



УДК 681.5 + 53.08

А. И. Сойко, Р. Н. Каратаев, А. И. Атаева  
ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский  
технический университет им. А. Н. Туполева»

## Динамическая модель гидравлического имитатора давления и частоты сердечных сокращений

*Получена динамическая модель гидравлического имитатора давления и частоты сердечных сокращений, представленная в виде передаточных функций его измерительных модулей, используемых для поверки неинвазивных сфигмоманометров и построенных на основе классических моделей гемодинамики О. Франка. На основании полученных результатов можно оценить качественные характеристики переходных процессов и точность измерения давления в измерительных модулях гидравлического имитатора давления.*

### Динамическая модель, гидравлический имитатор, передаточная функция, характеристики переходных процессов, статистическая погрешность измерения давления

Разработка установок для поверки неинвазивных сфигмоманометров (средств измерений артериального давления (АД) и частоты сердечных сокращений (ЧСС)) является важной научно-практической задачей. Особую значимость она приобретает с учетом комплексного подхода к оценке точности медицинских приборов, одновременно и взаимосвязано воспроизводя единицы АД и ЧСС, что существенно выделяет ее среди остальных аналогов в данной области измерений [1], [2].

Подходы к построению моделей, учитывающих такую особенность, должны базироваться на взаимосвязанных оценках параметров АД и ЧСС, в связи с чем приобретают особое значение исследования динамических характеристик гидравлического имитатора давления, входящего в состав поверочных установок и используемого для передачи размера единиц давления и частоты поверяемым средствам измерений.

**Объект и цель исследования.** Целью работы служит получение передаточных функций гидравлического имитатора давления при различных режимах работы измерительных модулей, используемых для поверки неинвазивных сфигмоманометров.

Гидравлический имитатор давления и частоты, схема которого представлена на рис. 1, представляет собой последовательное соединение

двух измерительных модулей с эластичными трубками, используемых для поверки неинвазивных сфигмоманометров как с плечевыми, так и с запястными манжетами [3].

Измерительные модули А и Б выполнены в виде эластичных цилиндров 1 и 2, в которых размещены эластичные трубки 3 и 4, имитирующие сосуды верхней конечности и выполненные из силиконовой резины по ТУ 9398-152-00149535-2006. Номинальная длина используемых трубок составляет 100 мм, толщина и средний наружный диаметры эластичных трубок измерительного модуля А – 2 и 15.2 мм, измерительного модуля Б – 1.5 и 8.6 мм соответственно. Измерительный модуль А используется для поверки неинвазивных сфигмоманометров с плечевыми манжетами, модуль Б – для поверки неинвазивных сфигмоманометров с запястными манжетами.

Регулирование расхода рабочей жидкости в трубке 4 осуществляется регулятором давления 7, регулирование расхода рабочей жидкости в трубке 3 осуществляется регулятором давления 5. Цилиндры 1 и 2 разделены перегородкой 11, в которой установлен соединительный регулятор 12, который выполняет функцию гидравлического объединения цилиндров 1 и 2, выравнивая в них давления для более точной передачи пульсаций

рабочей жидкости на компрессионные манжеты поверяемых средств измерений. На цилиндры 1 и 2 надеваются компрессионные манжеты поверяемых сфигмоманометров. Контроль давления в измерительных модулях осуществляется датчиками избыточного давления МИДА-13П с верхним пределом измерения 40 кПа и относительной погрешностью 0.25 %.

В эластичной трубке 3 измерительного модуля А установлены: регулятор давления 9 для точного поддержания давления, позволяющий изменять амплитуду измерительного сигнала, и регулятор 5 для регулирования расхода рабочей жидкости.

Известно, что плечевая артерия в нижней трети плеча разветвляется на более мелкие сосуды, среди которых лучевая, локтевая и передняя межкостная артерии [4]. Потому при измерениях АД и ЧСС в нижней трети плеча нужно исходить из того, что компрессионная манжета поверяемого средства измерения воспринимает пульсации одновременно с трех сосудов.

В связи с этим допущением эластичная трубка 4 измерительного модуля Б дополнительно содержит три эластичные трубки, выполненные различного диаметра с целью повышения чувствительности во измерительном модуле Б. Запорно-регулирующие элементы 6, установленные на дополнительных трубках, регулируют расход рабочей жидкости и поддерживают в них установленное давление, что позволит изменять сопротивление потока в трубках, тем самым корректируя давление в измерительном модуле Б.

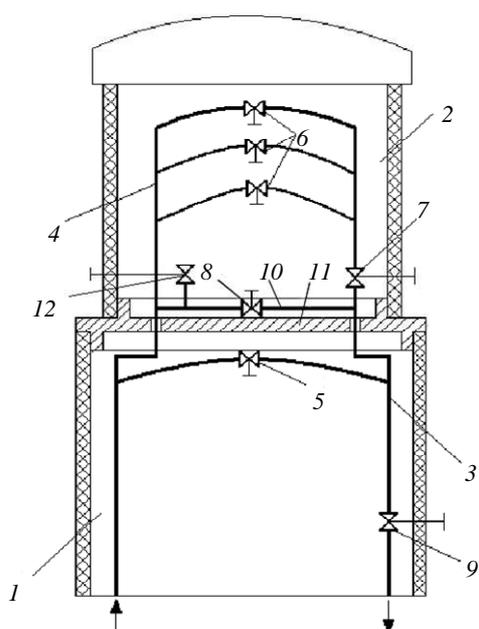


Рис. 1

Цилиндр 2 дополнительно содержит байпасную трубку 10 с запорно-регулирующим элементом 8 для регулирования расхода в измерительном модуле Б.

Цилиндры 1 и 2 разделены перегородкой 11, в которой установлен соединительный запорно-регулирующий элемент 12, который выполняет функцию гидравлического объединения цилиндров 1 и 2, выравнивая соответствующие давления в них для более точной передачи пульсаций рабочей жидкости на компрессионные манжеты поверяемых средств измерений.

При изучении переходных процессов в гидравлическом имитаторе давления необходимо исходить из трех возможных режимов работы его измерительных модулей:

1) при проверке неинвазивных сфигмоманометров с плечевыми манжетами используют измерительный модуль А – в этом случае открыт элемент 5 и закрыты элементы 7 и 8 (рис. 1);

2) при проверке неинвазивных сфигмоманометров с запястными манжетами используют измерительный модуль Б; тогда открыты все регуляторы, кроме регулятора 5;

3) при совместном использовании измерительных модулей открыты все регуляторы.

**Результаты исследования.** В модели гидравлического имитатора каждый измерительный модуль характеризуется соответственно объемным кровотоком  $Q_i$ , объемом  $V_i$ , давлением  $p_i$ , где  $i = 1, 2$ .

При рассмотрении двух первых случаев можно применить классическую модель «упругих резервуаров» О. Франка, в которой эластичная трубка представляется в виде упругого резервуара, выполняющего функцию гемодинамического «демпфера» систолического потока крови из левого желудочка сердца [5], [6]. Рассмотрение первых двух режимов работы гидравлического имитатора давления с изучением их переходных процессов в измерительных модулях показано в [7].

Изменение объема жидкости  $V_i$  в  $i$ -м измерительном модуле равно разности притока в измерительный модуль  $Q_{i0}(t)$  и оттока из него  $Q_{i1}(t)$ . Уравнения баланса жидкости в сосудах измерительных модулей в дифференциальной форме с учетом практически полной несжимаемости жидкости выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = Q_{10}(t) - Q_{11}(t); \\ \frac{dV_2}{dt} = Q_{20}(t) - Q_{21}(t). \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1)  $Q_{10}(t)$  и  $Q_{20}(t)$  – приток жидкости в первый и второй измерительные модули соответственно;  $Q_{11}(t)$  и  $Q_{21}(t)$  – отток жидкости из первого и второго измерительных модулей соответственно.

Эластичные свойства трубок измерительных модулей обусловлены растяжением их стенок и описываются уравнениями

$$\begin{cases} V_i = C_i (p_i - p_{di}); \\ Q_i = C_i \frac{dp_i}{dt}, \end{cases}$$

где  $C_i$  – коэффициент эластичности трубки  $i$ -го измерительного модуля;  $p_i$  – давление в упругом резервуаре в текущий момент времени;  $p_{di}$  – диастолическое давление в  $i$ -м измерительном модуле.

Объемный расход жидкости на выходе эластичной трубки измерительных модулей можно представить в виде

$$Q_{i1} = \mu_i S_i \sqrt{\frac{2\Delta p_i}{\rho}} = \mu_i S_i \sqrt{\frac{2(p_i - p_{кон})}{\rho}}, \quad (2)$$

где  $\mu_i$  – коэффициент расхода;  $S_i$  – площадь сечения выходного трубопровода  $i$ -го измерительного модуля, м<sup>2</sup>;  $\Delta p_i$  – перепад давления в  $i$ -м измерительном модуле, Па;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $p_{кон}$  – давление на выходе эластичной трубки  $i$ -го измерительного модуля, Па.

Расход в измерительном модуле Б можно представить в виде  $Q_2 = Q_{21} + Q_{22} + Q_{23}$ , где  $Q_{21}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{23}$  – расход в дополнительных трубках измерительного модуля Б.

Положим давление на выходе дополнительных трубок измерительного модуля Б  $p_{2кон i} = 0$ . Зависимость объемного расхода жидкости  $Q_{2i} = Q_{2i}(S_{2i}, p_{2i})$  нелинейна, вследствие чего применим метод линеаризации уравнения (2) через приращение первого порядка:

$$Q_{2i} = Q_{2i0} + \left(\frac{\partial Q_{2i}}{\partial S_{2i}}\right)_0 \Delta S_{2i} + \left(\frac{\partial Q_{2i}}{\partial p_{2i}}\right)_0 \Delta p_{2i},$$

где  $Q_{2i0} = p_{2i}/W_{2i}$  – номинальный объемный расход жидкости в  $i$ -й трубке измерительного модуля Б, м<sup>3</sup>/с;  $W_{2i}$  – гидравлическое сопротивление в  $i$ -го дополнительной трубке измерительного модуля Б, (Па · с)/м<sup>3</sup>.

Суммарный расход в измерительном модуле Б можно записать в виде

$$Q_2 = Q_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_{2i}}{\partial S_{2i}}\right)_0 \Delta S_{2i} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_{2i}}{\partial p_{2i}}\right)_0 \Delta p_{2i},$$

где  $Q_0 = (p_1 - p_2)/(W_\Sigma + W_2)$  – номинальный расход жидкости в измерительном модуле Б, м<sup>3</sup>/с;  $p_1$ ,  $p_2$  – перепады давления до и после дополнительных гидравлических сопротивлений в трубках измерительного модуля Б, Па;  $W_\Sigma = \frac{W_{21}W_{22}W_{23}}{W_{21}W_{22} + W_{22}W_{23} + W_{21}W_{23}}$  – суммарное гидравлическое сопротивление, обусловленное наличием дополнительных трубок измерительного модуля Б, (Па · с)/м<sup>3</sup>;  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$  – гидравлические сопротивления в дополнительных трубках измерительного модуля Б, (Па · с)/м<sup>3</sup>;

$$C_2 \frac{dp_2}{dt} = Q_c - \frac{p_2 - p_1}{W_\Sigma + W_2} - \left(\frac{\partial Q}{\partial S_2}\right)_0 \Delta S_2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial p_2}\right)_0 \times \Delta p_2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_{2i}}{\partial S_{2i}}\right)_0 \Delta S_{2i} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_{2i}}{\partial p_{2i}}\right)_0 \Delta p_{2i}.$$

Положим, что регулятор измерительного модуля А открыт, т. е.  $Q_1(t) \neq 0$ . Расход жидкости в байпасной линии первого измерительного модуля гидравлического имитатора давления, определяемый положением регулятора давления, можно представить в виде (3). В этом случае систему уравнений можно представить в виде

$$\begin{cases} C_1 \frac{dP_1}{dt} = Q_c - \frac{P_1}{W_1} - x_{S1}S_1 - x_{P1}P_1; \\ C_2 \frac{dP_2}{dt} = Q_c - \frac{P_2 - P_1}{W_\Sigma + W_2} - x_{S2}S_2 - x_{P2}P_2 - \\ - \sum_{i=1}^n x_{S2i}S_{2i} - \sum_{i=1}^n x_{P2i}P_{2i}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $S_{2i}$  – площадь проходного сечения  $i$ -х дополнительных трубок измерительного модуля Б;  $p_{2i}$  – давление в  $i$ -х дополнительных трубках измерительного модуля Б;

$$x_{S1} = \left( \frac{\partial Q_{10}}{\partial S_1} \right)_0 \gamma_{S1}; \quad x_{p1} = \left( \frac{\partial Q_{10}}{\partial p_1} \right)_0 \gamma_{p1};$$

$$x_{S2} = \left( \frac{\partial Q_{20}}{\partial S_2} \right)_0 \gamma_{S2}; \quad x_{p2} = \left( \frac{\partial Q_{20}}{\partial p_2} \right)_0 \gamma_{p2};$$

$$\gamma_{Si} = \frac{\Delta S}{S_i}; \quad \gamma_{pi} = \frac{\Delta p}{p_i}.$$

Сложив два уравнения в (4) и продифференцировав второе уравнение по времени, получим

$$C_2(W_\Sigma + W_2) \frac{d^2 p_2}{dt^2} + \left[ 1 + \frac{C_2(W_\Sigma + W_2)(1 + x_{p1}W_1)}{C_1W_1} + x_{p2}(W_\Sigma + W_2) \right] \times$$

$$\times \frac{dp_2}{dt} + \left\{ \frac{[(W_\Sigma + W_2)x_{p2} + 1](1 + x_{p1}W_1)}{C_1W_1} \right\} p_2 =$$

$$= (W_\Sigma + W_2) \frac{dQ}{dt} + \frac{W_1 + (W_\Sigma + W_2)(1 + x_{p1}W_1)}{C_1W_1} \times$$

$$\times Q_c - \frac{x_{S1}}{C_1} S_1 - (W_\Sigma + W_2) x_{S2} \frac{dS_2}{dt} -$$

$$- \frac{(W_\Sigma + W_2) x_{S2} (1 + x_{p1}W_1)}{C_1W_1} S_2 -$$

$$- (W_\Sigma + W_2) \left[ \sum_{i=1}^n x_{S2i} \frac{dS_{2i}}{dt} + \sum_{i=1}^n x_{p2i} \frac{dp_{2i}}{dt} \right] -$$

$$- \frac{(W_\Sigma + W_2)(1 + x_{p1}W_1)}{C_1W_1} \left[ \sum_{i=1}^n x_{S2i} S_{2i} + \sum_{i=1}^n x_{p2i} p_{2i} \right]. \quad (5)$$

Запишем уравнения динамики (5) в стандартной форме:

$$T_2^2 \frac{d^2 p_2}{dt^2} + T_1 \frac{dp_2}{dt} + p_2 = k_Q \left( T_Q \frac{dQ_c}{dt} + Q_c \right) - k_{S1} S_1 -$$

$$- k_{S2} \left( T_S \frac{dS_2}{dt} + 1 \right) - \sum_{i=1}^3 k_{S2i} S_{2i} - \sum_{i=1}^3 k_{p2i} p_{2i}, \quad (6)$$

где  $T_1, T_2, T_Q, T_S$  – постоянные времена, с, определяемые из выражений:

$$T_1 = \frac{C_1W_1}{(x_{p1}W_1 + 1)} + \frac{C_2(W_\Sigma + W_2)}{1 + (W_\Sigma + W_2)x_{p2}};$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{C_1C_2W_1(W_\Sigma + W_2)}{(x_{p1}W_1 + 1)[(W_\Sigma + W_2)x_{p2} + 1]}}; \quad (7)$$

$$T_Q = \frac{C_1W_1(W_\Sigma + W_2)}{W_1 + (W_\Sigma + W_2)(x_{p1}W_1 + 1)};$$

$$T_S = \frac{C_1W_1}{x_{p1}W_1 + 1};$$

$$k_Q = \frac{W_1 + (W_\Sigma + W_2)(x_{p1}W_1 + 1)}{(1 + x_{p1}W_1)[1 + x_{p2}(W_\Sigma + W_2)]}$$

– коэффициент преобразования, (Па · с)/м<sup>3</sup>;

$$k_{S1} = \frac{x_{S1}W_1}{(x_{p1}W_1 + 1)[x_{p2}(W_\Sigma + W_2) + 1]}$$

– коэффициент усиления регулятора измерительного модуля А, Па/м<sup>2</sup>;

$$k_{S2} = \frac{x_{S2}(W_\Sigma + W_2)}{1 + x_{p2}(W_\Sigma + W_2)}$$

– коэффициент усиления регулятора измерительного модуля Б, Па/м<sup>2</sup>.

Пренебрегая предпоследним выражением в уравнении (5), можно получить аналогичные выражения коэффициентов усиления для трех дополнительных трубок измерительного модуля Б:

$$k_{S2i} = \frac{x_{S2i}(W_\Sigma + W_2)}{1 + x_{p2}(W_\Sigma + W_2)};$$

$$k_{p2i} = \frac{x_{p2i}(W_\Sigma + W_2)}{1 + x_{p2}(W_\Sigma + W_2)}.$$

При  $T_1 \geq 2T_2$  дифференциальное уравнение (6) в операционной форме можно записать:

$$(T_3p + 1)(T_4p + 1) y(p) =$$

$$= k_Q (T_Qp + 1) g(p) - k_{S2} (T_Sp + 1) u(p), \quad (8)$$

где  $p$  – оператор Лапласа;  $y(p)$  – изображение по Лапласу давления на выходе емкости;  $g(p)$  – изображение по Лапласу расхода жидкости на входе измерительного модуля;  $u(p)$  – изображение по Лапласу площади поперечного сечения трубопровода измерительного модуля.

Постоянные времена  $T_3$  и  $T_4$  можно найти следующим образом:

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}. \quad (9)$$

Подставив  $T_1$  и  $T_2$  из (7) в (9), получим:  $T_3 = \frac{C_1W_1}{x_{p1}W_1 + 1}$  – постоянная времени измерительного модуля А, с;  $T_4 = \frac{C_2(W_\Sigma + W_2)}{1 + x_{p2}(W_\Sigma + W_2)}$  – постоянная времени измерительного модуля Б, с;

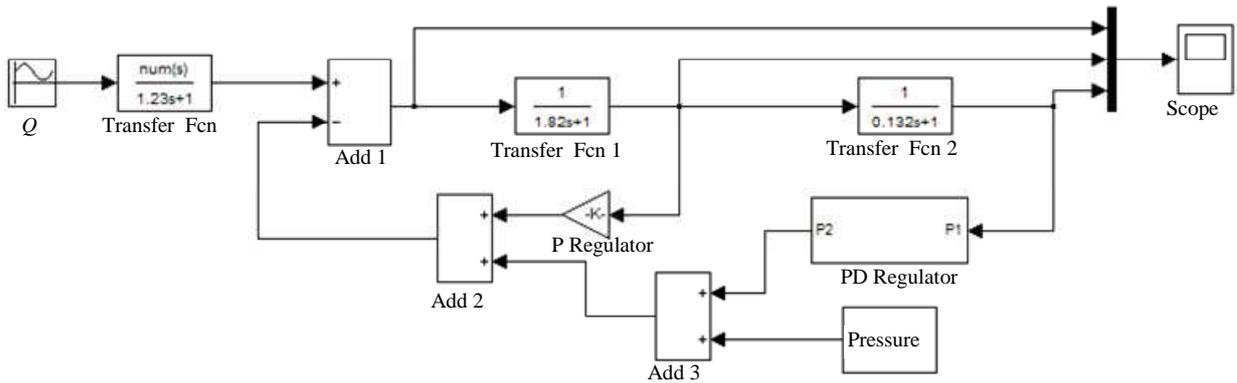


Рис. 2

Погрешности измерения давления

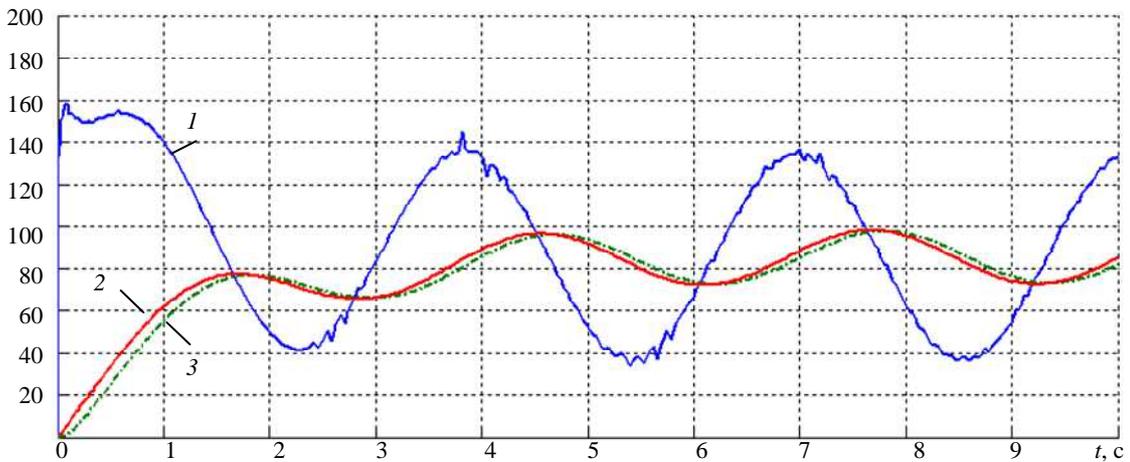


Рис. 3

Из выражения (8) можно определить передаточную функцию гидравлического имитатора давления:

$$W_M(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{k_Q (T_Q p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

Уравнение динамики регулятора измерительного модуля Б можно представить в виде

$$W_{S2}(p) = k_{S2} (T_{S2} p + 1)$$

**Анализ результатов исследования.** Полученные передаточные функции гидравлического имитатора давления позволяют определить характер переходного процесса контролируемого давления при воздействии пульсирующего потока жидкости, определяемого уравнением  $Q_c = Q_0 \sin(\omega t)$ . На рис. 2 показана модель гидравлического имитатора давления и частоты сердечных сокращений, выполненная в среде MathLab Simulink. Блок Regulators моделирует работу дополнительных регуляторов в измерительном модуле Б, обеспечивая настройку заданных параметров измери-

тельного сигнала в гидравлическом имитаторе давления и частоты сердечных сокращений.

На рис. 3 приведены погрешности измерения давления в измерительных модулях при воздействии пульсирующих потоков жидкости (1 – на входе гидравлического имитатора давления; 2 – в измерительном модуле А; 3 – в измерительном модуле Б) при наибольшем предельном давлении 40 кПа (300 мм рт. ст.).

Анализ амплитудно- и фазочастотных характеристик показал, что гидравлическая система устойчивая и обладает запасом устойчивости по фазе  $88^\circ$ .

При одновременной работе измерительных модулей А и Б регулирование давления осуществляется совместной работой регуляторов, которые позволяют поддерживать заданное давление при проверке неинвазивных сфигмоманометров с плечевыми и запястными манжетами.

Статистическая погрешность измерения давления в измерительном модуле определяется погрешностью используемого датчика давления, сигнал с которого поступает в блок управления. Поскольку

регуляторы давления 5 и 6 позволяют поддерживать среднее давление в измерительных модулях, то воспроизведение единицы давления осуществляется с погрешностью, обусловленной погрешностью датчика МИДА-13П. При этом такая погрешность не должна превышать по абсолютному значению 1 мм рт. ст., установленному в методиках поверки неинвазивных сфигмоманометров.

В результате теоретических исследований получены передаточные функции гидравлического имитатора давления с учетом различных режимов работы его измерительных модулей. Полученные передаточные функции позволяют построить частотные характеристики и определить рацио-

нальное сочетание параметров динамических звеньев, обеспечивающих требуемые качественные характеристики переходных процессов, а следовательно, и точность измерения давления в гидравлических системах.

Результаты исследования успешно были апробированы на поверочной установке УПАД-1, внесенной в Государственный реестр СИ (№ 20889-01) и содержащей измерительный модуль для поверки неинвазивных сфигмоманометров [2], [8].

Результаты исследования будут использованы при разработке универсальных установок для поверки неинвазивных сфигмоманометров с плечевыми и запястными манжетами.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сойко А. И., Каратаев Р. Н. Поверочные установки измерителей артериального давления с использованием генераций пульсирующих потоков / Казань: Отечество, 2009. 132 с.

2. Гогин В. А., Варгин А. А., Каратаев Р. Н. Метрологические аспекты измерений артериального давления и частоты сердечных сокращений / Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003. 99 с.

3. Пат. РФ № 2456675. Имитационная модель руки человека для поверки средств измерений артериального давления и частоты сердечных сокращений / Р. Н. Каратаев, А. И. Сойко, А. И. Хрунина и др. № 2010151078; заявл. 13.12.2010; опубл. 20.07.12. Бюл. № 20.

4. Краев А. В. Анатомия человека / под ред. Р. Д. Синельникова. М.: Медицина, 1978. Т. 2. 352 с.

5. Бегун П. И., Афонин П. Н. Моделирование в биомеханике: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2004. 390 с.

6. Frank O., Biol Z. Die Theorie der Pulswellen // Z. Biol. 1927. № 85. P. 91–130.

7. Сойко А. И., Каратаев Р. Н. Передаточная функция гидравлического имитатора давления для неинвазивных сфигмоманометров / Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева. 2014. № 3. С. 119–1225.

8. Государственный реестр средств измерений / Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии Национальный метрологический институт ВНИИМС. URL: <http://www.vniims.ru/inst/gosreestr>.

A. I. Soyko, R. N. Karataev, A. I. Ataeva

Kazan national research technical university by named A. N. Tupolev

### DYNAMIC MODELS OF HYDRAULIC SIMULATOR PRESSURE AND HEART RATE

*The dynamic model of the hydraulic simulator of pressure and heart rate presented in the form of transfer functions of its measuring modules used for checking of the noninvasive sphygmomanometers and constructed on the basis of classical models of hemodynamics of O. Frank is received. On the basis of the received results it is possible to estimate qualitative characteristics of transition processes and accuracy of measurement of pressure in measuring modules of the hydraulic simulator of pressure.*

**Dynamic model, hydraulic simulator, transfer function, transient characteristics, statistical error of pressure measurement**