УДК 621.396.67

Л. М. Любина, А. Ю. Одинцов, М. И. Сугак
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Вывод соотношения Чу–Маклина методом интегрирования по сфере конечного радиуса

Представлен новый способ вывода известного соотношения Чу–Маклина, связывающего радиус сферы, описанной вокруг антенны электрически малых размеров и предельно-достижимой добротности. Вывод отличается простотой и основан на вычислении потока вектора Умова–Пойнтинга через сферу конечного радиуса и на формировании добротности, как отношения мнимой и вещественной его частей.

Электрически малая антенна, добротность, сфера единичного радиуса, соотношение Чу–Маклина

Связь предельно достижимой добротности и радиуса описанной вокруг антенны сферы имеет фундаментальное значение в теории электрически малых антенн [1], [2]. Вывод этого соотношения базируется на разложении поля по сферическим функциям или на интегрировании плотности энергии по некоторому объему, как это сделано в работах [1], [2]. До некоторой степени затруднением для широкого изучения этого важнейшего положения теории антенн является определенная громоздкость математических выкладок. В данной работе представлен вывод соотношений Чу–Маклина, основанный на интегрировании потока вектора Умова–Пойнтинга (ВУП) по замкнутой поверхности сферы конечного радиуса [3]. Такой подход представляет интерес по следующим соображениям: во-первых, он дает возможность взглянуть на важное физическое ограничение с другой точки зрения и лучше понять характер влияния ближних реактивных полей на полосу рабочих частот электрически малых антенн, во-вторых, он существенно проще.

Обычно в теории антенн пользуются интегрированием по сфере бесконечного радиуса, окружающей антенну, при вычисления мощности и сопротивления излучения (для элементарных излучателей или симметричного вибратора с синусоидальным распределением тока). Заметим, что в этом случае можно было бы воспользоваться любой замкнутой поверхностью, поскольку в соответствии с законом сохранения энергии мощность излучения останется неизменной, однако интегрирование по сфере бесконечного радиуса позволяет существенно упростить выкладки, так как в этом случае выражения для полей существенно упрощаются. В данном случае поток ВУП вычисляется через сферу конечного радиуса, в этом случае поток будет иметь комплексный характер с мнимой частью, принципиально зависящей от радиуса сферы. Очевидно, что мнимая часть потока, соответствующая реактивной мощности, запасенной вблизи антенны, будет тем больше, чем меньше радиус сферы.

Следуя методике Маклина, окружим диполь Герца (ДГ) сферой радиуса a (см. рисунок). Можно считать безграничное свободное пространство разбитым на два объема: внутренний, ограниченный сферой (объем V_0), и внешний, соответствующий объему всего пространства за вычетом объема сферы (объем V). Из теоремы Умова–Пойтинга в комплексном виде для внутреннего объема V_0, если пренебрегать тепловыми потерями, следует стандартная формулировка [4], [5]:

$$\oint_S \frac{\left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right]}{2}d\mathbf{s}+\frac{i\omega}{2}\int_{V_0}\left(\mu|\mathbf{H}|^2-\varepsilon|\mathbf{E}|^2\right)dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{V_0}\left(-\mathbf{J}\times\mathbf{E}\right)dv.$$

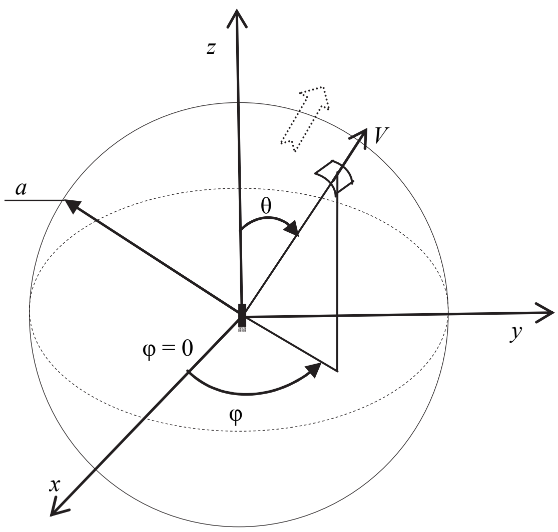
В этой записи интеграл, стоящий в правой части, соответствует мощности, отбираемой от источника. Для внешнего объема V, учитывая противоположное направление нормали к поверхности, ограничивающей внешний объем, принимая во внимание отсутствие токов и взяв только мнимую часть, можно записать:

$$-\mathrm{Im}\oint_S \frac{\left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right]}{2}ds+\frac{\omega}{2}\int_V\left(\mu|\mathbf{H}|^2-\varepsilon|\mathbf{E}|^2\right)dv=0. \quad (1)$$

В этом выражении первый интеграл имеет смысл реактивной мощности, выходящей из внутреннего объема во внешний, а интеграл по объему соответствует запасенной во внешнем объеме V реактивной мощности. При стремлении радиуса сферы к бесконечности обе части соотношения (1) дают нуль.

Вещественная часть интеграла по поверхности соответствует мощности излучения, которая не зависит от радиуса сферы:

$$P_r = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_S \left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right] ds.$$



Соотношение запасенной реактивной и активной мощностей определяет добротность антенны. Заметим, что в выражении (1) можно выделить запасенную магнитную и электрическую составляющие, с существенным преобладанием электрической компоненты для малых дипольных антенн. Таким образом, в этом случае добротность системы можно записать как отношение (2).

$$Q = \frac{\omega\int_V \varepsilon\left|\mathbf{E}\right|^2 dv}{\operatorname{Re}\oint_S \left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right] ds}, \tag{2}$$

$$Q = \frac{\omega\int_V \mu\left|\mathbf{H}\right|^2 dv}{\operatorname{Re}\oint_S [\mathbf{E},\mathbf{H}^*] ds}. \tag{3}$$

Для малых магнитных антенн ситуация противоположная – в ближнем поле преобладает магнитная компонента запасенной мощности и для добротности справедливо соотношение (3). Непосредственное вычисление по формуле (2), приводящее к вычислению объемного интеграла, реализовано в работе Маклина [2]. Вместе с тем, электрическую составляющую запасенной в пространстве реактивной мощности (главным образом, в непосредственной близости от антенны) можно найти и через интеграл по поверхности, используя соотношение (1). Действительно, пренебрегая реактивной магнитной составляющей мощности, можно записать:

$$\frac{\omega}{2}\int_V \varepsilon\left|\mathbf{E}\right|^2 dv = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\oint_S \left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right] ds + \frac{\omega}{2}\int_V \mu\left|\mathbf{H}\right|^2 dv \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\oint_S \left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right] ds.$$

Исходя из этого равенства, в выражении для добротности электрически малых антенн дипольного типа (2) можно заменить объемный интеграл на интеграл по поверхности с учетом знака:

$$Q \approx \frac{-\operatorname{Im}\oint_S \left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right] ds}{\operatorname{Re}\oint_S \left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right] ds}. \tag{4}$$

Таким образом, добротность может быть оценена исключительно на основе вычисления потока ВУП через сферу конечного радиуса.

Перейдем к непосредственному вычислению по формуле (4), учитывая выражения для компонент поля ДГ в сферической системе координат [4]:

$$E_\theta = \frac{Il}{4\pi\, i\omega\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r}\left(-k^2 + \frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta;$$

$$E_r = \frac{Il}{4\pi\, i\omega\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta; \tag{5}$$

$$H_\varphi(\theta, r) = \frac{Il}{4\pi}\sin\theta\left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-ikr}.$$

Используя приведенные выражения полей ДГ (5), запишем радиальную компоненту ВУП:

$$S_r(r,\theta) = \frac{E_\theta H_\varphi^*}{2} = \frac{(Il)^2\sin^2\theta}{32\pi^2}\left(\frac{k^3}{\omega\varepsilon r^2} + \frac{-i}{\omega\varepsilon r^5}\right). \tag{6}$$

Поток ВУП через сферу конечного радиуса a, исходя из формулы (6), имеет вид:

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_r(r=a,\theta) r^2 \theta d\,\varphi \sin(\theta d) =$$

$$= \frac{(Il)^2}{12\pi}\left(\frac{k^3}{\omega\varepsilon} + \frac{-i}{\omega\varepsilon a^3}\right). \tag{7}$$

В результате, ориентируясь на вычисление добротности по формуле (4), имеем:

$$Q = \frac{-\operatorname{Im}(P)}{\operatorname{Re}(P)} = \frac{1}{(ka)^3}. \qquad (8)$$

Формула (8) совпадает с результатом, полученным в работе [1] существенно более сложным образом. В то же время, использование интегрирования по сфере конечного радиуса фактически весь вывод позволяет свести к формулам (6) и (7).

Вместе с тем, формула (8) немного отличается от оценки, полученной в работе Маклина [2]:

$$Q = \frac{1}{ka} + \frac{1}{(ka)^3}. \qquad (9)$$

Разумеется, для малых ka разница между выражениями (8) и (9) ничтожна. Отличие объясняется тем, что мнимая часть потока в (4) содержит энергию как электрической, так и магнитной частей поля, а определение добротности требует вычисления отношения только одной составляющей (для диполей – электрической, для рамок – магнитной).

Покажем, что при более аккуратной записи реактивной запасенной энергии выражение (9) получается при применении данной методики совершенно точно. Заметим, прежде всего, что полная плотность магнитной энергии, включающей в себя активную и реактивную, в соответствии с работами [2], [4], равна

$$w_m = \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}\mathbf{H}^* = \mu\frac{|Il|^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2}\right)\sin^2\theta. \qquad (10)$$

При этом реактивная плотность энергии получается отбрасыванием в формуле (10) члена, содержащего зависимость r^2 в знаменателе:

$$w'_m(\mathbf{r}) = w_m(\mathbf{r}) - w_{m\,\mathrm{rad}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu|Il|^2\sin^2\theta}{32\pi^2 r^4}. \qquad (11)$$

Соответственно, реактивная мощность магнитного поля с учетом выражения (11) равна

$$P'_m = \omega\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} w'_m(\mathbf{r})\, r^2 dr\, d\theta\, d\varphi\, \sin\theta = \frac{\omega\mu(Il)^2}{12\pi a}.$$

С учетом того, что из равенства (1) следует более точное, нежели используемое при выводе формулы (4) условие:

$$\frac{\omega}{2}\int_V \varepsilon|\mathbf{E}|^2\, dv = -\operatorname{Im}\oint_S \frac{\left[\mathbf{E},\mathbf{H}^*\right]}{2} ds + \frac{\omega}{2}\int_V \left(\mu|\mathbf{H}|^2\right) dv,$$

формулу (2) можно переписать более точно.

Скорректированное выражение для электрической составляющей реактивной мощности примет следующий вид:

$$\frac{\omega}{2}\int_V \varepsilon|\mathbf{E}|^2\, dv = \frac{(Il)^2}{12\pi}\left(\frac{1}{\omega\varepsilon a^3} + \frac{\omega\mu}{a}\right).$$

С учетом мощности излучения выражение для добротности антенны, вписанной в сферу радиуса a, приобретает вид:

$$Q_s = \frac{\dfrac{(Il)^2}{12\pi}\left(\dfrac{1}{\omega\varepsilon a^3} + \dfrac{\omega\mu}{a}\right)}{\dfrac{(Il)^2}{12\pi}\left(\dfrac{k^3}{\omega\varepsilon}\right)} = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka}. \qquad (12)$$

Как видим, полученное выражение (12) точно совпадает с формулой (9), при этом удается избежать вычисления интеграла по объему от плотности электрической энергии, которое выполнялось в работе [2].

Таким образом, показано, что соотношение Чу–Маклина можно вывести на основе вычисления потока вектора Умова–Пойнтинга через сферу конечного радиуса, что существенно проще, чем известные способы, основанные на интегрировании по объему или на разложении по сферическим гармоникам.

Предложенная методика может быть рекомендована для использования в учебных курсах соответствующих специальностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chu L. J. Physical limitations on omni-directional antennas / J. Appl. Phys. 1948. Vol. 19. P. 1163–1175.

2. Mc Lean J. S. A re-examination of the fundamental limits on the radiation Q of electrically small antennas // IEEE Trans. Ant. Prop. 1996. Vol. 44, № 5. P. 672–676.

3. Одинцов А. Ю., Сугак М. И. Оценка добротности электрически малых антенн методом интегрирования по замкнутой поверхности // 69-я науч.-техн. конф., посв. Дню радио. Тр. конф. НТОРЭС 17–25 апр. 2014. СПб.: ООО «АСТ», 2014. С. 15–16.

4. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны: учеб. для студентов радиотехнических специальностей вузов. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Энергия, 1975. 528 с., ил.

5. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 664 с.

L. M. Liubina, A. Yu. Odintsov, M. I. Sugak
Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

CHU–MCLEAN RELATION BY INTEGRATION OF THE FINITE SPHERE

Presented a new method of deriving the well-known relation Chu–McLean binding radius of the sphere around the electrically small antenna and maximum achievable quality factor. A derivation is simple and is based on the calculation of the flow Poynting vector through a sphere of finite radius and the formation of Q-factor, as the ratio of the real and imaginary part.

Electrically small antennas, Q-factor, unit sphere, ratio of Chu–McLean

УДК 621.396.9

Р. В. Волков, В. В. Севидов
Военная академия связи им. С. М. Буденного

А. О. Чемаров
ООО НПП «Новые технологии телекоммуникаций»

Точность геолокации разностно-дальномерным методом с использованием спутников-ретрансляторов на геостационарной орбите

Выделены перспективные направления применения геолокации. Показана необходимость разработки отечественных систем геолокации. Описан разностно-дальномерный метод геолокации. Обозначены основные факторы, влияющие на его точность. Проведено моделирование определения местоположения земных станций разностно-дальномерным методом геолокации, сформированы оценки точности для различных исходных данных. Приведена схема разработанного алгоритма и описана его работа по этапам. Сформулированы основные результаты исследований на основе разработанного алгоритма. Определены вопросы дальнейшего исследования.

Геолокация, спутник-ретранслятор, земная станция, комплекс радиомониторинга, определение местоположения, разностно-дальномерный метод, координатометрия, источник радиоизлучения

Существующие и перспективные системы спутниковой связи (ССС) обладают глобальностью доступа и огромной канальной и абонентской емкостью, что и предопределило их стремительное развитие за последние десятилетия. С помощью ССС возможно решение сложных для наземных систем задач в труднодоступных, малоосвоенных, малонаселенных регионах, а также на море по принципу «спутниковый мобильный радиосервис: глобально, всем и сразу» [1].

Попутно активно развиваются и сопутствующие радиосервисы, одним из которых выступает геолокация [2]. Под устоявшимся в научных и информационных изданиях термином «геолокация» (*англ.* geolocation – определение местоположения (ОМП) на поверхности Земли) в рамках данной статьи понимается ОМП земных станций (ЗС) ССС по радиоизлучениям, принятым комплексом радиомониторинга (КРМ) от спутников-ретрансляторов (СР).

Выделяют некоторые перспективные направления применения геолокации. Так, геолокация в ряде случаев сможет дублировать или даже замещать спутниковую радионавигационную систему ГЛОНАСС, международную спутниковую поисково-спасательную систему «Коспас-Сарсат». Геолокация позволит операторам-владельцам ССС предотвратить нелегитимное использования