



УДК 62-52.001.24

Ю. А. Бычков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

С. В. Щербаков

Государственная комиссия Псковской области по организации государственных закупок

Анализ качественных особенностей динамики нелинейных неавтономных электрических цепей с помощью собственных чисел функциональной матрицы Якоби

Предлагается алгоритм исследования качественных особенностей и свойств динамики нелинейных неавтономных электрических цепей с сосредоточенными параметрами. Алгоритм основан на декомпозиции регулярных составляющих искомого решения уравнений динамики таких цепей по собственным числам функциональной матрицы Якоби и последующем выделении взаимосвязей между свойствами цепи и информационными показателями результатов такой декомпозиции. Процедура поиска решения сформирована с использованием расчетной схемы аналитически-численного метода. Аналитически-численный метод относится к классу одношаговых методов переменного порядка и его вычислительная процедура состоит из двух частей. Аналитическая часть основывается на аппарате обобщенных функций, обобщенного преобразования Лапласа и функционально-степенных рядов. В основе численной части лежит принцип аналитического продолжения решения и процедура выбора необходимого шага расчета и порядка метода. Все вычисления на каждом шаге расчета сопровождаются оценками локальной и полной погрешностей такого расчета.

Электрическая цепь, нелинейная динамика, численный метод, шаг расчета, погрешность расчета, декомпозиция искомого решения, матрица Якоби, динамические свойства цепи

Постановка задачи. Задача анализа качественных особенностей динамики нелинейных неавтономных электрических цепей с сосредоточенными параметрами чрезвычайно актуальна. Развитие теории нелинейных явлений и получаемые прикладные результаты порождают многообразие методов решения этой задачи [1]–[3].

В общем случае динамику цепей выделенного класса описывает следующее обыкновенное нелинейное интегрально-дифференциальное уравнение с нестационарными коэффициентами:

$$A(D) x(t) = G(D) f(t) + H(x, f, t), \quad (1)$$

где D – оператор обобщенного дифференцирования по независимой переменной t ; $A(D)$ – квадратная порядка L_x матрица с полиномиальными

от D и D^{-1} элементами, где символ D^{-1} есть оператор интегрирования с переменным верхним пределом t ; $G(D)$ – прямоугольная матрица размером $L_x \times L_f$ с полиномиальными от D и D^{-1} элементами; $x(t)$ и $f(t)$ – матрицы-столбцы реакций (искомых решений) и внешних воздействий цепи соответственно; $H(x, f, t)$ – матрица-столбец со строками в виде сумм произведений, сомножители которых – нестационарные и неавтономные коэффициенты, а также классические производные любого порядка и интегралы любой кратности начиная с нулевых от искомого решения и внешних воздействий цепи, в произвольных дробно-рациональных степенях.

Расчет динамики нелинейных неавтономных электрических цепей при заданных предначальных условиях $D^n x_r(0^-) = D^n x_r(t_0^-)$, $r = 1, 2, \dots, L_x$, $0^- = t_0^-$, $n \in [0; M-1]$ сводится к поиску всех существующих в заданном интервале исследования $[t_0; T]$ решений уравнения (1) и сопряжен с рядом алгоритмических и математических проблем. Существо этих проблем определяет объективное разнообразие качественных особенностей искомых решений.

В общем случае искомые решения уравнения (1) характеризуются непредсказуемостью их поведения, что обусловлено зависимостью форм проявления доминирующих нелинейных и нестационарных свойств элементов цепи от выбранных начальных условий, а также от соотношения параметров и вида характеристик элементов цепи. Кроме того, динамические показатели искомых решений, как правило, нерегулярны, сводя динамику цепи к детерминированному хаосу [2]–[4]. В общем случае в искомых решениях уравнения (1) возможны разрывы первого рода, в том числе дифференцируемые, и разрывы второго рода. Специфика решений, как правило, обусловлена «жесткостью», т. е. чередованием интервалов быстрого и медленного изменения их динамических показателей, причем в пределах этих интервалов возможен переход к локальной неустойчивости. Прямым следствием локальной неустойчивости служит эффект «перемешивания» решений, что значительно усложняет задачу расчета динамики нелинейной неавтономной цепи и анализа ее качественных особенностей [5]. Разнообразие особенностей искомого решения уравнения (1), являясь следствием многосложного переплетения координатно-параметрических взаимосвязей этого уравнения, допускает возможность вычисления лишь приближенного решения этого уравнения с помощью какого-либо численного метода [6]–[8]. Численных методов много и их расчетные схемы постоянно совершенствуются, однако в большинстве случаев они не позволяют установить в замкнутой форме какие-либо взаимосвязи между характером поведения искомого решения и определенными информационными показателями уравнения (1). Выделение и последующий анализ таких взаимосвязей важны как в теоретическом, так и в прикладном плане, поскольку открывают возможности для построения проблемно-ориентированных алгоритмов и расчетных схем анализа качественных

особенностей динамики нелинейных неавтономных цепей с сосредоточенными параметрами, а также синтеза цепей с наперед заданными доминирующими характеристиками.

В предлагаемой статье дано решение поставленной задачи на основе использования в качестве информационных показателей динамики нелинейной неавтономной цепи собственных чисел, соответствующей ее уравнению (1) функциональной матрицы Якоби и декомпозиции по таким собственным числам искомых решений этого уравнения. В качестве расчетной основы использован аналитически-численный метод, который по своим вычислительным характеристикам и возможностям соответствует поставленной задаче [9], [10]. Приведен иллюстрирующий пример.

Выделение информационных показателей динамики нелинейной неавтономной электрической цепи. В состав информационных показателей качественных особенностей искомых решений уравнения (1) целесообразно включить такие, которые определяют взаимодействие параметров этого уравнения и нестационарных показателей самих решений. В линейной стационарной электрической цепи, динамику которой описывает уравнение (1) при $H(x, f, t) = \text{const}$, такими информационными показателями служат корни λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ следующего характеристического уравнения:

$$A(p) = 0, \quad (2)$$

где $A(p)$ – определитель матрицы $A(D)$.

Корни уравнения (2) описывают все характерные особенности динамики линейной автономной цепи включая результаты исследования ее устойчивости и «жесткости» [1], [7], [8]. Характер внешних воздействий определяет установившийся режим этой цепи, поэтому ее динамика полностью прогнозируема в полубесконечном интервале времени.

Выделение подобных информационно-емких и простых показателей динамики нелинейных неавтономных цепей класса (1) пока невозможно, однако насущные запросы практики требуют формирования приемлемых информационных показателей их динамики. Если пойти по тому же пути, что для линейного случая, то возможно рассмотрение в качестве необходимых информационных показателей корней λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ уравнения (2), формирование которого связано с вычислением определителя $A(p)$ матрицы $A(D)$ выделенной линейной части

уравнения (1). Трактовка смыслового содержания получаемых при этом информационных показателей λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ неоднозначна, поскольку взаимосвязь таких выделенных стационарных по сути показателей с качественными особенностями динамики нелинейной неавтономной цепи не поддается какой-либо содержательной идентификации даже постановочно. Возможны также случаи, когда в уравнении (1) матрица $A(D)$ нулевая, т. е. факт существования корней уравнения (2) носит условный характер [9].

Следовательно, целевым признаком выделения приемлемых информационных показателей динамики нелинейной неавтономной цепи служит условие гарантированного существования таких корней и наличие их явной взаимосвязи с нестационарными показателями искомого решения уравнения (1). Это условие может быть выполнено, если в уравнении (1) матрицу $A(D)$ определенным проблемно-ориентированным образом выделить или довыделить из матрицы $H(x, f, t)$ [9], [10]. Все выполняемые при таком выделении или довыделении матрицы $A(D)$ преобразования должны носить эквивалентный характер, а динамика цепи и ее качественные особенности оставаться неизменными независимо от сформированного варианта выделения или довыделения. В результате предлагаемого преобразования матрицы $A(D)$ будет достигнута необходимая математическая взаимосвязь корней λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ уравнения (2) с числовыми значениями искомого решения уравнения (1) в дискретные моменты времени, определяемые шагом численного расчета динамики цепи. Вследствие такой взаимосвязи корни λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ приобретут функциональную зависимость от времени, причем нестационарными станут как их количественные показатели, так и качественные характеристики.

Полученный результат, обеспечивая существование информационных показателей λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ теперь уже функциональной матрицы $A(D)$ и их непосредственную математическую взаимосвязь с числовыми значениями динамики цепи при отсутствии целевого критерия выделения или довыделения матрицы $A(D)$ за счет матрицы $H(x, f, t)$ не гарантирует каких-либо приемлемых информативных характеристик таких показателей. Существующие методы анализа качественных особенностей нелинейных объектов диктуют выбор в качестве целевого критерия

формирования матрицы $A(D)$ уравнения (1) условие ее совпадения с функциональной матрицей Якоби, соответствующей этому уравнению [4]–[8]. Алгоритм решения такой задачи изложен в работе [10]. В результате приведения матрицы $A(D)$ за счет матрицы $H(x, f, t)$ к функциональной матрице Якоби нестационарные корни λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ уравнения (2) приобретут статус собственных чисел этой матрицы.

Нестационарные собственные числа λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби уравнения (1) в дискретные моменты времени, определяемые шагом его численного решения, имеют определенное смысловое содержание [4]–[8]. В качестве локальной характеристики динамики нелинейной неавтономной цепи они позволяют характеризовать устойчивость и скорость изменения динамических параметров решений ее уравнения динамики (1) в бесконечно малой окрестности точки, соответствующей дискретному моменту времени t из заданного интервала исследования $[t_0; T]$. В окрестности особых точек уравнения (1) собственные числа λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби позволяют на фазовой плоскости выделить области притяжения и отталкивания фазовых траекторий, прогнозируя таким образом предельные состояния цепи [6]–[8]. Локальные, т. е. в некоторый дискретный момент времени, показатели информативности нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби, во взаимосвязи с анализом качественных особенностей динамики нелинейных неавтономных цепей обуславливают необходимость выявления функциональных в ограниченном интервале времени показателей информативности этих нестационарных чисел и выделения причинно-следственных соотношений между такими функциональными показателями и характером динамики цепи.

Выделив таким образом приемлемые нестационарные информационные показатели λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$, динамики нелинейной неавтономной электрической цепи, нужно установить их взаимосвязь с расчетной схемой метода, используемого для анализа этой динамики. Для этого в расчетной схеме метода необходима аналитическая часть, в которой такая взаимосвязь может быть организована. Математический аппарат этой аналитической части должен соответствовать требованиям

процедуры вычисления собственных чисел функциональной матрицы Якоби и условиям их взаимодействия с динамическими показателями решений уравнения (1). Этим требованиям в полной мере отвечает одношаговый аналитически-численный метод переменного порядка [9], [10].

Аналитически-численный метод расчета динамики нелинейных неавтономных электрических цепей. Аналитически-численный метод расчета динамики выделенного уравнением (1) класса электрических цепей в заданном интервале исследования $[t_0; T]$ состоит из двух частей: аналитической и численной.

Аналитическая часть метода основана на аппаратах обобщенных функций, преобразования Лапласа и функционально-степенных рядов. Процедура аналитической части предваряет выполнение каждого очередного шага расчета и сводится к следующему. Сначала, разложив функции, описывающие внешние воздействия и нестационарные параметры цепи, в соответствующие им степенные ряды, а также формально описав регулярные составляющие тех искомых решений, которые входят в элементы матрицы $H(x, f, t)$ уравнения (1), соответствующими им степенными рядами, правую часть этого уравнения преобразуем к матрице-столбцу, элементами строк которой служат степенные ряды. Коэффициенты этих степенных рядов в общем случае неизвестны, поскольку они выражены через известные коэффициенты степенных рядов для внешних воздействий и нестационарных параметров цепи, и неизвестные коэффициенты степенных рядов для регулярных составляющих некоторых из искомых решений. Выполненная операция приводит исходное уравнение (1) к виду, необходимому для последующего применения интегрального преобразования Лапласа. Преобразовав по Лапласу переформированное уравнение (1) и решив полученное в результате алгебраическое уравнение по правилу Крамера, для изображения $X_l(p)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ получим следующее выражение:

$$X_l(p) = \frac{B'_l(p)}{A(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B'_{l,N+J_l-i} p^{N+J_l-i}}{\sum_{i=0}^N A_i p^i}, \quad (3)$$

где $N \in \mathbb{N}$; $J_l \in \mathbb{Z}$.

Дробно-рациональная функция, описываемая выражением (3), в общем случае, когда $J_l \geq 0$, является неправильной и допускает ее представление в виде суммы целой рациональной $X_l^-(p)$ и правильной дробно-рациональной $X_l^+(p)$ функций. Последующее разложение правильной дробно-рациональной функции $X_l^+(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки преобразует выражение (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} X_l(p) &= X_l^-(p) + X_l^+(p) = \\ &= \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l,j} p^{-j} + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} B_{l,N-i} p^{N-i}}{\sum_{i=0}^N A_i p^i} = \\ &= \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l,j} p^{-j} + \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_{l,N-i-1} p^{N-i}}{\sum_{i=0}^N A_i p^i} \frac{1}{p} = \\ &= \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l,j} p^{-j} + \sum_{i=0}^{\infty} R_{l,i} p^{-(i+1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты $S_{l,j}$, $B_{l,N-i}$, $R_{l,i}$, входящие в выражение (4), с учетом обозначений выражения (3) вычисляем по следующим формулам [9], [10]:

$$\begin{aligned} S_{l,-J_l} &= B'_{l,N+J_l} / A_N; \\ S_{l,-J_l+j} &= \left(B'_{l,N+J_l+j} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{j-1} S_{l,-J_l+k} A_{N-j+k} \right) / A_N, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2, \dots, J_l$;

$$B_{l,N-i} = B'_{l,N-i} - \sum_{k=0}^{N-i} S_{l,-N+i+k} A_k,$$

где $i = 1, 2, \dots$; $S_{l,-r} = 0$, если $r > J_l$;

$$\begin{aligned} R_{l,0} &= B_{l,N-1} / A_N; \\ R_{l,i} &= \left(B_{l,N-1-i} - \sum_{k=0}^{i-1} R_{l,k} A_{N-i+k} \right) / A_N, \end{aligned} \quad (5)$$

где $i = 1, 2, \dots$.

Члены суммы в правой части последнего из равенств (4) образуют соответственно главную и правильную части ряда Лорана для изображения $X_l(p)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ в

окрестности бесконечно удаленной точки. Оригиналом для изображения $X_l(p)$ служит обобщенная функция $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$, содержащая сингулярную $x_l^-(t)$ и регулярную $x_l^+(t)$ составляющие.

Итак, после выполнения аналитической части метода для искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ уравнения (1) получим следующее описание:

$$\begin{aligned} x_l(t) &= x_l^-(t) + x_l^+(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l,j} \delta_j(t) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{l,i} t^i / i!, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta_j(t)$ – импульсные функции от нулевого до $-J_l$ -го порядка включительно, определенные в начальной для рассматриваемого интервала расчета точке; $S_{l,j}$ – их весовые коэффициенты; $R_{l,i}$ – коэффициенты разложения регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$ в степенной ряд в правой окрестности начальной для рассматриваемого интервала расчета точке с абсциссой $t = 0^+$ [9], [10].

Полученная форма (6) описания искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ уравнения (1) отражает ряд принципиальных моментов, связанных с анализом качественных особенностей динамики нелинейных неавтономных цепей. Применение интегрального преобразования Лапласа позволяет в точке, соответствующей началу текущего интервала расчета, осуществить корректный переход от известных предначальных условий к подлежащим определению начальным условиям и выделить в искомым решениях уравнения (1) разрывы первого рода, если они существуют. Присутствие в описании (6) сингулярной составляющей $x_l^-(t)$ указывает на возможность выделения существующих дифференцируемых разрывов первого рода. Отметим, что сингулярную составляющую решения $x_l^-(t)$, если она существует, определяем в дискретный момент времени начала текущего шага расчета в аналитической части метода.

Регулярная составляющая решения $x_l^+(t)$, как следует из описания (6), представлена степенным рядом и для ее вычисления в текущем интервале расчета служит численная часть метода, связанная с соответствующей динамикой цепи дискретизацией независимой переменной t . Численную часть метода для текущего интервала расчета

$[t_{k-1}; t_k]$, $t_k = t_{k-1} + h_k$ начинаем с выбора величины шага $h = h_k$, которую определяет следующее равенство [9], [10]:

$$h = q\tau, \quad (7)$$

где $0 < q < 1$.

Предельная величина τ шага h , входящая в равенство (7), есть результат исследования сходимости в текущем интервале расчета числовых мажорант степенных рядов для регулярных составляющих $x_r^+(t)$ искомым решений $x_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, L_x$, уравнения (1). Текущий шаг расчета $h = h_k$, выбранный в соответствии с равенством (7), таков, что обеспечивает выполнение ряда значимых условий для анализа качественных особенностей нелинейных неавтономных цепей.

Во-первых, в интервале времени $[t_{k-1}; t_k]$, $t_k = t_{k-1} + h_k$ все степенные ряды для регулярных составляющих $x_r^+(t)$ искомым решений сходятся к разложенным в них функциям $x_r^+(t)$, что указывает на их существование в этом интервале, придавая процедуре поиска решения логический смысл и практическую целесообразность.

Во-вторых, выбранная согласно равенству (7) длительность $h = h_k$ обеспечивает численную устойчивость процедуры вычисления в дискретный момент времени $t = t_k$ приближенного значения $x_l^+(t_k; I_l)$ регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения. Это вычисление связано с заменой ряда Тейлора для регулярной составляющей решения частичной суммой его первых I_l членов. Возникающий при этом остаточный член ряда, образуя локальную погрешность расчета, всегда ограничен и доступен для верхней оценки с помощью формул, приведенных в работах [9], [10].

В-третьих, длина шага $h = h_k$, отвечающая равенству (7), всегда соответствует скорости изменения регулярных составляющих $x_r^+(t)$ искомым решений. Такой вывод обусловлен тем, что сходимость степенных рядов для регулярных составляющих решений $x_r^+(t)$ исследуем, рассматривая соответствующие числовые последовательности, члены которых образованы всевозможными комбинациями показателей этих степенных рядов, основания которых составляют значения производных конечных порядков от этих составляющих решений в дискретный момент времени $t = t_{k-1}$.

В-четвертых, отвечающий равенству (7) шаг расчета $h = h_k$ таков, что позволяет организовать процедуру верхней оценки $|\Delta x_l^+(t; I_l)|$, $t = t_k$ абсолютной полной погрешности расчета приближенного значения $x_l^+(t_k; I_l)$ регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$. Под полной погрешностью расчета будем понимать погрешность, накопленную после выполнения двух и более шагов расчета, на каждом из которых возникает локальная погрешность.

Итак, выбрав в соответствии с равенством (7) текущий шаг расчета $h = h_k$ и ограничив ряд Тейлора для регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$ частичной суммой его первых I_l членов, вычисляем приближенное значение $x_l^+(t_k; I_l)$, $t_k = t_{k-1} + h_k$ этой составляющей. Затем, оценив на текущем шаге $h = h_k$ локальную погрешность расчета, вычисляем верхнюю оценку $|\Delta x_l^+(t; I_l)|$, $t = t_k$ полной погрешности расчета. Полученные таким образом численные результаты позволяют в дискретный момент времени $t = t_k$ выделить на оси ординат одномерный интервал, который содержит неизвестное точное значение $x_l^+(t_k)$ регулярной составляющей искомого решения $x_l^+(t)$. В принятых обозначениях этот интервал в дискретный момент времени $t = t_k$ описывает следующее двойное неравенство:

$$\begin{aligned} x_l^+(t_k; I_l) - |\Delta x_l^+(t_k; I_l)| &\leq \\ &\leq x_l^+(t_k) \leq x_l^+(t_k; I_l) + |\Delta x_l^+(t_k; I_l)|. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство (6) и двойное неравенство (8) описывают результаты вычислительной процедуры аналитически-численного метода на текущем шаге расчета $h = h_k$. Для следующего шага расчета в заданном интервале исследования $[t_0; T]$ ось ординат переносим вправо на величину h_k . После этого, выбрав из двойных неравенств (8) при $l = r$, $r = 1, 2, \dots, L_x$ приближенные значения предначальных условий для этого шага, повторяем описанные процедуры аналитической и численной частей метода.

Установление взаимосвязи информационных показателей динамики нелинейной неавтономной цепи и параметров расчетной схемы аналитически-численного метода. Анализ выражения (3) с учетом уравнения (2) показывает,

что для установления такой взаимосвязи необходимо обеспечить математическую взаимосвязь между полюсами λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ изображения $X_l(p)$ и динамическими показателями искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$. Динамическими показателями регулярной составляющей $x_l^+(t)$ $l \in [1; L_x]$ служат коэффициенты $R_{l,i}$ ее степенного ряда, входящие в описание (6). Коэффициенты $R_{l,i}$ вычисляем в аналитической части метода с помощью рекуррентных формул (5). Преобразование формул (5) приводит к новой форме их записи, которая в явном виде отражает необходимую математическую взаимосвязь коэффициентов $R_{l,i}$ регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$ с полюсами λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ изображения $X_l^+(p)$ этой составляющей, описываемого выражением (3). Новые формы записи коэффициентов $R_{l,i}$ приведены в работе [8]. Например, в случае, когда все полюсы λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ изображения $X_l^+(p)$ простые, формула для вычисления коэффициентов $R_{l,i}$ имеет следующий вид [8]:

$$R_{l,i} = \sum_{n=1}^N \eta_{l,n} \lambda_n^i, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Коэффициенты $\eta_{l,n}$ вычисляем по формуле

$$\eta_{l,n} = \frac{\sum_{m=1}^i B_{l,N-1-m}^* \lambda_n^{-m}}{N + \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) A_{N-m}^* \lambda_n^{-m}}. \quad (10)$$

Коэффициенты $B_{l,N-1-m}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ и A_r^* , $r = 1, 2, \dots, N-1$ в формуле (10) связаны с коэффициентами $B_{l,N-1-m}$, A_r , входящими в выражение (4), следующими соотношениями:

$$B_{l,N-1-m}^* = B_{l,N-1-m} / A_N; \quad A_r^* = -A_r / A_N.$$

Формула (9) позволяет записать входящий в описание (6) степенной ряд для регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения в следующей новой форме [8]:

$$x_l^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l,i} t^i / i! = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_m} R_{l,i}^{[n]} t^i / i!, \quad (11)$$

где N_m – число различных полюсов изображения $X_l^+(p)$.

Сформированное описание (11) обуславливает для регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ следующее эквивалентное представление:

$$x_l^+(t) = \sum_{n=1}^{N_m} x_l^{[n]}(t). \quad (12)$$

Составляющие $x_l^{[n]}$ вычисляем по формуле

$$x_l^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l,i}^{[n]} t^i / i!. \quad (13)$$

Система взаимосвязанных равенств (11)–(13) образует единый комплекс преобразований, согласно которому на каждом шаге расчета динамики нелинейной неавтономной цепи возможна декомпозиция реакции цепи $x_l^+(t)$ по полюсам λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ ее изображения $X_l^+(p)$. Декомпозиция не носит абсолютного характера, поскольку через коэффициенты $B_{l,N-1-m}^*$, $m \in \mathbb{Z}$, входящие в формулу (10), для нелинейного объекта декомпозиции всегда сохраняется объективно существующая математическая взаимосвязь между всеми элементами (13) представления (12). Декомпозиция регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения, описываемая системой равенств (11)–(13), прошла успешную апробацию при решении ряда специальных задач, связанных с формализацией процедуры исследования существования и единственности искомого решения уравнения (1), выбора шага расчета согласно равенству (7), а также при оптимизации вычислительных затрат, связанных с оценкой абсолютной локальной погрешности расчета [9].

Итак, выполняем эквивалентное преобразование уравнения (1) к виду, когда матрица $A(D)$ совпадет с функциональной матрицей Якоби, а полюсы λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ изображения $X_l^+(p)$ регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения станут собственными числами этой матрицы. Последующая декомпозиция этой составляющей решения по таким числам открывает новые возможности по организации расчетных схем анализа качественных особенностей динамики нелинейных неавтономных цепей. В роли функциональных или распределенных во времени инфор-

мационных показателей этих особенностей предлагаем рассмотрение потенциально существующих функций, описывающих изменение в заданном интервале исследования $[t_0; T]$ нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби, а также самих элементов (13) представления (12) регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения. Возможность декомпозиции реакций нелинейной цепи неординарна сама по себе, что обуславливает ожидаемую новизну открывающихся перспектив. Обозначим лишь некоторые из них, поскольку полнота суждений в отношении такой проблематики – это вопрос времени.

Контроль знака вещественных частей нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби в каждый дискретный момент времени $t = t_k$ из заданного интервала исследования $[t_0; T]$ обуславливает фиксацию границ интервалов устойчивости и неустойчивости в отношении каждого из элементов (13) представления (12). Полученная информация первична для определения причинно-следственных соотношений: с одной стороны, между условиями устойчивости или неустойчивости регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$, $l \in [1; L_x]$ и, с другой стороны, подобными же условиями для элементов (13) представления (12) этой составляющей решения. Вывод об устойчивости или неустойчивости регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения зависит тогда от наличия среди нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби одного или нескольких доминирующих, а также от особенностей изменения таких доминирующих чисел в интервале исследования, включая вариацию их характера.

Использование элементов декомпозиции (13) во взаимосвязи с динамикой нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби открывает возможность иной трактовки результата расчета динамики цепи, описываемого двойным неравенством (8). Формирование подобных двойных неравенств для каждого из элементов декомпозиции (13) при нерегулярности динамических свойств цепи определяет исходные положения для выделения таких характерных соотношений и сочетаний между элементами декомпозиции (13), когда ди-

намические показатели искоемых решений уравнения (1) наиболее чувствительны к изменению параметров и внешних воздействий цепи, что обуславливает склонность к бифуркации, или же к вариации начальных условий, приводящих к «перемешиванию» фазовых траекторий [5].

Качественные характеристики и особенности функций, описывающих изменение в заданном интервале исследования $[t_0; T]$ нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби, включая непрерывность и монотонность таких функций, наличие точек их экстремума, вариативность характера и знака вещественных частей, отражая внутренние причинно-следственные связи уравнения (1), представляют адаптивные функциональные показатели качественных особенностей нелинейной динамики цепи, причем спектр и степень информативности этих показателей еще подлежат определению. Раскрытие содержательной стороны рассматриваемых функциональных показателей динамики нелинейной неавтономной цепи составляет самостоятельную задачу, решение которой, возможно, послужит отправной точкой для более полного понимания многосложного и неоднозначного поведения нелинейного объекта исследования. Определение соотношений между указанными функциональными показателями и динамическими показателями элементов декомпозиции (13) регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$, $l \in [1; L_x]$ может привести к появлению новых вычислительных алгоритмов выделения, классификации и расчета стационарных и нестационарных режимов нелинейной динамики, включая формирование условий существования такой динамики регулярного характера или перехода к детерминированному хаосу [2]–[5].

В линейной модели корни характеристического полинома $A(p)$ содержат исчерпывающие сведения о ее динамике. В нелинейной модели для придания корням уравнения (2) необходимой информативности целесообразно за счет матрицы $H(x, f, t)$ дополнить матрицу $A(D)$ до совпадения ее с функциональной матрицей Якоби. Ее собственные числа не служат аналогом корней характеристического полинома, но, обладая локальными, распределенными во времени показателями, дают новую информацию, которая позволяет отчасти прогнозировать динамику нелинейной модели.

Описываемая системой равенств (11)–(13) декомпозиция регулярных составляющих искоемых

решений уравнения (1) вводит самостоятельный вид функциональных показателей динамики нелинейной цепи. Они определяют качественные особенности такой динамики непосредственно на основе особенностей динамических свойств самих элементов декомпозиции (13). Как показано в приведенном далее примере, такая взаимосвязь прослеживается в причинно-следственных соотношениях одного из доминирующих свойств нелинейной динамики – «жесткости» [1], [4], [5].

Обобщая сказанное, отметим, что вариантов проявлений характерных особенностей нелинейной динамики много, они разноплановы как по условиям возникновения, так и по показателям последствий. Нерегулярность как свойство такой динамики – это скорее норма, чем исключение [2]. Причины столь сложного и непредсказуемого поведения реакций нелинейной неавтономной цепи определяют собственные параметрические взаимосвязи ее уравнения динамики. Одной из составляющих комплексного показателя таких взаимосвязей служат, несомненно, собственные числа λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби. Анализ особенностей динамики нелинейной неавтономной цепи на основе декомпозиции ее реакций на составляющие, каждая из которых соответствует одному из собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ функциональной матрицы Якоби при сохранении логической и математической взаимосвязи между этими составляющими, отражает существо предлагаемого нами нового подхода к решению поставленной задачи и новой методологии проведения необходимых исследований.

Пример. Анализ качественных особенностей динамики нелинейной автономной электрической цепи на основе декомпозиции ее реакций по собственным числам функциональной матрицы Якоби, соответствующей ее уравнению динамики.

В форме (1) уравнение динамики рассматриваемой нелинейной автономной цепи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} a_{1,1}^{[1]} D + a_{1,1}^{[0]} & 0 \\ a_{2,1}^{[0]} & a_{2,2}^{[1]} D \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \\ & = \left\| \begin{matrix} g_{1,1}^{[0]} \\ 0 \end{matrix} \right\| f(t) + \left\| \begin{matrix} h_{1,1} x_1^2(t) x_2(t) \\ h_{2,1} x_1^2(t) x_2(t) \end{matrix} \right\|, \quad (14) \end{aligned}$$

где $a_{1,1}^{[1]} = a_{2,2}^{[1]} = h_{1,1} = 1$; $h_{2,1} = -1$; $f(t) = \delta_1(t)$;

$g_{1,1}^{[0]} = A$; $a_{1,1}^{[0]} = B + 1$; $a_{2,1}^{[0]} = -B$.

После подстановки значений параметров, указанных в экспликации к уравнению (14), получили следующую, унифицированную для организации необходимых расчетных схем, форму этого уравнения:

$$\begin{bmatrix} D+B+1 & 0 \\ -B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \delta_1(t) + \begin{bmatrix} x_1(t)^2 x_2(t) \\ -x_1(t)^2 x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Уравнение (15), известное как уравнение Брюсселятора, уникально, поскольку качественные особенности его решений существенным образом зависят от соотношения между параметрами A и B [4]. При $B = A^2 + 1$ наблюдается бифуркация Хопфа, в которой устойчивый предельный цикл, существующий при $B > (A^2 + 1)$, переходит в устойчивую стационарную точку решения $x_1(t) = A$; $x_2(t) = B/A$, соответствующую условию $B < (A^2 + 1)$. Бифуркационное соотношение параметров $B = A^2 + 1$ устанавливает границу проявления характерных особенностей реакций рассматриваемой нелинейной автономной цепи. Это находит соответствующее отражение в характере и динамике нестационарных собственных чисел функциональной матрицы Якоби уравнения (15), а также в элементах декомпозиции (13), $l = 1, 2$, $n = 1, 2$ искомым решений $x_l(t)$ этого уравнения по таким собственным числам. Выделение причинно-следственных и математических признаков этой взаимосвязи составляет методологическую основу предлагаемого анализа качественных особенностей динамики нелинейной цепи.

Довыделив матрицу линейной части $A(D)$ уравнения (15) за счет матрицы $H(x, f, t)$ и обеспечив тем самым совпадение корней характери-

стического уравнения (2) с собственными числами λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби этого уравнения, получили [9], [10]:

$$\begin{bmatrix} D+B+1-2R_{1.0}R_{2.0} & -R_{1.0}^2 \\ -B+2R_{1.0}R_{2.0} & D+R_{1.0}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \delta_1(t) + \begin{bmatrix} x_1(t)^2 x_2(t) - 2R_{1.0}R_{2.0}x_1(t) - R_{1.0}^2 x_2(t) \\ -x_1(t)^2 x_2(t) + 2R_{1.0}R_{2.0}x_1(t) + R_{1.0}^2 x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $R_{1.0}$ и $R_{2.0}$ – нулевые коэффициенты в разложении регулярных составляющих искомым решений $x_r(t)$, $r = 1, 2$ уравнения (15) в степенные ряды.

Выполнив над уравнением (16) вычислительную процедуру аналитической части аналитически-численного метода, в форме (6) получили следующее описание искомым решений:

$$x_r(t) = x_r^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{r,i} t^i / i!, \quad r = 1, 2, \quad (17)$$

где $R_{r,i}$ – коэффициенты степенных рядов для регулярных составляющих искомым решений $x_r(t)$, вычисленные перед каждым очередным шагом расчета по формулам (9) при $l = r$ и $N = 2$ с использованием нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби уравнения (16).

Сформированные для искомым решений $x_r(t)$, $r = 1, 2$ уравнения (16) описания не содержат сингулярных составляющих. Численная часть аналитически-численного метода в интервале исследования $[0; 10]$ с заданным предельным уровнем абсолютной локальной погрешности

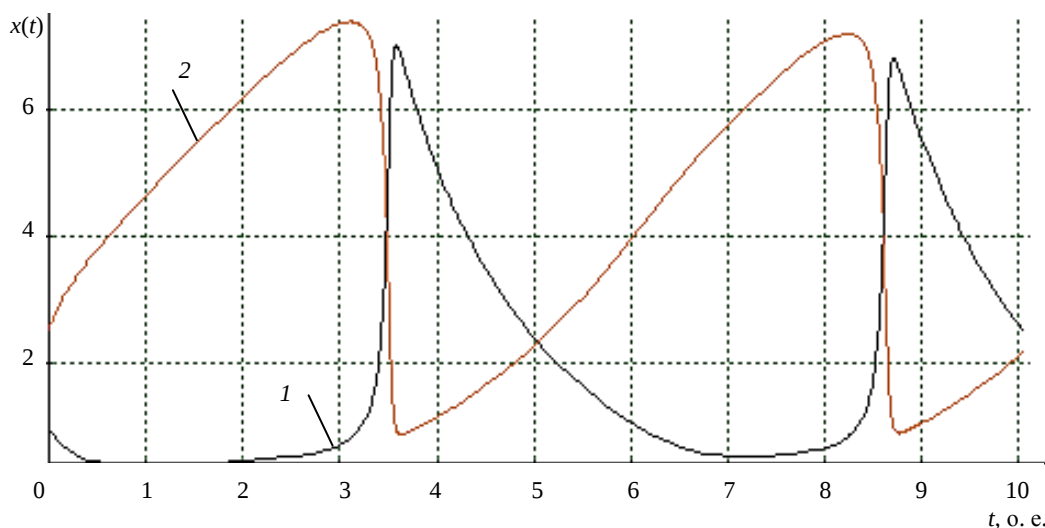


Рис. 1

расчета $\varepsilon_r(h) = 1 \cdot 10^{-5}$ и предначальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2.5$ выполнили по стандартной схеме. Результаты расчета для случая, когда $A = 2$, $B = 6$, приведены на рис. 1 (линия 1 – $x_1(t)$, линия 2 – $x_2(t)$). Как видно из рис. 1, существует устойчивый предельный цикл [4]. Из рисунка также видно, что ключевой особенностью динамики рассматриваемой нелинейной автономной цепи является «жесткость», т. е. чередование участков быстрого и медленного изменения ее реакций.

Для анализа причинно-следственных связей выделенной ключевой особенности на основе описываемой системой равенств (11)–(13) при $N_m = N = 2$, $l = 1, 2$ декомпозиции искомых ре-

шений $x_l(t) = x_l^+(t)$ уравнений (16) по собственным числам λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби, на рис. 2–4 представлены результаты расчета. На рис. 2 ($A = 2$, $B = 6$) приведены графики изменения вещественных и мнимых частей собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ (рис. 2, а: линия 1 – $\text{Re}(\lambda_1)$, линия 2 – $\text{Re}(\lambda_2)$; (рис. 2, б: линия 1 – $\text{Im}(\lambda_1)$, линия 2 – $\text{Im}(\lambda_2)$) функциональной матрицы Якоби (16). Согласно полученным результатам, «жесткости», как и в случае линейной автономной цепи, соответствует так называемое расхождение, или удаление друг от друга, абсолютных значений вещественных

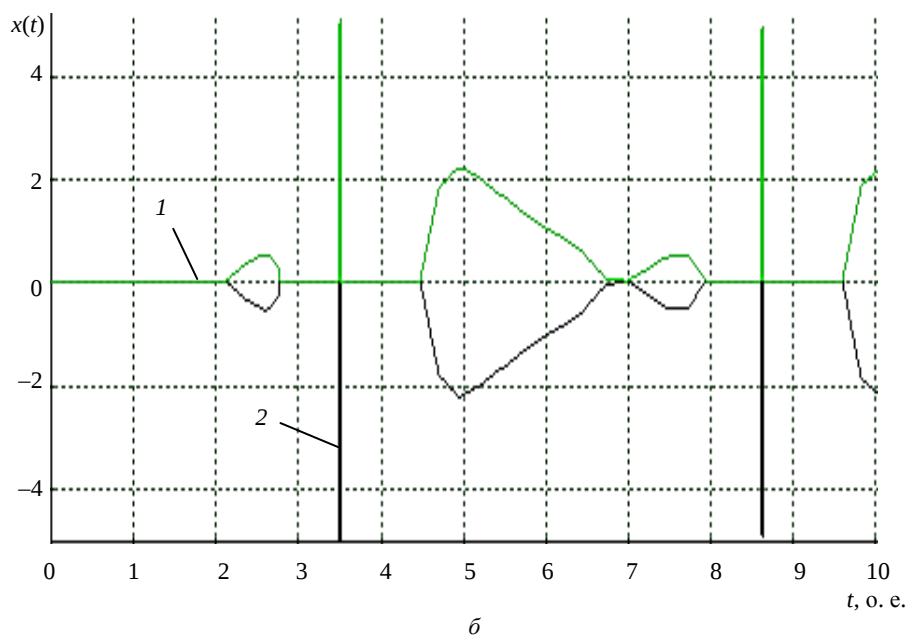
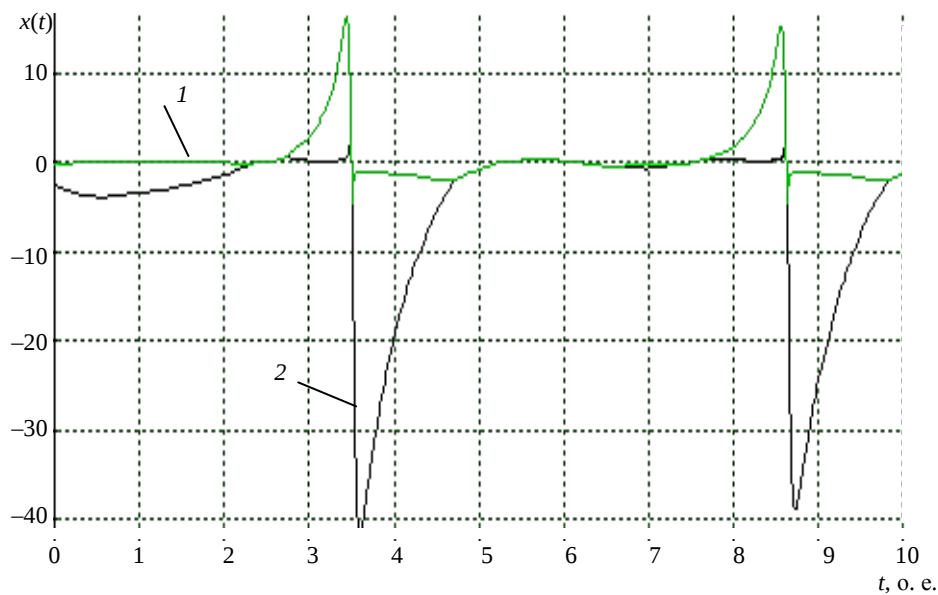


Рис. 2

частей максимального и минимального по модулю корней характеристического уравнения (2). Принципиальное отличие нелинейного случая от линейного состоит, однако, в том, что показатель K такого расхождения, как видно из рис. 2, является функцией времени. В интервалах времени [3–4], [8–9], когда искомые решения изменяются достаточно быстро, нестационарный показатель K действительно достигает сравнительно высоких значений, доходящих до 100 единиц.

На рис. 3 показана динамика вещественных (а: линия 1 – $\text{Re}(x_1(t) \rightarrow R[1](0))$, линия 2 – $\text{Re}(x_2(t) \rightarrow R[2](0))$ и мнимых (б: линия 1 – $\text{Im}(x_1(t) \rightarrow R[1](0))$, линия 2 – $\text{Im}(x_2(t) \rightarrow R[2](0))$) частей двух составляющих (13), $l = 1, n = 1, 2$ искомого решения $x_1(t)$ уравнения (16) при $A = 2$, $B = 6$, а на рис. 4 – искомого решения $x_2(t)$.

Начиная с момента времени $t = 4$, определяющего начало интервала с достаточно медленным изменением решений, показатель K непрерывно уменьшается, принимая в интервале времени [4–8] значения, близкие к единице, и отражая тем самым отсутствие быстрых составляющих в этих решениях. Таким образом «жесткость» как качественная особенность нелинейной динамики характеризуется не стационарным, как в линейной автономной цепи, а нестационарным показателем K . Функциональный характер этого показателя не только отражает существо нелинейной динамики, но и вскрывает основные принципы ее самоорганизации. Так, согласно способу расчета, определяемому структурой матрицы Якоби уравнения (16), собственные числа $\lambda_n, n = 1, 2$ этой матрицы начиная со второго шага расчета являются функциями, аргументами которых служат вычисляе-

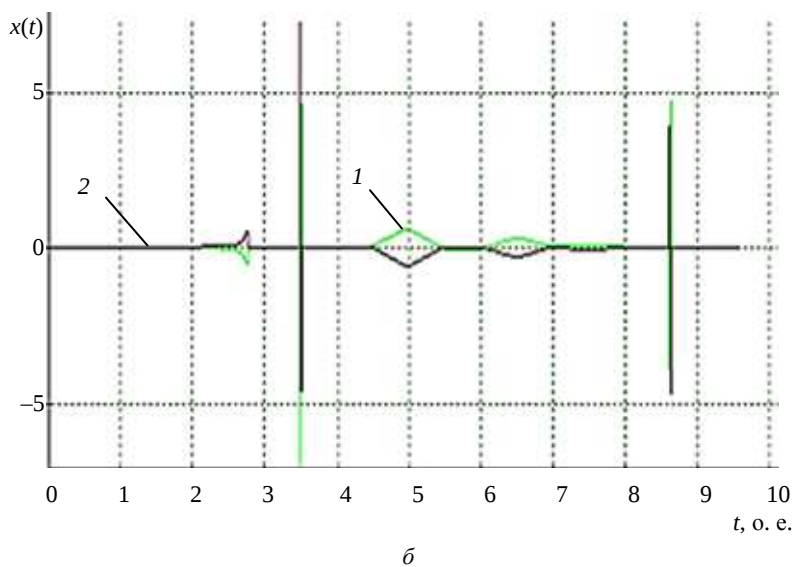
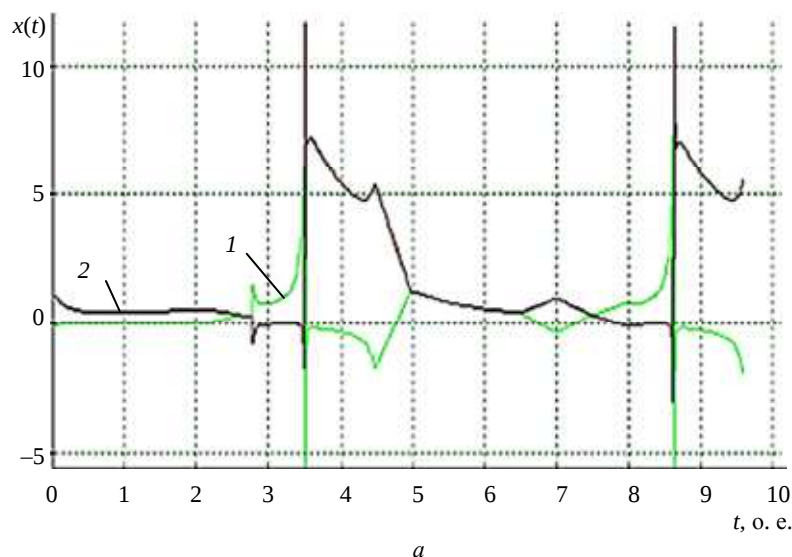


Рис. 3

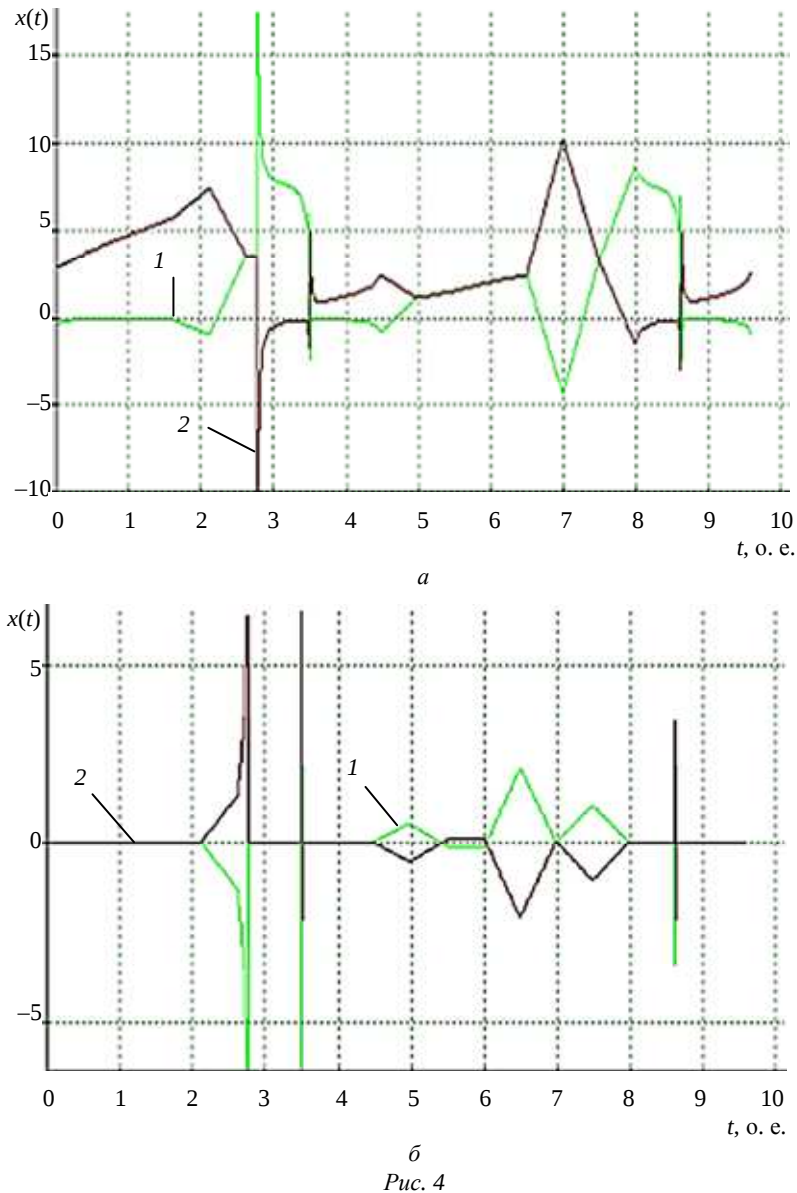


Рис. 4

мые приближенные значения $R_{1,0}$ и $R_{2,0}$ искомым решений в начале текущего шага. В свою очередь, в соответствии с формулами (9), (10) эти собственные числа затем напрямую определяют динамические показатели $R_{l,i}$ искомым решений в конце текущего шага расчета. Таким образом, в пределах каждого шага расчета управление показателями решений, а значит и нестационарным показателем «жесткости» K осуществляется посредством внутренних координатно-параметрических соотношений самого уравнения (16). Эти внутренние соотношения через показатели $R_{l,i}$ решений $x_r(t)$, $r = 1, 2$ напрямую зависят от собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби, определяющих показатель «жесткости» K . Иначе говоря, «жесткость», как качественная особенность нели-

нейной динамики цепи, обусловлена характером причинно-следственных соотношений, определяемых структурой и параметрами уравнения (16), однако, обладая всеми признаками адаптивного управления, показатели «жесткости» непосредственно и управляют характером этих соотношений.

Рассматривая в заданном интервале исследования $[0-10]$ изменение нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби, в качестве интегральной характеристики такого изменения можно принять систему двух взаимосвязанных функций относительно независимой переменной t . Для последующих рассуждений необходимо отметить одну принципиальную особенность этих функций: они обладают свойствами, которые однозначно соответ-

ствуют проявляемым в существующем устойчивом предельном цикле особенностям динамики решений уравнения (16). Одним из признаков такого соответствия служит качественная особенность этих функций, выражающаяся в чередовании действительных и комплексных областей их допустимых значений. Чередование характера возможных значений этих функций в устойчивом предельном цикле, объективно отражая специфику динамических свойств искомых решений, обуславливает возможность выделения необходимого информационного показателя для анализа условий возникновения бифуркации Хопфа в электрической цепи, описываемой уравнением (16). В качестве такого информационного показателя можно рассматривать существование ограниченных интервалов времени, в пределах которых множество допустимых значений функций, описывающих изменение нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$, определяется множеством действительных чисел. Для уравнения (16) факт существования или отсутствия таких интервалов времени служит индикатором бифуркационного соотношения параметров: $B = A^2 + 1$.

Характер поведения нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби, описанный взаимосвязью, определяемой формулами (9), (10) и равенствами (11)–(13), направленным образом обуславливает динамику полученных в результате декомпозиции по этим числам составляющих $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ каждого из искомых решений $x_l(t)$ уравнения (16). В интервалах времени $[0 \dots 2.5]$ и $[4 \dots 6.5]$, когда, как видно на рис. 1, 3, 4, решения изменяются медленно, составляющие $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ каждого из искомых решений $x_l(t)$ обладают вещественными и мнимыми частями и в сумме, согласно равенству (12), $N = 2$, $l = 1, 2$, определяют качественное содержание и приближенные значения $x_l^+(t_k; I_l)$ этих решений. Численные значения составляющих $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ искомых решений $x_l(t)$ таковы, что их вклад в вычисляемые на каждом шаге расчета приближенные значения решений $x_l^+(t_k; I_l)$ почти одинаков. Иначе говоря, в интервалах медленного изменения искомых решений влияние составляю-

щих $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ на формирование динамических показателей решений почти одинаково, доминирование какой-либо из них отсутствует.

В интервалах времени [3–4] и [7–8], когда, как видно на рис. 1, 3, 4, искомые решения уравнения (16), изменяются достаточно быстро, составляющие $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ этих решений, за исключением сравнительно малой окрестности точек смены знака вещественных частей собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби, обладают вещественными частями. Такой характер численного содержания составляющих $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ решений $x_l(t)$

полностью соответствует характеру динамики нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби, как видно на рис. 2. Анализируя характер влияния и взаимодействия составляющих решений $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ на формирование показателей динамики решений $x_l(t)$, представляющих результат суммирования этих составляющих, отметим явно выраженный признак доминирования одной составляющей над другой. Это доминирование для каждого из искомых решений проявляется по-своему. Для первого из решений $x_1(t)$, как видно на рис. 3, в интервалах его быстрого изменения явно доминирует вторая составляющая $x_1^{[2]}(t)$.

Для второго решения $x_2(t)$, как видно на рис. 4, картина иная: доминирует то первая составляющая $x_2^{[1]}(t)$, то вторая $-x_2^{[2]}(t)$. Обобщая сказанное, заключаем, что качественным признаком существования устойчивого предельного цикла служит наличие интервалов времени, в которых влияние составляющих декомпозиции $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ на показатели решений $x_l(t)$, $l = 1, 2$ не равноценно – одна из составляющих явно доминирует над другой.

Далее на рис. 5–8 приведены результаты расчета динамики рассматриваемой нелинейной автономной цепи в случае, когда в уравнении (16) параметры $A = 2$, $B = 5$. Предначальные условия, интервал исследования и предельный уровень абсолютной локальной погрешности расчета те же, что и для рассмотренного случая $A = 2$, $B = 6$. На рис. 5 приведены приближенные решения уравнения (16) при $A = 2$, $B = 5$.

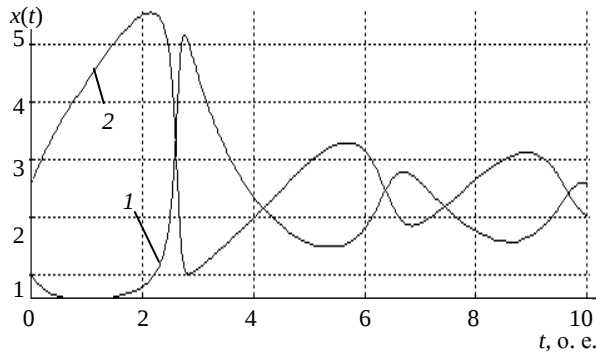
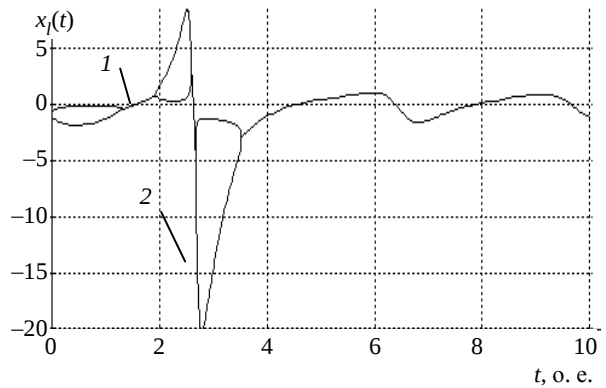
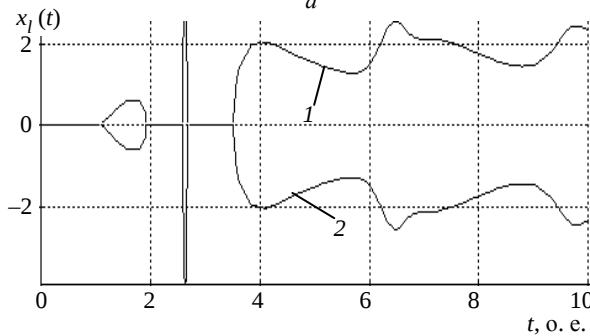


Рис. 5

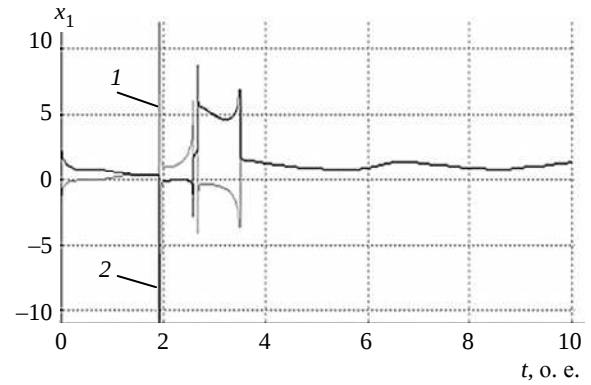


a

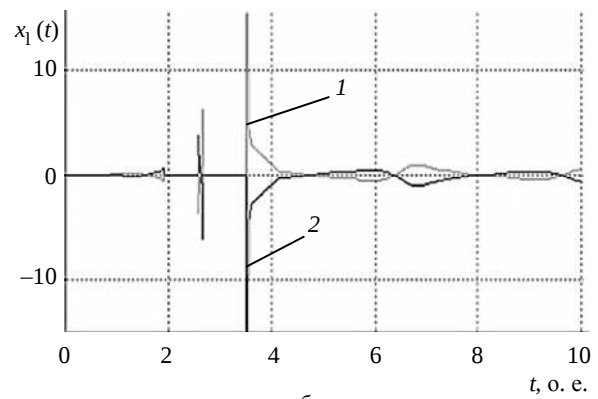


б
Рис. 6

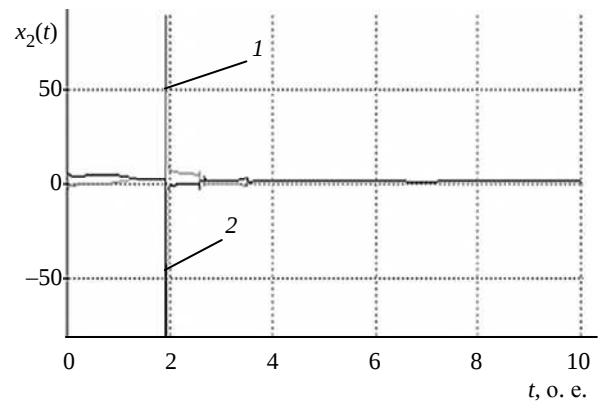
Как видно на рис. 5, вследствие выполнения при $A = 2$ и $B = 5$ условия $B = A^2 + 1$ действительно возникает бифуркация Хопфа, когда устойчивый предельный цикл, существование которого определяет условие $B > (A^2 + 1)$, переходит в устойчивую стационарную точку решения с показателями: $x_1(t) = A$; $x_2(t) = B/A$. Качественное изменение характера динамики цепи вследствие такой бифуркации находит свое отражение, как видно на рис. 6–8, и в изменениях характерных свойств динамики нестационарных собственных чисел функциональной матрицы Якоби λ_n , $n = 1, 2$, и в описываемых равенствами (13) при $l = 1, 2$ и $n = 1, 2$ двух составляющих $x_l^{[n]}(t)$ каждого из искомых решений $x_l(t)$.



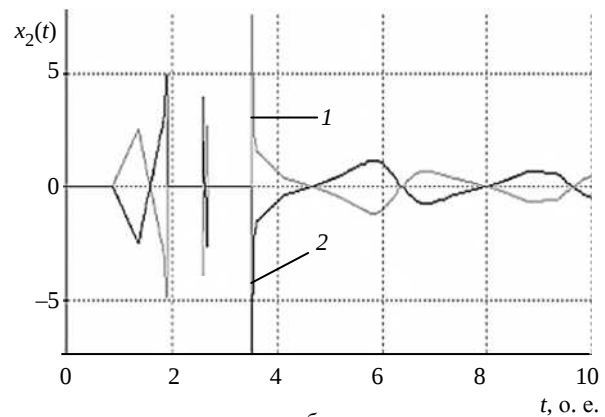
a



б
Рис. 7



a



б
Рис. 8

На рис. 6 представлены графики изменения вещественных (а: линия 1 – $\text{Re}(\lambda[1])$, линия 2 – $\text{Re}(\lambda[2])$) и мнимых (б: линия 1 – $\text{Im}(\lambda[1])$, линия 2 – $\text{Im}(\lambda[2])$) частей собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби уравнения (16) при $A = 2$ и $B = 5$. Как видно на рис. 6, после момента времени $t = 3.5$ собственные числа функциональной матрицы Якоби λ_n , $n = 1, 2$ имеют исключительно комплексный характер. Согласно рис. 2, в устойчивом предельном цикле эти собственные числа принимают как комплексные, так и действительные значения. Следовательно, информативным показателем бифуркации Хопфа, вызванной переходом искомых решений $x_l(t)$, $l = 1, 2$ уравнения (16) от устойчивого предельного цикла ($A = 2$, $B = 6$) к устойчивой стационарной точке ($A = 2$, $B = 5$), служит исключение после непродолжительного переходного процесса, действительных чисел из областей значений функций, описывающих динамику нестационарных собственных чисел λ_n , $n = 1, 2$, функциональной матрицы Якоби.

Как видно на рис. 5, в результате бифуркации из состава характерных свойств искомого решения уравнения (16) исчезает «жесткость». Существование этой особенности в устойчивом предельном цикле, при $A = 2$, $B = 6$, неразрывно связано с чередованием областей действительных и комплексных значений нестационарных собственных чисел функциональной матрицы Якоби λ_n , $n = 1, 2$. В устойчивой стационарной точке решения уравнения (16), при $A = 2$ и $B = 5$, вследствие изменения внутренних координатно-параметрических взаимосвязей этого уравнения исчезает ключевое для существования «жесткости» чередование интервалов времени, в которых нестационарные собственные числа λ_n , $n = 1, 2$ то действительные, то комплексные. Таким образом, исчезновение «жесткости» из состава характерных особенностей искомых решений уравнения (16) можно рассматривать как еще один информационный показатель бифуркации Хопфа.

На рис. 7 показана динамика вещественных (а: линия 1 – $\text{Re}(x_1(t) \rightarrow R[1](0))$, линия 2 – $\text{Re}(x_2(t) \rightarrow R[2](0))$) и мнимых (б: линия 1 – $\text{Im}(x_1(t) \rightarrow R[1](0))$, линия 2 – $\text{Im}(x_2(t) \rightarrow R[2](0))$) частей

частей двух составляющих (13), $N = 2$, $l = 1$ искомого решения $x_1(t)$ уравнения (16) при $A = 2$, $B = 5$, на рис. 8 – искомого решения $x_2(t)$.

Во взаимосвязи с отмеченными особенностями представляет интерес изменение в бифуркации Хопфа характера взаимодействия составляющих $x_l^{[n]}(t)$, $l = 1, 2$, $n = 1, 2$ искомым решений $x_l(t)$ уравнения (16), соответствующих собственным числам λ_n , $n = 1, 2$ функциональной матрицы Якоби. Сравнение и анализ результатов расчета, представленных на рис. 3, 4 и рис. 7 и 8, показывает, что одним из условий перехода от устойчивого предельного цикла решения ($A = 2$, $B = 6$) к устойчивой стационарной точке ($A = 2$, $B = 5$) служит качественное изменение характера взаимодействия составляющих $x_l^{[n]}(t)$, $l = 1, 2$, $n = 1, 2$ искомым решений $x_l(t)$, соответствующих собственным числам функциональной матрицы Якоби λ_n , $n = 1, 2$. В устойчивом предельном цикле решения характерно наличие интервалов времени, в которых влияние составляющих декомпозиции $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ на динамические показатели решений $x_l(t)$, $l = 1, 2$ сопряжено с доминированием одной составляющей над другой. Рис. 7 и 8 указывают на отсутствие такой качественной особенности для случая устойчивой стационарной точки решения. Как видно из рис. 7 и 8, после непродолжительного переходного процесса качественной особенностью динамики цепи служит полное равенство значений и совпадение форм вещественных и мнимых частей составляющих декомпозиции $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ для каждого из искомым решений $x_l(t)$. Таким образом, информативным показателем бифуркации Хопфа, вызванной переходом искомых решений $x_l(t)$, $l = 1, 2$ уравнения (16) от устойчивого предельного цикла ($A = 2$, $B = 6$) к устойчивой стационарной точке ($A = 2$, $B = 5$), служит исключение какого-либо доминирования среди составляющих $x_l^{[n]}(t)$, $n = 1, 2$, $l = 1, 2$ при формировании динамических показателей искомым решений $x_l(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л. В., Матханов П. Н., Филиппов Е. С. Теория нелинейных электрических цепей. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.

2. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 423 с.

3. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
4. Хайер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / пер. с англ. И. А. Кульчицкой, С. С. Филиппова под ред. С. С. Филиппова. М.: Мир, 1990. 512 с.
5. Слабый хаос и квазирегулярные структуры / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников. М.: Наука, 1991. 240 с.
6. Егоренков Д. Л., Фрадков А. Л., Харламов В. Ю. Основы математического моделирования с примерами на языке MATLAB / Изд-во БГТУ. СПб., 1996. 192 с.
7. Андриевский Б. Р. Анализ систем в пространстве состояний / ИПМаш РАН. СПб., 1997. 206 с.
8. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
9. Бычков Ю. А., Щербаков С. В. Аналитическо-численный метод расчета динамических систем. 2-е изд., доп. СПб.: Энергоатомиздат. С.-Петербург. отд-ние, 2002. 368 с.
10. Бычков Ю. А., Щербаков С. В. Аналитический и численный расчет детерминированных нелинейных моделей динамических систем с сосредоточенными и распределенными нестационарными параметрами: 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. 388 с.

Yu. A. Bychkov,
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

S. V. Scherbakov
Committee of Pskov Region on organization of public procurement

THE ANALYSIS OF THE QUALITY FEATURES OF THE DYNAMICS IN NON-AUTONOMOUS NONLINEAR ELECTRIC CIRCUITS BY USING EIGENVALUES OF THE FUNCTIONAL JACOBI MATRIX

In the article the algorithm of the research qualitative characteristics and properties of the dynamics of nonlinear nonautonomous electrical circuits with lumped parameters. The algorithm is based on the decomposition of the regular components of the desired solutions of the equations of the dynamics of such circuits on their own numbers of the functional Jacobian matrix and the subsequent allocation of the relationships between the properties of the circuit and information indicative of the results of such decomposition. The procedure for finding the solutions generated using the computational scheme of the analytical and numerical method. Analytical-numerical method belongs to the class of single-step methods, variable order, and its computational procedure consists of two parts. The analytical part is based on the apparatus of generalized functions, generalized Laplace transform and functional power series. The basis of the numerical part of the principle of analytic continuation of the solution and the procedure for selecting the desired step of the calculation and order method.

Electric circuit, nonlinear dynamics, numerical method, the step of the calculation, the error in the calculation, the decomposition of the desired solution, the Jacobian matrix, the dynamic properties of the circuit

УДК 621.313

М. А. Ваганов, И. И. Скобеев, С. А. Селим
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Синхронный реактивный двигатель при учете активного сопротивления обмотки статора

Рассматривается математическая модель трехфазного синхронного реактивного двигателя с учетом активного сопротивления обмотки статора. Даны выражения для тока обмотки статора, потребляемой активной и электромагнитной мощностей, а также электромагнитного момента двигателя.

Синхронный реактивный двигатель, активное сопротивление обмотки статора, составляющие электромагнитного момента, критический угол нагрузки, максимальный электромагнитный момент, электрический КПД статора

В синхронных реактивных двигателях (СРД), как и в обычных синхронных явнополусных двигателях с возбуждением [1], активное сопротив-

ление обмотки статора r_1 значительно меньше синхронных индуктивных сопротивлений по продольной x_d и поперечной x_q осям. Поэтому в