $f \in M_A^1$ на конечном множестве $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения

$$f : \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\} \to \{0, 1, ..., 2^k - 1\},$$

получаемые из f при кодировании $a_i \to 2^i$; $\varnothing \to 0$; $\{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}$.

При этом унарную мультиоперацию f задаем векторной формой $(\alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$, где $f(a_i) = \alpha_i$, используя вышеопределенную кодировку.

Пусть $S \subseteq M_A^1$. Алгебра $\mathfrak{F} =< S; *, \cap, \mu, \varepsilon, \theta, \pi >$ с нижеопределенными операциями подстановки $(f * g)$, пересечения $(f \cap g)$, обратимости (μf) и нуль-местными операциями ε, θ, π называется *алгеброй унарных мультиопераций* над A:

$(f * g)(a) = \{b \mid$ существует $c \in g(a)$,
такой, что $b \in f(c)\}$;

$(f \cap g)(a) = f(a) \cap g(a)$;

$(\mu f)(a) = \{b \mid a \in f(b)\}$;

$\varepsilon(a) = \{a\}$;

$\theta(a) = \varnothing$;

$\pi(a) = A.$

Мощность множества A называется рангом алгебры. В дальнейшем считаем ранг конечным и равным $k \ge 2$.

Отметим некоторые свойства операций алгебры унарных мультиопераций:

$$f * (g * h) = (f * g) * h,\ f \cap (g \cap h) = (f \cap g) \cap h,$$
$$f \cap g = g \cap f,\ \mu(\mu(f)) = f,\ \mu(f \cap g) = \mu f \cap \mu g,$$
$$\mu(f * g) = \mu g * \mu f,$$
$$f * \varepsilon = \varepsilon * f = f, \theta * f = f * \theta = \theta,$$
$$f \cap \pi = f, f \cap \theta = \theta,\ \mu\varepsilon = \varepsilon, \mu\theta = \theta, \mu\pi = \pi.$$

Существует следующее матричное представление алгебр унарных мультиопераций.

Пусть $B =< \{0,1\}; *, + >$ – двухэлементная булева алгебра. Булевы матрицы – это двоичные матрицы, на элементах которых определены булевы операции.

Для унарной мультиоперации f на A определим булеву квадратную матрицу $M_f = (\alpha_{ij})$ размера $k \times k$ следующим образом: $\alpha_{ij} = 1$, если $a_i \in f(a_j)$, иначе $\alpha_{ij} = 0$.

Операции алгебры унарных мультиопераций представляются матричными операциями так:

$M_{f*g} = M_f * M_g$ – матричное умножение;

$M_{f \cap g} = M_f \circ M_g$ – поэлементное умножение матриц;

$M_{\mu f} = M_f^T$ – транспонирование матрицы;

$M_\varepsilon = E$ – диагональная матрица;

$M_\theta = O$ – нулевая матрица;

$M_\pi = P$ – единичная матрица.

Например, унарная мультиоперация в векторной форме $f = (3, 7, 1)$ представляется матрицей

$$M_f = \begin{pmatrix} 111 \\ 110 \\ 010 \end{pmatrix}.$$

Минимальной алгеброй унарных мультиопераций называется наименьшая алгебра, отличная от тривиальной алгебры, состоящей только из мультиопераций π, θ, ε. Достаточно очевидно, что для минимальности алгебры унарных мультиопераций необходимым и достаточным условием является порождение ее любой своей мультиоперацией, отличной от π, θ, ε. Следующая теорема дает описание мультиопераций, порождающих минимальные алгебры унарных мультиопераций.

Теорема. Мультиоперация f на A, отличная от π, θ, ε, порождает минимальную алгебру унарных мультиопераций ранга k тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $f \cap \varepsilon = \varepsilon, \mu f = f, f^2 = f$;

2) $f \cap \varepsilon = \varepsilon, \mu f = f, f^2 = \pi$;

3) $f \cap \varepsilon = \mu f \cap f = \varepsilon, f * \mu f = \mu f * f = \pi, f^2 = f$;

4) $f \cap \varepsilon = \mu f \cap f = \varepsilon, f * \mu f = \mu f * f = \pi, f^2 = \pi$;

5) $f \cap \varepsilon = \theta, \mu f = f, f^2 = \pi$;

6) $f \cap \varepsilon = \theta, \mu f = f^{p-1}, f^p = \varepsilon$, где p – простой делитель k;

7) существует непустое множество $B \subset A$, такое, что

$f(a) = B$ для всех $a \in A$ или

$f(b) = \{b\}$ для всех $b \in B$ и $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in A \setminus B$ или

$f(b) = A$ для всех $b \in B$ и $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in A \setminus B$ или

$f(b) = B$ для всех $b \in B$ и $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in A \setminus B$.

Доказательство. То, что алгебры, порождаемые мультиоперациями f с указанными свойствами, будут минимальными, следует из того, что при выполнении условий 1, 2, 5 алгебры состоят из четырех элементов $\pi, \theta, \varepsilon, f$; при выполнении условий 3, 4 – из пяти элементов $\pi, \theta, \varepsilon, f, \mu f$; при выполнении условия 6 – из $p+2$ элементов $\pi, \theta, \varepsilon, f, f^2, ..., f^{p-1}$; при выполнении условия 7 в случае одноэлементного множества A – из шести элементов π, θ, ε, $\left(0,...,\underset{i}{2^i},...,0\right)$, $\left(0,...,\underset{i}{2^{k-1}},...,0\right)$, $\left(2^i,...,2^i\right)$, иначе – из семи элементов π, θ, ε, $\left(2^{i_1}+...+2^{i_s},...,2^{i_1}+...+2^{i_s}\right)$, $\left(0,...,\underset{i_1}{2^{i_1}},...,\underset{i_s}{2^{i_s}},...,0\right)$, $\left(0,...,\underset{i_1}{2^{k-1}},...,\underset{i_s}{2^{k-1}},...,0\right)$, $\left(0,...,\underset{i_1}{2^{i_1}+...+2^{i_s}},...,\underset{i_s}{2^{i_1}+...+2^{i_s}},...,0\right)$. При этом каждая мультиоперация, отличная от π, θ, ε, порождает всю алгебру, которой принадлежит.

Теперь покажем, что любая f, порождающая минимальную алгебру унарных мультиопераций, будет удовлетворять одному из семи условий теоремы.

Рассмотрим возможные варианты:

1. $f \cap \varepsilon = \varepsilon$. Понятно, что $\left\langle f^2 \right\rangle \subseteq \langle f \rangle$, а так как f порождает минимальную алгебру, то выполняется либо $\left\langle f^2 \right\rangle = \langle f \rangle$, либо $\left\langle f^2 \right\rangle = \{\pi, \theta, \varepsilon\}$. В силу $f \cap \varepsilon = \varepsilon$ единицы в матрице M_f сохранятся и в матрице M_{f^2}. Поэтому в первом случае $f^2 = f$, так как иначе $f \notin \left\langle f^2 \right\rangle$, а во втором, очевидно, $f^2 = \pi$.

1.1. Если $\mu f = f$, то первый случай соответствует в теореме условию 1, а второй – условию 2.

1.2. Пусть $\mu f \neq f$. Мультиоперация $g = f \cap \mu f$ в силу свойств операций алгебры обладает свойствами $g \cap \varepsilon = \varepsilon$, $g = \mu g$. Понятно, что $\langle g \rangle \subseteq \langle f \rangle$, а так как f порождает минимальную алгебру, то выполняется либо $\langle g \rangle = \langle f \rangle$, либо $\langle g \rangle = \{\pi, \theta, \varepsilon\}$. В первом случае, так как $g \cap \varepsilon = \varepsilon$, $g = \mu g$, получаем $\langle g \rangle = \{\varepsilon, \theta. \pi, g\} = \langle f \rangle$, что невозможно в силу $f \neq g$. Из второго случая следует $f \cap \mu f = g = \varepsilon$. Аналогично рассуждая, получим, что мультиоперация $h = f * \mu f$ обладает свойствами $h \cap \varepsilon = \varepsilon, h = \mu h$. Так как $\langle h \rangle \subseteq \langle f \rangle$ и f порождает минимальную алгебру, то выполняется либо $\langle h \rangle = \langle f \rangle$, либо $\langle h \rangle = \{\pi, \theta, \varepsilon\}$. Как и ранее, первый случай невозможен, а из второго случая следует $f * \mu f = h = \pi$. Равенство $\mu f * f = \pi$ получается подобным образом. В случае $f^2 = f$ получаем соответствие условию 3 теоремы, а в случае $f^2 = \pi$ – условию 4.

2. $f \cap \varepsilon = \theta$. Рассмотрение этого случая разобьем на 2 подслучая.

2.1. $\mu f = f$. В этом случае $f^2 \cap \varepsilon = \varepsilon$, так как нулевых строк в матрице M_{f^2} быть не может, иначе алгебра $\langle f \rangle$ содержит подалгебру, удовлетворяющую условию 7 теоремы. Так как $\left\langle f^2 \right\rangle \subseteq \langle f \rangle$ и f порождает минимальную алгебру, то выполняется либо $\left\langle f^2 \right\rangle = \langle f \rangle$, либо $\left\langle f^2 \right\rangle = \{\pi, \theta, \varepsilon\}$. Первый случай невозможен, так как по п. 1 получили бы $\left\langle f^2 \right\rangle = \left\{\varepsilon, \theta, \pi, f^2\right\}$ или $\left\langle f^2 \right\rangle = \left\{\varepsilon, \theta, \pi, f^2, \mu f^2\right\}$, но $f \neq f^2$ и $f \neq \mu f^2$ ввиду $f \cap \varepsilon = \theta$ и $f^2 \cap \varepsilon = \varepsilon$, $\mu f^2 \cap \varepsilon = \varepsilon$. Из второго случая возможны варианты $f^2 = \pi$ или $f^2 = \varepsilon$. Первый случай соответствует в теореме условию 5, а второй – условию 6 при $p = 2$.

2.2. $\mu f \neq f$. Мультиоперация $g = f \cap \mu f$ в силу свойств операций алгебры обладает свойствами $g \cap \varepsilon = \theta, g = \mu g$. Так как $\langle g \rangle \subseteq \langle f \rangle$ и f порождает минимальную алгебру, то выполняется либо $\langle g \rangle = \langle f \rangle$, либо $\langle g \rangle = \{\pi, \theta, \varepsilon\}$. В первом случае, так как $g \cap \varepsilon = \theta$, $g = \mu g$, получаем $\langle g \rangle = \{\varepsilon, \theta. \pi, g\} = \langle f \rangle$, что невозможно в силу $f \neq g$. Во втором случае, так как $g \cap \varepsilon = \theta$, $g = \theta$. Получили $f \cap \mu f = \theta$, поэтому единиц в матрице M_f не более $\frac{k^2 - k}{2}$.

Мультиоперация $h = f * \mu f$ обладает свойствами $h \cap \varepsilon = \varepsilon, h = \mu h$. Так как $\langle h \rangle \subseteq \langle f \rangle$ и f порождает минимальную алгебру, то выполняется либо $\langle h \rangle = \langle f \rangle$, либо $\langle h \rangle = \{\pi, \theta, \varepsilon\}$. Первый случай невозможен, так как $f \neq h$, а из второго случая следует $f * \mu f = h = \pi$ или $f * \mu f = h = \varepsilon$. Но $f * \mu f = h = \pi$ также невозможно, поскольку для этого в силу $f \cap \varepsilon = \theta$ матрица M_f должна содержать единиц более чем $\frac{k^2 - k}{2}$. Получили $f * \mu f = \varepsilon$. Равенство $\mu f * f = \varepsilon$ получается подобным образом. Из этих равенств следует, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы M_f имеется по одной единице, а это значит, что мультиоперация f является перестановкой. Степени этой перестановки $f, ..., f^p$ относительно операций $*, \mu, \varepsilon$ образуют циклическую группу, которая не имеет собственных подгрупп при простом p, являющемся делителем k. При этом выполняется $f^p = \varepsilon$ и $\mu f = f^{p-1}$. Так как рассматриваем случай $\mu f \neq f$, то $p \geq 3$. Этот случай соответствует в теореме условию 6 при $p \geq 3$.

3. $f \cap \varepsilon = \left(0, ..., 0, \underset{i_1}{2^{i_1}}, 0, ..., 0, \underset{i_s}{2^{i_s}}, 0, ..., 0\right)$. Рассмотрим отдельно случаи $s = 1$ и $s \geq 2$.

3.1. $f \cap \varepsilon = \left(0, ..., \underset{i}{2^i}, ..., 0\right)$. В этом случае алгебра содержит минимальную подалгебру, состоящую кроме π, θ, ε еще из трех мультиопераций $\left(0, ..., \underset{i}{2^i}, ..., 0\right), \left(0, ..., \underset{i}{2^{k-1}}, ..., 0\right), \left(2^i, ..., 2^i\right)$, а значит, является минимальной только в случае равенства f одной из этих мультиопераций, что соответствует в теореме условию 7 при одноэлементном множестве $B = \{a_i\}$.

3.2. $f \cap \varepsilon = \left(0, ..., 0, \underset{i_1}{2^{i_1}}, 0, ..., 0, \underset{i_s}{2^{i_s}}, 0, ..., 0\right)$. В этом случае алгебра содержит минимальную подалгебру, состоящую кроме π, θ, ε еще из четырех мультиопераций

$$\left(0, ..., \underset{i_1}{2^{i_1}}, ..., \underset{i_s}{2^{i_s}}, ..., 0\right),$$

$$\left(0, ..., \underset{i_1}{2^{k-1}}, ..., \underset{i_s}{2^{k-1}}, ..., 0\right),$$

$$\left(0, ..., \underset{i_1}{2^{i_1} + ... + 2^{i_s}}, ..., \underset{i_s}{2^{i_1} + ... + 2^{i_s}}, ..., 0\right),$$

$$\left(2^{i_1} + ... + 2^{i_s}, ..., 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}\right),$$

а значит, является минимальной только в случае равенства f одной из этих мультиопераций, что соответствует в теореме условию 7 при множестве $B = \left\{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\right\}$.

Этими рассуждениями заканчивается доказательство теоремы.

Используя данную теорему можно найти все минимальные алгебры для небольших рангов. Сделаем это для рангов $k = 2, 3, 4$. При этом укажем, к какому типу в соответствии с номером свойства в теореме принадлежит мультиоперация, порождающая минимальную алгебру унарных мультиопераций.

Минимальные алгебры унарных мультиопераций ранга 2 (всего 4).

Типа 1: нет.
Типа 2: нет.
Типа 3: (1,3).
Типа 4: нет.
Типа 5: нет.
Типа 6: (2,1).
Типа 7: (1,1), (2,2).

Минимальные алгебры унарных мультиопераций ранга 3 (всего 18).

Типа 1: (1,6,6), (5,2,5), (3,3,4).

Типа 2: (7,3,5), (3,7,6), (5,6,7).

Типа 3: (1,3,7), (7,2,6), (5,7,4).

Типа 4: (3,6,5).

Типа 5: (6,5,3).

Типа 6: (2,4,1).

Типа 7: (1,1,1), (2,2,2), (4,4,4), (3,3,3), (5,5,5), (6,6,6).

Минимальные алгебры унарных мультиопераций ранга 4 (всего 86).

Типа 1: (1,14,14,14), (13,2,13,13), (11,11,4,11), (7,7,7,8), (1,2,12,12), (1,10,4,10), (1,6,6,8), (9,2,4,9), (5,2,5,8), (3,3,4,8), (3,3,12,12), (5,10,5,10), (9,6,6,9).

Типа 2: (11,7,14,13), (13,14,7,11), (7,11,13,14), (15,3,5,9), (15,7,7,9), (15,3,13,13), (15,11,5,11), (3,15,6,10), (3,15,14,14), (11,15,6,11), (7,15,7,10), (5,6,15,12), (5,14,15,14), (6,6,15,13), (7,7,15,12), (9,10,12,15), (9,14,14,15), (13,10,13,15), (11,11,12,15), (15,15,7,11), (15,7,15,13), (15,11,13,15), (7,15,15,14), (11,15,14,15), (13,14,15,15).

Типа 3: (1,3,7,15), (3,2,7,15), (5,7,4,15), (1,7,5,15), (7,2,6,15), (7,6,4,15), (1,3,5,15), (1,7,7,15), (7,2,7,15), (3,2,6,15), (7,7,4,15), (5,6,4,15), (15,2,6,10), (15,2,6,14), (15,2,14,10), (15,2,14,14), (15,6,4,12), (15,6,4,14), (15,14,4,12), (15,14,4,14), (5,15,4,12), (5,15,4,13), (13,15,4,12), (13,15,4,13).

Типа 4: нет.

Типа 5: (11,13,11,7), (6,13,11,6), (10,13,10,7), (12,12,11,7), (14,13,3,3), (14,5,11,5), (14,9,9,7).

Типа 6: (2,1,8,4), (4,8,1,2), (8,4,2,1).

Типа 7: (1,1,1,1), (2,2,2,2), (4,4,4,4), (8,8,8,8), (3,3,3,3), (5,5,5,5), (6,6,6,6), (7,7,7,7), (9,9,9,9), 10,10,10,10), (11,11,11,11), (12,12,12,12), (13,13,13,13), (14,14,14,14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хобби Д., Маккензи Р. Строение конечных алгебр. М.: Мир, 1993. 287 с.
2. Казимиров А. С., Перязев Н. А. Алгебры унарных мультиопераций // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2013. С. 156.
3. Перязев Н. А. Минимальные алгебры унарных мультиопераций // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2015. С. 193.
4. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Теория Галуа для клонов и суперклонов // Дискретная математика. 2015. Т. 27, № 4. С. 79–93.

N. A. Peryazev,
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

Yu. V. Peryazeva,
Gymnasium N 24 Saint Petersburg

I. K. Sharankhaev
Buryat state university

MINIMAL ALGEBRAS OF UNARY MULTIOPERATIONS

Summary. A matrix impression of algebras of unary multioperations of a finite rank and the list of the identities which are carried out in such algebras is gained. These results are used for the proof of the main result: descriptions of the minimal algebras of unary multioperations of a finite rank. As a result of this theorem the list of all such minimal algebras for small ranks is received.

Multioperation, algebra, minimal algebra, matrix, operation, substitution