УДК 62.50

С. К. Поликарпов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Цифровые модели типовых звеньев систем управления

Рассматривается методика составления цифровых моделей в виде дискретных передаточных функций и разностных уравнений для трех наиболее известных методов цифрового интегрирования: отстающих и опережающих прямоугольников и метода трапеций применительно к типовым звеньям (корректирующим и регулирующим) систем регулирования.

Дискретные передаточные функции, метод Эйлера, метод опережающих прямоугольников, метод трапеций, системы автоматического регулирования

Среди возможных способов разработки алгоритмов цифровой реализации основных средств управления наиболее простым и универсальным способом является замена непрерывных интеграторов их цифровыми моделями в детализированных структурных схемах (ДСС) непрерывных аналоговых звеньев. Они составляются обычно по передаточным функциям звеньев путем решения операторного уравнения относительно выходной величины через операторы интегрирования и масштабного преобразования [1].

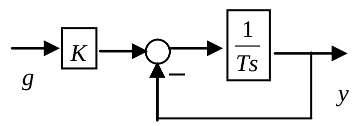
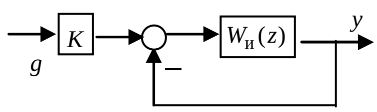
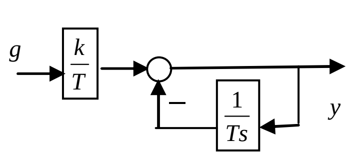
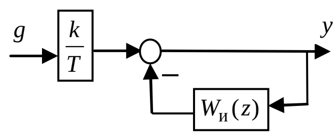
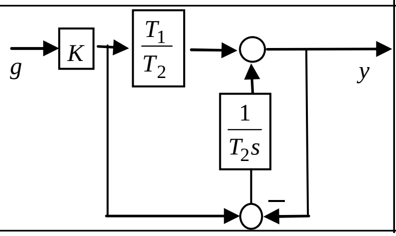
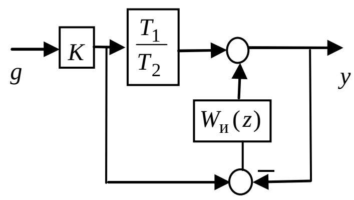
В табл. 1 приведены передаточные функции ряда непрерывных звеньев. Там же приведены аналоговые и дискретные детализированные схемы, составленные по исходным передаточным функциям.

Заменив непрерывные интеграторы соответствующими моделями цифрового интегрирования [2], получаем ДСС дискретного звена, разумеется, с учетом правила линейности Z-преобразования.

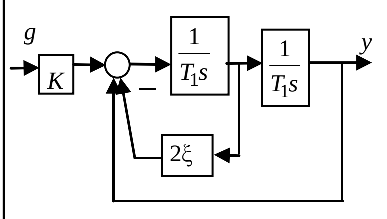
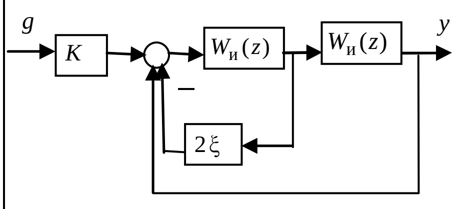
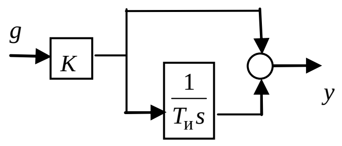
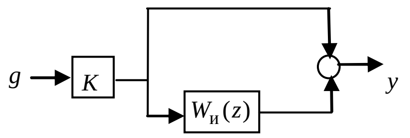
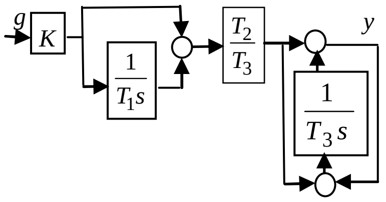
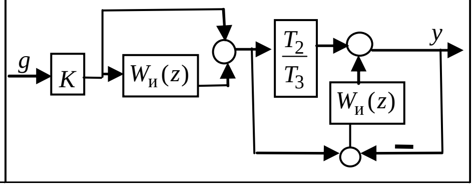
По ней записывается дискретная передаточная функция и путем несложных преобразований составляется дискретное уравнение во временной области.

Преобразования заключаются в записи передаточной функции $W(z)=Y(z)/G(z)$, т. е. как

Таблица 1

Звено	ДСС аналоговая	ДСС дискретная
Апериодическое 1-го порядка $W(s)=\frac{k}{Ts+1}$, где k – коэффициент передачи звена; T – постоянная времени звена		
Инерционное – дифференцирующее $W(s)=\frac{ks}{Ts+1}$, где k – коэффициент передачи звена; T – постоянная времени звена		
Корректирующее 1-го порядка $W(s)=k\frac{T_1s+1}{T_2s+1}$, где k – коэффициент передачи звена; T_1 и T_2 – постоянные времени звена		

Окончание табл. 1

Звено	ДСС аналоговая	ДСС дискретная
Звено 2-го порядка $W(s)=\dfrac{k}{T_1^2s^2+2\xi T_1s+1}$, где T_1 – постоянная времени звена; ξ – коэффициент демпфирования		
ПИ-регулятор $W(s)=k\dfrac{T_и s+1}{T_и s}$, где k – коэффициент передачи звена; $T_и$ – постоянная времени интегрирования звена		
ПИД-регулятор $W(s)=k\dfrac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{T_1s(T_3s+1)}$, где k – коэффициент передачи звена; T_1, T_2 и T_3 – постоянные времени звена		

отношение z-изображения выходной величины к z-изображению входной величины, затем исходное уравнение приводится к виду $W(z)G(z)=Y(z)$. В полученном уравнении приводятся подобные члены. Иногда приходится делить обе части уравнения на z, чтобы получить в обеих частях ряды по отрицательным степеням z. Это необходимо для практической реализации записываемого разностного уравнения, так как в электронных управляющих устройствах могут храниться только прошлые цифровые значения входного и выходного сигналов.

В табл. 2 представлены передаточные функции дискретных ДСС для трех методов цифрового интегрирования (в табл. 2 и 3 введены обозначения: T_0 – период дискретизации; k или $k_п$ – коэффициент передачи звена; $T_и$ – постоянная времени интегрирования).

Таблица 2

Звено	Метод Эйлера	Метод опережающих прямоугольников	Метод трапеций
Апериодическое 1-го порядка	$W(z)=\dfrac{kT_0}{T-T_0}\dfrac{1}{\frac{T}{T-T_0}z-1}$	$W(z)=\dfrac{kT_0}{T}\dfrac{z}{\frac{T_0+T}{T}z-1}$	$W(z)=\dfrac{kT_0}{2T-T_0}\dfrac{z+1}{\frac{T_0+2T}{2T-T_0}z-1}$
Инерционно-дифференцирующее	$W(z)=\dfrac{k}{T-T_0}\dfrac{z-1}{\frac{T}{T-T_0}z-1}$	$W(z)=\dfrac{k}{T}\dfrac{z-1}{\frac{T+T_0}{T}z-1}$	$W(z)=\dfrac{2k}{2T-T_0}\dfrac{z-1}{\frac{2T+T_0}{2T-T_0}z-1}$
Корректирующее 1-го порядка	$W(z)=k\dfrac{T_1-T_0}{T_2-T_0}\dfrac{\frac{T_1}{T_1-T_0}z-1}{\frac{T_2}{T_2-T_0}z-1}$	$W(z)=k\dfrac{T_1}{T_2}\dfrac{\frac{T_1+T_0}{T_1}z-1}{\frac{T_2+T_0}{T_2}z-1}$	$W(z)=\dfrac{k(2T_1-T_0)}{(2T_2-T_0)}\times$ $\times\dfrac{\frac{2T_1+T_0}{2T_1-T_0}z-1}{\frac{2T_2+T_0}{2T_2-T_0}z-1}$
2-го порядка	$W(z)=$ $=\dfrac{k\left(T_0/T_1\right)^2}{(z-1)^2+2\xi\frac{T_0}{T_1}(z-1)+\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2}$	$W(z)=$ $=\dfrac{kz^2}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2(z-1)^2+2\xi\left(\frac{T_1}{T_0}\right)z(z-1)+z^2}$	$W(z)=k\left(z^2+2z+1\right)\Big/\left[z^2(k_1+\right.$ $\left.+k_2+1)+2z(1-k_1)+(1+k_1-k_2)\right]$, где $k_1=4\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^2$; $k_2=2\xi\dfrac{T_1}{T_0}$

Окончание табл. 2

Звено	Метод Эйлера	Метод опережающих прямоугольников	Метод трапеций
ПИ-регулятор	$W(z)=\frac{Y(z)}{G(z)}= =k_{и}\left(\frac{T_{и}-T_0}{T_{и}}\right)\frac{\frac{T_{и}}{T_{и}-T_0}z-1}{z-1}$	$W(z)=k_{п}\frac{(1+T_0/T_{и})z-1}{z-1}$	$W(z)= =k_{п}\frac{2T_{и}-T_0}{2T_{и}}\frac{\frac{2T+T_0}{2T-T_0}z-1}{z-1}$
ПИД-регулятор	$W(z)=k_{п}\frac{(T_{и}-T_2)(T_2-T_0)}{T_{и}(T_3-T_0)}\times \times\frac{\frac{T_{и}}{T_{и}-T_{и}}z-1}{z-1}\frac{\frac{T_2}{T_2-T_0}z-1}{\frac{T_3}{T_3-T_0}z-1}$	$W(z)=k_{п}\frac{T_2}{T_3}\frac{\frac{T_{и}+T_0}{T_{и}}z-1}{z-1}\times \times\frac{\frac{T_2+T_0}{T_2}z-1}{\frac{T_3+T_0}{T_3}z-1}$	$k_{п}\frac{(2T_{и}-T_2)(2T_2-T_0)}{2T_{и}(2T_3-T_0)}\times \times\frac{\frac{2T_{и}+T_0}{2T_{и}-T_0}z-1}{z-1}\frac{\frac{2T_2+T_0}{2T_2-T_0}z-1}{\frac{2T_3+T_0}{2T_3-T_0}z-1}$

В табл. 3 приведены разностные уравнения для рассматриваемых звеньев и трех методов цифрового интегрирования.

В формулах ПИ-регулятора $T_{И}$ – время интегрирования, т. е. время, за которое сигнал интегральной составляющей достигает значения пропорциональной составляющей.

Таблица 3

Звено	Метод Эйлера	Метод опережающих прямоугольников	Метод трапеций
Апериодическое 1-го порядка	$y(n)=k\frac{T_0}{T}g(n-1)+ +\frac{T-T_0}{T}y(n-1)$	$y(n)=k\frac{T_0}{T_0+T}g(n)+ +\frac{T}{T_0+T}y(n-1)$	$y(n)=k\frac{T_0}{T_0+2T}\left[g(n)+ +g(n-1)+\frac{2T-T_0}{T_0+2T}y(n-1)\right]$
Инерционно-дифференцирующее	$y(n)=\frac{k}{T_1}[g(n)-g(n-1)]+ +\left(1-\frac{T_0}{T_2}\right)y(n-1)$	$y(n)=\frac{k}{T_1+T_0}[g(n)- -g(n-1)]+\frac{T_1}{T_0+T_1}y(n-1)$	$y(n)=\frac{2k}{2T_1+T_0}[g(n)- -g(n-1)]+\frac{2T_1-T_0}{T_0+2T_1}y(n-1)$
Корректирующее 1-го порядка	$y(n)=k\frac{T_1}{T_2}g(n)- -k\frac{T_1-T_0}{T_2}g(n-1)+ +\left(1-\frac{T_0}{T_2}\right)y(n-1)$	$y(n)=k\frac{T_1+T_0}{T_2+T_0}g(n)- -k\frac{T_1}{T_2+T_0}g(n-1)+ +\frac{T_2}{T_2+T_0}y(n-1)$	$y(n)=k\frac{2T_1+T_0}{2T_2+T_0}g(n)- -k\frac{2T_1-T_0}{2T_2+T_0}g(n-1)+ +\frac{2T_2-T_0}{2T_2+T_0}y(n-1)$
2-го порядка	$y(n)=\frac{kT_0^2}{T_1^2}=g(n-2)+ +2\frac{T_0}{T_1}\left(\frac{T_1}{T_0}-\xi\right)y(n-1)- -\frac{T_0^2}{T_1^2}\left[\frac{T_0^2}{T_1^2}-2\xi\frac{T_0}{T_1}+1\right]$	$y(n)=\frac{1}{1+2\xi\frac{T_1}{T_0}+\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2}\times \times\left\{kg(n)+2\left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2+\xi\frac{T_1}{T_0}\right]\times \times y(n-1)+\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2y(n-2)\right\}$	$y(n)=\frac{k}{1+4\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2\left(1+\frac{T_0}{T_1}\xi\right)}\times \times[g(n)-2g(n-1)]+g(n-2)+ +\frac{1}{1+4\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2\left(1+\frac{T_0}{T_1}\xi\right)}\times \times\left[2\left[4\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2y(n-1)-[1+ +4\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2-4\frac{T_1}{T_0}\xi\right]y(n-2)\right]\right]$

Окончание табл. 3

Звено	Метод Эйлера	Метод опережающих прямоугольников	Метод трапеций
ПИ-регулятор	$y(n)=y(n-1)+k_{п}g(n)-$ $-k_{п}\frac{T_{и}-T_0}{T_0}g(n-1)$	$y(n)=k_{п}\frac{T_0+T_{и}}{T_{и}}g(n)+$ $+y(n-1)-k_{п}g(n-1)$	$y(n)=y(n-1)+$ $+k_{п}\left(1+\frac{T_0}{2T_{и}}\right)g(n)$
ПИД-регулятор	$y(n)=k_{п}\frac{T_2}{T_3}g(n)+y(n-1)+$ $+\left(1-\frac{T_0}{T_3}\right)y(n-1)-$ $-\left(1-\frac{T_0}{T_3}\right)y(n-2)-$ $-\frac{k_{п}(T_{и}-T_0)}{T_{и}T_0}g(n-1)$	$y(n)=k\ \frac{(T_{и}+T_0)(T_2+T_0)}{T_{и}(T_3+T_0)}\times$ $\times g(n)+y(n-1)+\frac{T_3}{T_3+T_0}y(n-1)-$ $-\frac{T_3}{T_3+T_0}y(n-2)-k_{п}\frac{T_2+T_0}{T_3+T_0}g\times$ $\times(n-1)-k_{П}\frac{T_2}{T_{и}}\frac{T_{и}+T_0}{T_3+T_0}g(n-1)+$ $+k_{п}\frac{T_2}{T_3+T_0}g(n-2)$	$y(n)=\frac{k_{п}(2T_{и}+T_0)}{2T_{и}(2T_3+T_0)}\times$ $\times\frac{(2T_2+T_0)g(n)}{2T_{и}(2T_3+T_0)}-$ $-\frac{(8T_{и}T_2-T_0^2)g(n-1)}{2T_{и}(2T_3+T_0)}+$ $+\frac{(2T_{и}-T_0)(2T_2-T_0)g(n-2)}{2T_{и}(2T_3+T_0)}$ $+\frac{1}{2T_3+T_0}[2T_3y(n-1)-$ $-(2T_3-T_0)y(n-2)]$

Дискретные передаточные функции (см. табл. 2) могут быть использованы как самостоятельно, так и непосредственно при составлении структурных схем дискретных систем.

Разностные уравнения могут служить основой для записи алгоритмов программируемых логических контроллеров [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борцов Ю. А, Соколовский Г. Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петерб. отд-е, 1992. 288 с.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.
3. Поликарпов С. К. Метод составления разностных уравнений для записи алгоритмов в ПЛК // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2014. № 3. С. 43.

S. K. Polycarpov

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

DIGITAL MODELS OF TYPICAL UNITS OF CONTROL SYSTEMS

In article the technique of drawing up of digital models as discrete transfer functions and the difference equations for three most known methods of digital integration is considered(examined): lagging behind and outstripping rectangular and a method of trapezes with reference to typical parts systems of regulation.

Discrete transfer functions, Euler method, right rectangles method, method of trapezes, automatic control systems