

M. G. Kasyanenko, V. F. Matyuchov, M. A. Vaganov  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## APPROXIMATION OF MAGNETIZATION CURVES OF ELECTRICAL STEELS IN THE DESIGN OF ELECTRICAL MACHINES

*In the calculation of electrical machines DC and AC, as well as transformers, in some cases, there is a need to use the magnetization curves of materials that are used in the manufacture of magnetic systems of such devices. These magnetization curves in the relevant reference literature are usually given in graphical or tabular forms, which is not always convenient in practical work with them. For example, when calculating the magnetic circuit of Electromechanical devices or when calculating the magnetic losses in steel of similar devices, it is desirable to have analytical expressions, in particular, in the preparation of mathematical models describing the processes associated with the conversion of energy in Electromechanical converters. In this regard, there is a need for analytical approximation of magnetization curves, i. e. in obtaining analytical expressions quite accurately and at the same time quite simply, from a mathematical point of view, displaying these curves. In the simplest case, for the base of this approximation it is advisable to take any of the elementary or special functions in its graphical representation slightly different from the magnetization curve of the material.*

**Magnetization curve, approximation of magnetization curves, hyperbolic sine, approximating function, magnetomotive force of the tooth zone of Electromechanical devices**

---

УДК 004.032.26 + 004.896

М. П. Белов, Д. Х. Чан  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Интеллектуальный контроллер на основе нелинейного оптимального управления роботами-манипуляторами

*Представлен подход к управлению роботами-манипуляторами при наличии неопределенной динамики из-за неизвестной нагрузки. Используется оптимальный метод  $\theta$ -D, чтобы получить закон оптимального управления обратной связью, основанный на приближенном решении уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (Г-Я-Б) через процесс возмущения. Добавлены возмущения к функции критерия качества системы, чтобы обеспечить оптимальность и достичь глобальной стабильности. Регулируемые параметры в компонентах возмущения системы позволяют гибко регулировать производительность системы. Задача нелинейного оптимального управления была решена методом  $\theta$ -D, который обеспечивает приблизительное аналитическое решение обратной связи. Проанализирован структурный контроллер нейронной сети на основе уравнения Г-Я-Б. Проведена оценка метода обучения «Байесовская регрессия» для процесса обучения нейронной сети. Результаты моделирования показали, что интеллектуальный контроллер, построенный на основе нелинейного оптимального управления приводит робот-манипулятор в желаемое положение, обеспечивая критерий качества системы при больших вариациях нагрузки.*

### Оптимальный метод $\theta$ -D, интеллектуальный контроллер, искусственная нейронная сеть

Для синтеза контроллеров, которые обеспечивают заданные критерии качества для сложных систем, содержащих случайные возмущения, нелинейные компоненты – фрикционные элементы, нечувствительные области, упругости и т. п., требуется, чтобы контроллер был умным, способным к обучению и адаптивным. Интеллектуальные контроллеры, построенные на основе искус-

ственной нейронной сети (ИНС) и генетических алгоритмов (ГА), позволяют решать сложные задачи, которые не только адаптивны на алгоритмическом уровне, но и адаптивны к структуре процесса управления.

В системе управления многослойные ИНС выполняют функцию адаптивного управления. При структурировании в соответствии с объектом

управления и надлежащим образом обученные в соответствующем законе, ИНС создает оптимальный управляющий эффект (в смысле минимизации функции критерия качества). Когда процесс обучения завершен, т. е. функция критерия ИНС и функция критерия контроллера объекта совмещаются, или, другими словами, контроллер объекта точно аппроксимируется нейронной сетью. Построение интеллектуального контроллера на основе ИНС осуществляется в два этапа: синтез оптимального контроллера объекта для создания шаблонных данных; выбор структуры искусственной нейронной сети, методов обучения и проведения обучения ИНС в соответствии с шаблонными данными.

Чтобы получить закон оптимального управления обратной связью, используем метод  $\theta$ -D [1]. Решение уравнения Г-Я-Б может быть преобразовано в ряд алгебраических уравнений Ляпунова. При этом добавлен ряд возмущений к функции критерия качества системы, чтобы обеспечить оптимальность и достичь глобальной стабильности. Проанализирована структура ИНС на основе уравнения Г-Я-Б. Для процесса обучения ИНС применяется метод обучения «Байесовская регрессия». Результаты моделирования показали, что интеллектуальный контроллер построенный на основе нелинейного оптимального управления приводит робот-манипулятор в желаемое положение, обеспечивая критерий качества системы при больших вариациях нагрузки.

**Оптимальный метод  $\theta$ -D.** Этот метод упрощает процесс вычисления закона управления системой. Метод  $\theta$ -D основан на разложении возмущений системы в ряд. Члены ряда возмущений добавляются к функции критерия качества системы, чтобы компенсировать и устранить эффект возмущения системы и обеспечить стабильность замкнутой системы.

Рассмотрим объект управления, имеющий описание в виде

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (1)$$

где  $f(x)$  – матрица параметров объекта;  $B(x)$  – матрица параметров управления  $u$ .

Оптимальное решение этой задачи может быть получено путем решения дифференциального уравнения с частными производными уравнения Г-Я-Б:

$$V_x f(x) - \frac{1}{2} V_x^T B(x) R^{-1} B^T(x) V_x + \frac{1}{2} x^T Q x = 0,$$

где  $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $V(x) > 0$ ,  $V(0) = 0$ ;  $V$  – критерий качества;  $\tau$  – функция транспонирования матрицы.

Функция оценки качества линейного квадратичного регулятора

$$V(x) = \min \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

где  $Q, R$  – положительные определенные матрицы.

Сигнал управления на входе имеет вид [2]

$$u(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Функция оценки качества метода  $\theta$ -D имеет вид

$$V^D(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( x^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x + u^T R u \right) dt, \quad (2)$$

где  $\sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i$  – получено разложением ряда возмущений системы;  $\theta$  – скалярная величина и  $D_i$  –

матрица, выбираемые так, что  $Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i$  является полуположительным определением

$$\begin{aligned} V^D(x_0) &= \int_0^T \left[ Q^D(x) + u^T R u \right] dt x^T + \\ &+ \int_T^{\infty} \left[ Q^D(x) + u^T R u \right] dt = \\ &= \int_0^T \left[ Q^D(x) + u^T R u \right] dt + V^D[x(T)], \end{aligned}$$

где  $Q^D(x) = x^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\left\{ V^D \left[ x_0 - V^D / x(T) \right] \right\}}{T} &= \\ = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ Q^D(x) + u^T R u \right] dt, \end{aligned}$$

или в коротком виде:

$$\dot{V}^D = \left( V_x^D \right)^T [f(x) + B(x)u] = -Q^D(x) - u^T R u < 0,$$

и в этом случае управление системой имеет вид

$$\mathbf{u}(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T(x) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i \mathbf{x},$$

где  $\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i \mathbf{x}$ ;  $T_i$  – матрица интервалов

обучения.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[ A_0 + \theta \left( \frac{A(x)}{\theta} \right) \right] \mathbf{x} + \left[ B_0 + \theta \left( \frac{B(x)}{\theta} \right) \right] \mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $A_0, B_0$  – постоянные матрицы и управляемая пара.

Тогда решить уравнение (3) с критерием качества (2) можно, используя уравнение

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \left[ A_0 + \theta \left( \frac{A(x)}{\theta} \right) \right] \mathbf{x} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] \mathbf{x} - \\ & - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \left[ B_0 + \theta \left( \frac{B(x)}{\theta} \right) \right] \times \\ & \times R^{-1} \left[ B_0 + \theta \left( \frac{B(x)}{\theta} \right) \right]^T \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $T_i(x, \theta)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  – симметричная матрица, полученная решением рекурсивного алгоритма:

$$\begin{aligned} & T_0 A_0 + A_0^T T_0 - T_0 B_0 R^{-1} B_0^T T_0 + Q = 0; \quad (5) \\ & T_1 \left( A_0 - B_0 R^{-1} g_0^T T_0 \right) + \\ & + \left( A_0^T - T_0 B_0 R^{-1} B_0^T \right) T_1 = \\ & = -\frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_0}{\theta} + T_0 B_0 R^{-1} \frac{B^T(x)}{\theta} T_0 + \\ & + T_0 \frac{B(x)}{\theta} R^{-1} B_0^T T_0 - D_1; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_n \left( A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T T_0 \right) + \\ & + \left( A_0^T - T_0 B_0 R^{-1} B_0^T \right) T_n = \\ & = -\frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_{n-1}}{\theta} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-2} T_j \frac{B(x)}{\theta} R^{-1} \frac{B^T(x)}{\theta} T_{n-2-j} + \\ & + \sum_{j=0}^{n-2} T_j \left[ B_0 R^{-1} \frac{B^T(x)}{\theta} + \frac{B(x)}{\theta} R^{-1} B_0^T \right] T_{n-1-j} + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} T_j B_0 R^{-1} B_0^T T_{n-j} - D_n, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $g_0^T$  – матрица параметров рекурсивного алгоритма.

Из (5)–(7) видно, что управление зависит от переменного состояния  $A(x)$  в правой части. Это приведет к увеличению амплитуды управления системой, так как компоненты  $A(x)$  увеличатся и приведут к снижению стабильности системы. Чтобы уменьшить этот эффект, добавим компоненты возмущения в правые части (6), (7).  $D_i$  выбираются, как рекомендовано в [1]:

$$\begin{aligned} D_1 &= k_1 e^{-l_1 t} \left[ -\frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_0}{\theta} \right]; \\ D_2 &= k_2 e^{-l_2 t} \left[ -\frac{T_1 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_1}{\theta} + T_1 B_0 R^{-1} B_0^T T_1 \right]; \\ & \dots \\ D_n &= k_n e^{-l_n t} \left[ -\frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_{n-1}}{\theta} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n-1} T_j B_0 R^{-1} B_0^T T_{n-j} \right], \end{aligned}$$

где  $k_i > 0$ ,  $l_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – скалярные регулярные параметры.

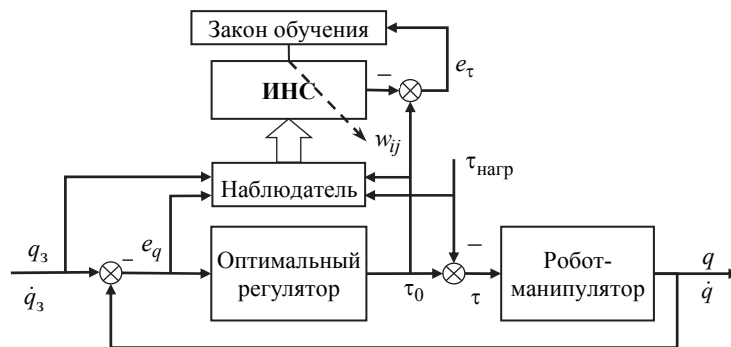


Рис. 1

**Интеллектуальный контроллер на основе оптимального метода  $\theta$ -D.** Для нахождения приближенного решения уравнения Г-Я-Б (4), которое используется для нахождения робастного оптимального управления роботами-манипуляторами, применим ИНС. На рис. 1 обозначены:  $q$  – обобщенная координата;  $e$  – ошибка;  $w_{ij}$  – весовые коэффициенты нейронного регулятора;  $\tau$  – параметр системы управления.

Пусть  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_m]^T$  – векторы ввода и вывода ИНС, и  $W = [w_1, w_2, \dots, w_L]^T$  – весовые матрицы; тогда реальные выходы ИНС описаны как  $\mathbf{y} = W^T \boldsymbol{\sigma}(x)$ , где  $\boldsymbol{\sigma}(x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_L(x)]^T$  – вектор функции активации ИНС. На структурной схеме ИНС на рис. 2  $g_i^j$  – активные функции скрытого и выходного слоев;  $b_i^j$  – входные и выходные весовые смещения,  $j = \overline{1, 2}$ ;  $i = \overline{1, 2, \dots, n}$ .

Предположим, что функция критерия качества системы, приближенная к ИНС, имеет вид

$$\hat{V}(x) = \sum_{j=1}^L w_j \sigma(x) = W^T \boldsymbol{\sigma}(x),$$

где  $L$  – число нейронов скрытого слоя;  $\boldsymbol{\sigma}(x)$  выбирается так, чтобы удовлетворять следующему условию:  $\hat{V}(0) = 0$  и  $\hat{V}(x) > 0, \forall x \neq 0$ .

Тогда имеем

$$\hat{V}_x(x) = \frac{\partial \hat{V}(x)}{\partial x} = \nabla \boldsymbol{\sigma}^T(x) W = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i \hat{\mathbf{x}},$$

где  $\nabla \boldsymbol{\sigma}(x) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x)}{\partial x}$  – функция Якоби активации, и (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & [\hat{V}_x(x)]^T f(x) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] \mathbf{x} - \\ & - [\hat{V}_x(x)]^T B(x) \times R^{-1} B(x)^T \hat{V}_x(x) = 0; \\ & [\nabla \boldsymbol{\sigma}^T(x) W] f(x) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] \mathbf{x} - \\ & - [\nabla \boldsymbol{\sigma}^T(x) W] B(x) \times R^{-1} B(x)^T [W^T \nabla \boldsymbol{\sigma}(x)] = 0. \end{aligned}$$

Управление системы (1) будет иметь вид

$$\mathbf{u}(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T(x) [\nabla \boldsymbol{\sigma}^T(x) W].$$

Уравнение Г-Я-Б, соответствующее ограниченному управлению, формулируется с использованием подходящего неквадратичного функционала [2]. Закон ограниченного оптимального управления имеет наибольшую область асимптотической устойчивости. Функция критерия качества Г-Я-Б определяется выбором из ряда функций, удовлетворяющих последовательности уравнений Ляпунова (УЛ). ИНС используется для аппроксимации функции критерия качества, связанной с каждым УЛ, с применением метода наименьших квадратов на четко определенной области начального стабилизирующего контроллера. По мере увеличения порядка ИНС решение наименьших квадратов уравнения Г-Я-Б равномерно сходится к точному решению нелинейного уравнения Г-Я-Б, связанного с входами управления. В результате получается почти оптимальное управление обратной связи с ограниченным состоянием, которое было настроено априори в автономном режиме. Весовые функции нейронных сетей будут настроены таким образом, чтобы минимизировать остаточную ошибку по наименьшему квадратичному критерию над множеством точек в

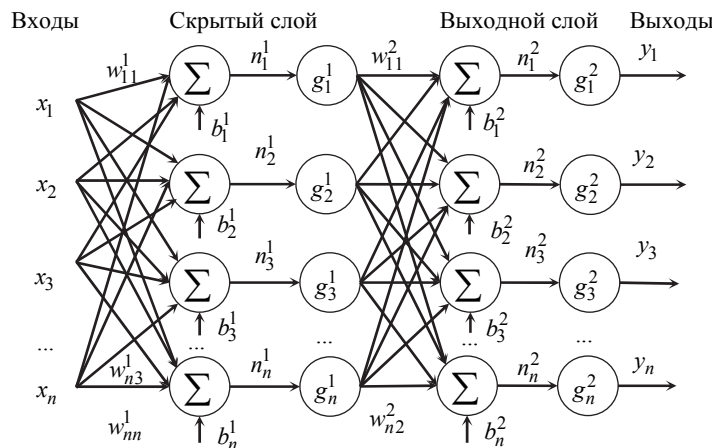


Рис. 2

области устойчивости начального стабилизирующего управления. Такое решение обеспечивает наименьшую остаточную ошибку по отношению к весовой функции ИНС:

$$\text{УЛ} \left( V^D(x) = \sum_{j=1}^L w_j \sigma_j(x, u) \right) = \mathbf{e}_L(x).$$

Чтобы найти решение наименьших квадратов, используется метод взвешенных остатков Финлэйсона [3]. Весовые функции  $\mathbf{W}_L$  определяются путем проецирования остаточной ошибки на  $\frac{d\mathbf{e}_L(x)}{d\mathbf{W}_L}$  и постановки результата на нуль  $\forall x \in \Omega$  с использованием внутреннего произведения, т. е.

$$\left\langle \frac{d\mathbf{e}_L(x)}{d\mathbf{W}_L}, \mathbf{e}_L(x) \right\rangle = 0,$$

где  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg \, dx$  – интеграл Лебесгу. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\langle \nabla_{\sigma} \left[ f(x) + B(x)u \right], \right. \\ & \left. \nabla_{\sigma} \left[ f(x) + B(x)u \right] \right\rangle W_L + \\ & + \left\langle \left( Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right) + 2 \int_0^u \left( \Phi^{-1}(v) \right)^T R \, dv, \right. \\ & \left. \nabla_{\sigma} \left[ f(x) + B(x)u \right] \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

где  $\Phi^{-1}(v) = [\varphi(v_1), \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_m)]$  – ограниченная взаимная однозначная функция и монотонная нечетная функция с ее первой производной, ограниченной константой  $M$ . Примером служит гиперболический тангенс  $\Phi(\cdot) = \tanh(\cdot)$  [4] или другие функции  $\text{tansig}(\cdot)$ ;  $\text{sigmoid}(\cdot)$ ; ...;

$$\begin{aligned} W_L = & \left\langle \nabla_{\sigma} \left[ f(x) + B(x)u \right], \right. \\ & \left. \nabla_{\sigma} \left[ f(x) + B(x)u \right] \right\rangle^{-1} \times \\ & \times \left\langle \left( Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right) + 2 \int_0^u \left( \Phi^{-1}(v) \right)^T R \, dv, \right. \\ & \left. \nabla_{\sigma} \left[ f(x) + B(x)u \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Приближение искусственной нейронной сети может быть улучшено с помощью метода градиентного спуска по ошибке:

$$\begin{aligned} \hat{V}^D(\hat{x}) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \hat{\mathbf{x}}^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_x \left\{ H \left[ \hat{V}(x), \mathbf{u}(x) \right] \right\}^2 dx. \end{aligned}$$

На  $t$ -м шаге алгоритм генерирует случайное состояние  $x_t$  (либо на границе, либо внутри пространства состояний), и выполняет стохастический градиентный спуск по уменьшающему направлению  $\left\{ H \left[ \hat{V}(x), \mathbf{u}(x) \right] \right\}^2$ . Это дает несмещенную оценку градиента с ограниченной дисперсией для ограниченных весовых функций, как при стандартном обратном распространении.

Предположим, что используется ИНС с одним скрытым слоем и  $n$  скрытыми нейронами (см. на рис. 2), выход которых

$$\hat{V}(x) = \sum_{j=1}^n w_j^2 \sigma \left( \sum_{i=0}^m w_{ij}^1 x_i \right),$$

где  $w_{ij}^1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$  – входные весовые функции;  $w_j^2$  – выходные весовые функции,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  – входные координаты;  $w_{0j}$  – весовые смещения;  $\sigma(x) = \text{tansig}(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1$  – сигмоидальная функция в виде гиперболического тангенса.

**Метод обучения байесовской регуляризации обратного распространения** (байесовская регрессия для процесса обучения ИНС). Рассмотрим следующую задачу восстановления регрессии: имеется выборка  $(X, t) = \{\mathbf{x}_i, t_i\}_{i=1}^n$ , где вектор признаков  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ , а целевая переменная  $t_i \in \mathbb{R}$ ; требуется для нового объекта  $x_*$  предсказать значение целевой переменной  $t_*$ .

Предположим, что  $t = f(\mathbf{x}) + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \sim N(\varepsilon | 0, \sigma^2)$ , а  $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m w_j \varphi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \Phi(\mathbf{x})$ .

Здесь  $\varphi_j$  – параметр системы управления;  $\mathbf{w}$  – набор числовых параметров, а  $\Phi(\mathbf{x})$  – вектор обобщенных признаков.

*Метод максимума правдоподобия (линейная регрессия)* [5], [6]. Поскольку шумовая компонента имеет независимое нормальное распределение,

то можно записать функцию правдоподобия обучающей выборки в виде

$$\begin{aligned} p(\mathbf{t} | X, \mathbf{w}) &= \prod_{i=1}^n N(t_i | f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}), \sigma^2) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{[t_i - \mathbf{w}^T \Phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n [t_i - \mathbf{w}^T \Phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

$t_i$  –  $i$ -е время.

Прологарифмировав эту функцию, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [t_i - \mathbf{w}^T \Phi(x_i)]^2 = \\ = -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{t} - \Phi \mathbf{w})^T (\mathbf{t} - \Phi \mathbf{w}) \rightarrow \max_{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

здесь  $\Phi = [\varphi(x_1)^T, \dots, \varphi(x_n)^T]^T$ .

Точка максимума правдоподобия записывается в явном виде:  $\mathbf{w}_{ML} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{t}$ .

*Оптимизация обоснованности.* Приравнявая к нулю производные обоснованности по  $\alpha$ ,  $\sigma^2$ , можно получить итерационные формулы для пересчета параметров:

$$\begin{aligned} \alpha_{i \text{ new}} &= \frac{\gamma_i}{w_{MP,i}^2}, \\ \gamma_i &= 1 - \alpha_{i \text{ old}} \sum_{ii}, \quad (\sigma^2)_{\text{new}} = \frac{\|\mathbf{t} - \Phi \mathbf{w}\|^2}{n - \sum_{i=1}^m \gamma_i}, \end{aligned}$$

где  $\sum = (\beta \Phi^T \Phi + A)^{-1}$ ,  $\mathbf{w}_{MP} = \beta \sum \Phi^T \mathbf{t}$ .

Параметр  $\gamma_i$  может интерпретироваться как степень, в которой соответствующий вес  $\mathbf{w}_i$  определяется данными или регуляризацией. Если  $\alpha_i$  велико, то вес  $\mathbf{w}_i$  существенно преопределен априорным распределением,  $\sum_{ii} \approx \alpha_i^{-1}$  и  $\gamma_i \approx 0$ . С другой стороны, для малых значений  $\alpha_i$  значение веса  $\mathbf{w}_i$  полностью определяется данными,  $\gamma_i \approx 1$ .

Алгоритм метода релевантных векторов для задачи регрессии:

**Вход.** Обучающая выборка  $\{x_i, t_i\}_{i=1}^n$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ ; матрица обобщенных признаков  $\Phi = \{\varphi_i(x_i)\}_{i,j=1}^{n,m}$ .

**Выход.** Набор весов  $\mathbf{w}$ , матрица  $\sum$  и оценка дисперсии шума  $\beta^{-1}$  для решающего правила  $t_*(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m w_j \varphi_j(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_*^2(\mathbf{x}) = \beta^{-1} + \Phi^T(\mathbf{x}) \sum \Phi(\mathbf{x})$ .

1. Инициализация:  $\alpha_i := 1, i = 1, \dots, m$ ,  $\beta := 1$ ; AlphaBound :=  $10^{12}$ ; WeightBound :=  $10^{-6}$ ; NumberOfIterations := 1000.

2. Для  $k = 1, \dots, \text{NumberOfIterations}$ .

3.  $A := \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

4.  $\sum = (\beta \Phi^T \Phi + A)^{-1}$ .

5.  $\mathbf{w}_{MP} = \beta \sum \Phi^T \mathbf{t}$ .

6. Для  $j = 1, \dots, m$ .

7. Если  $w_{MP,j} < \text{WeightBound}$

или  $\alpha_j > \text{AlphaBound}$ , то

8.  $w_{MP,j} = 0, \alpha_j = +\infty, \gamma_j := 0$ .

9. Иначе

10.  $\gamma_j := 1 - \alpha_j \sum_{jj}, \alpha_j := \frac{\gamma_j}{w_{MP,j}^2}$ .

11.  $\beta := \frac{n - \sum_{j=1}^m \gamma_j}{\|\mathbf{t} - \Phi \mathbf{w}_{MP}\|^2}$ .

**Модель динамической системы плоского двухзвенного робота-манипулятора (RR-манипулятор).** Уравнение Лагранжа, описывающее манипулятор, имеет вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) = \boldsymbol{\tau}, \quad (8)$$

где  $M(q)$  – матрица инерции;  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  – вектор центробежных и кориолисовых сил;  $F(\dot{q})$  – вектор сил трения;  $G(q)$  – вектор сил тяжести;  $\boldsymbol{\tau}$  – совокупность внешних сил, действующих на систему;  $q, \dot{q}$  – обобщенные координаты угла и угловой скорости манипулятора.

Уравнение (8) может быть записано в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = -M^{-1}(q)S(q, \dot{q})\dot{q} + M^{-1}(q)\boldsymbol{\tau},$$

где  $S(q, \dot{q})\dot{q} = C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q)$ .

Определим оценки неопределенностей в виде

$$0 < M_{\min}(q) \leq M(q) \leq M_0(q);$$

$$\|S(q, \dot{q}) - S_0(q, \dot{q})\| \leq \mathbf{s}_{\max}(q, \dot{q}); \quad \mathbf{s}_{\max}(0, 0) = 0.$$



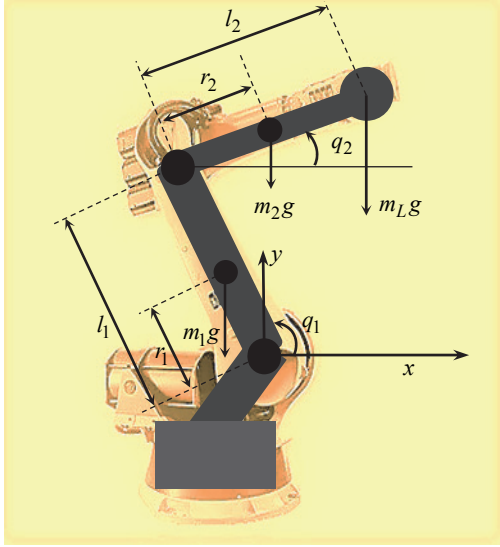


Рис. 3

Определяем переменные состояния:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}.$$

В качестве примера рассмотрим модель плоского двухзвенового робота-манипулятора на рис. 3.

Моменты приводов звеньев манипулятора описываются системой уравнений:

$$\begin{aligned} M_{11}(q_2) &= I_1 + I_2 + I_L + m_1 r_1^2 + \\ &+ m_2 [l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2 \cos(q_2)] + \\ &+ m_L [l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2)]; \\ M_{12}(q_2) &= M_{21}(q_2) = \\ &= I_2 + m_2 [r_2^2 + l_1 r_2 \cos(q_2)] + \\ &+ I_L + m_L [l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)]; \\ M_{22}(q_2) &= I_2 + m_2 r_2^2 + I_L + m_L l_2^2, \end{aligned}$$

где  $I_i = \frac{m_i l_i^2}{3}$  – инерция  $i$ -го звена;  $\mathbf{F}(\dot{q}) =$

$$= [b_1 \dot{q}_1 \quad b_2 \dot{q}_2]^T;$$

$$\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -l_1 (m_2 r_2 + m_L l_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin(q_2); \\ l_1 (m_2 r_2 + m_L l_2) \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{bmatrix}$$

– вектор центробежных и кориолисовых сил;

$$\mathbf{G}(q) = \begin{bmatrix} (m_1 r_1 + m_2 l_1) g \cos(q_1) + \\ + m_2 g r_2 \cos(q_1 + q_2) + \\ + m_L g l_2 \cos(q_1 + q_2); \\ m_2 g r_2 \cos[q_1 + q_2 + m_L g l_2 \cos(q_1 + q_2)] \end{bmatrix}$$

– вектор сил тяжести;  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$  – вектор внешних сил;

$$\begin{aligned} S(q, \dot{q}) &= \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{F}(\dot{q}) + \mathbf{G}(q) = \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 (m_2 r_2 + m_0 l_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin(q_2) + b_1 \dot{q}_1; \\ l_1 (m_2 r_2 + m_0 l_2) \dot{q}_1^2 \sin(q_2) + b_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$r_i$  – радиусы центральной массы  $i$ -го звена;  $b_i$  – коэффициенты трения звеньев;  $I_L, m_L$  – инерция и масса нагрузки;  $m_i, l_i$  – параметры звеньев,  $i = 1, 2$ ;  $g$  – ускорение свободного падения.

Неопределенность и другие свойства нагрузки приведут к изменениям в матрице инерции  $M(q)$  и динамике системы. Для включения этих неопределенностей в конструкцию управления, мы обозначим неизвестную нагрузку как  $\Delta m_L$ , фактическую нагрузку как  $m_L = m_0 + \Delta m_L$ .

Неопределенности, отраженные в  $M(x)$  и  $S(x)$  за счет  $\Delta m_L$ , обозначим, соответственно,  $\Delta M$  и  $\Delta S$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -(M + \Delta M)^{-1} (S + \Delta S) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ (M + \Delta M)^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} + d(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $d(x)$  – внешнее возмущение.

Пусть

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -M^{-1} S \end{bmatrix}; B(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ M^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) &= M \Delta M; D(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -M^{-1} \Delta S \end{bmatrix} \mathbf{x} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\Delta M^{-1} (S + \Delta S) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{d}(x). \end{aligned}$$

С неопределенностями и возмущениями уравнение состояния (9) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A(x)\mathbf{x} + B(x)\boldsymbol{\tau} + B(x)\mathbf{h}(x)\boldsymbol{\tau} + D(x).$$

Моделирование объекта производится с параметрами, представленными в табл. 1.

Таблица 1

| Параметр   | Значение             | Параметр               | Значение             |
|------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| $m_1$ , кг | 25                   | $J_2$ , Н·м            | $0.11 \cdot 10^{-3}$ |
| $m_2$ , кг | 18                   | $b_1$                  | $3.65 \cdot 10^{-3}$ |
| $l_1$ , м  | 1.0                  | $b_2$                  | $9.15 \cdot 10^{-3}$ |
| $l_2$ , м  | 0.5                  | $m_0$ , кг             | 10                   |
| $J_1$      | $0.44 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta m_L / m_0$ , % | 0–100                |

Структурная схема ИНС в среде Simulink представлена на рис. 4.

Значения структурных компонентов искусственной нейронной сети после обучения в соответствии с набором данных оптимального управления  $\theta$ -D:

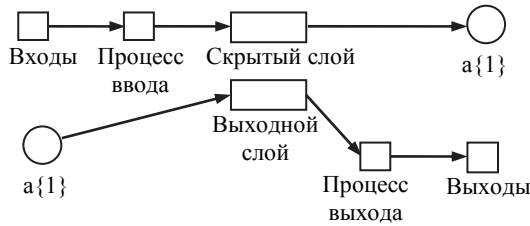


Рис. 4

Входы:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [\dot{q}_1 \ q_1 \ q_2 \ \Delta m_L \ \dot{q}_2]^T.$$

Входные весовые функции:

$$\mathbf{w}_{8 \times 5}^1 = \begin{bmatrix} 0.2384 & -0.3873 & -0.8221 & 0.0071 & 0.0724 \\ 0.2048 & -0.1105 & -0.0785 & 0.4486 & 0.0222 \\ 0.1362 & -0.1637 & 0.6854 & -0.0317 & 0.0981 \\ 0.3713 & 0.2955 & 0.0164 & -0.2336 & -0.2147 \\ -0.2377 & 0.2833 & -0.5721 & 0.2050 & -0.0022 \\ -0.3377 & -0.2124 & -0.1397 & -0.2763 & 0.2059 \\ 0.1705 & -0.2888 & -0.0007 & -0.4470 & 0.0307 \\ -0.1137 & 0.0321 & -0.0173 & 0.0002 & 0.2279 \end{bmatrix}.$$

Входные весовые смещения:

$$\mathbf{b}_{8 \times 1}^1 = \begin{bmatrix} -0.1473 \\ -0.7795 \\ 0.1305 \\ 0.8693 \\ -0.1386 \\ 0.8618 \\ 0.7735 \\ 0.0031 \end{bmatrix}.$$

Активные функции скрытого слоя:

$$g(n_{8 \times 1}^1) = \text{tansig} \left( \sum_{k=1}^8 w_{kj}^1 x_k + b_k^1 \right).$$

Выходные весовые функции:

$$\mathbf{w}_{2 \times 8}^2 = \begin{bmatrix} -0.0.6833 & -0.2.3117 & -0.0.9284 & -0.0.0608 & -0.0.1646 & 0.0395 & -0.2.3332 & 0.5764 \\ -0.0.0484 & -0.0.0549 & 0.0292 & 0.7184 & 0.0357 & -0.0.7195 & 0.0228 & -0.3.3313 \end{bmatrix}.$$

Выходные весовые смещения:

$$\mathbf{b}_{2 \times 1}^2 = \begin{bmatrix} 0.0592 \\ -0.0.0907 \end{bmatrix}.$$

Активные функции выходного слоя:

$$g(n_{2 \times 1}^2) = \text{purelin} \left[ \sum_{j=1}^2 w_{ji}^2 g(n_{8 \times 1}^1) + b_j^2 \right].$$

Выходы:  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ ;

$$y_i = g(n_{2 \times 1}^2) = \text{purelin} \left( \sum_{j=1}^8 w_{ji}^2 g(n_{8 \times 1}^1) + b_j^2 \right) = \text{purelin} \left[ \sum_{j=1}^2 w_{ji}^2 \text{tansig} \left( \sum_{k=1}^8 w_{kj}^1 x_k + b_k^1 \right) + b_j^2 \right].$$

**Результат экспериментального моделирования.** Модель RR-манипулятора моделируется в среде Matlab/Simulink с вводным сигналом управления в виде синусоидального вида: амплитуда 1.0 рад, период 5 рад/с. Возмущение нагрузки выбирается

случайным возмущением вида с фильтром нижних частот с параметрами  $K_\phi = 1.0$ ,  $T_\phi = 0.005$  с. Результаты моделирования показаны на рис. 5 – угол поворота ( $a$ ) и скорость поворота ( $b$ ) 1-го звена; рис. 6 – угол поворота ( $a$ ) и скорость поворота ( $b$ ) 2-го звена; рис. 7 – оптимальное управление с применением метода  $\theta$ -D для обучения ИНС (на рис. 7,  $a$  введены следующие обозначения: 1 – угловая скорость 1-го звена  $\omega_1$ , рад/с, 2 – возмущения нагрузки  $\tau_{\text{нагр}}$ , Н·м, 3 – угловая скорость 2-го звена  $\omega_2$ , рад/с, 4, 5 – ошибки углового положения 1-го  $e_1$ , 2-го  $e_2$  звеньев; на рис. 7,  $b$  – 6, 7 – выходные моменты 1-го  $M_1$  и 2-го  $M_2$  звеньев, Н·м).

На основе искусственной нейронной сети синтезируется интеллектуальный контроллер с

восемью нейронами в скрытом слое, с пятью входными состояниями манипулятора, в которых возмущение нагрузки как вход ИНС позволяет выбрать желаемый или случайный вид сигнала, фильтра нижних частот, два входа которого соответствуют желаемым моментам манипулятора. Входные и выходные данные построены с применением метода оптимального метода  $\theta$ -D, методики обучения байесовской регуляризации обратного распространения с экспериментальными вариантами. Результаты представлены в табл. 2.



Таблица 2

| Вариант обучения ИНС                    | В эпоху 200 | В эпоху 500 | В эпоху 1000 | В эпоху 10 000 |
|---|-------------|-------------|--------------|----------------|
| Лучшая тренировочная производительность | 4751.7287   | 19.8962     | 5.866        | 0.091963       |
| Градиент                                | 198274.6482 | 11067.1948  | 180330.1245  | 134.363        |
| Му                                      | 500         | 5000        | 500          | 5000           |
| gank                                    | 62.2267     | 65.9889     | 65.647       | 65.9904        |
| ssX                                     | 350.7570    | 1006.0433   | 4791.4954    | 20051.3257     |

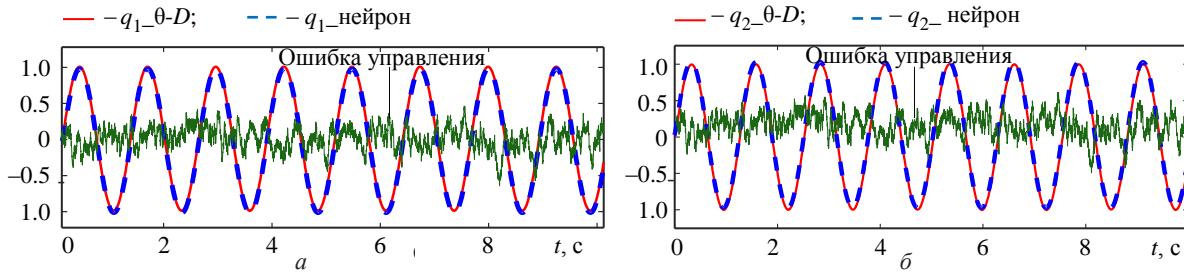


Рис. 5

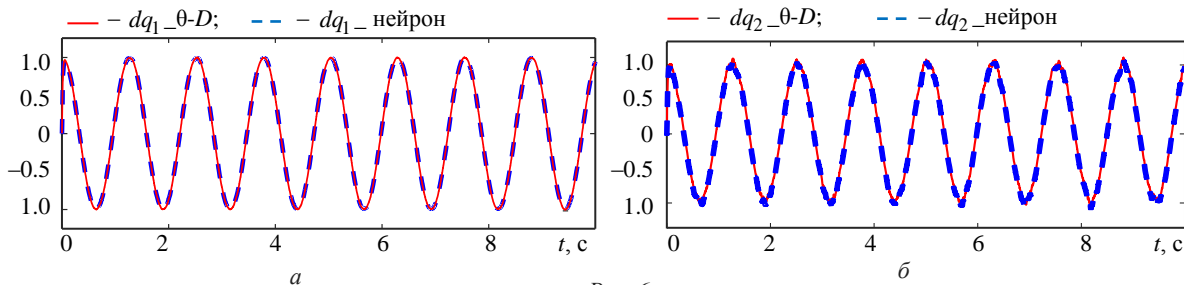


Рис. 6

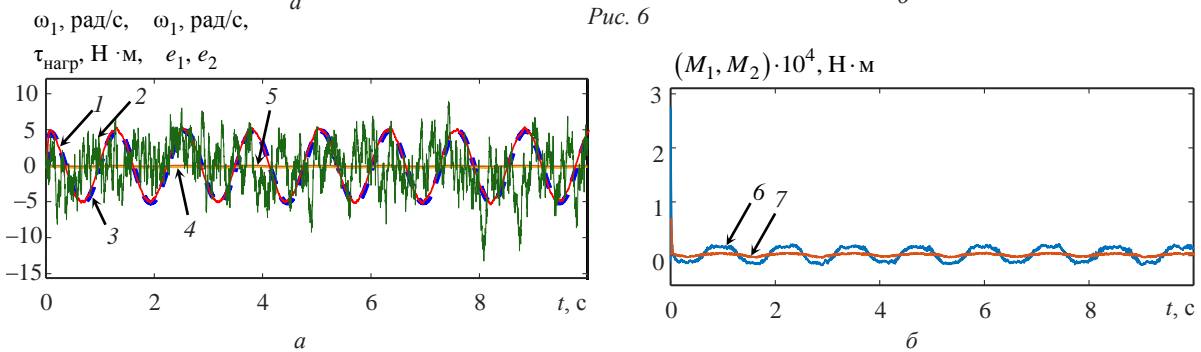


Рис. 7

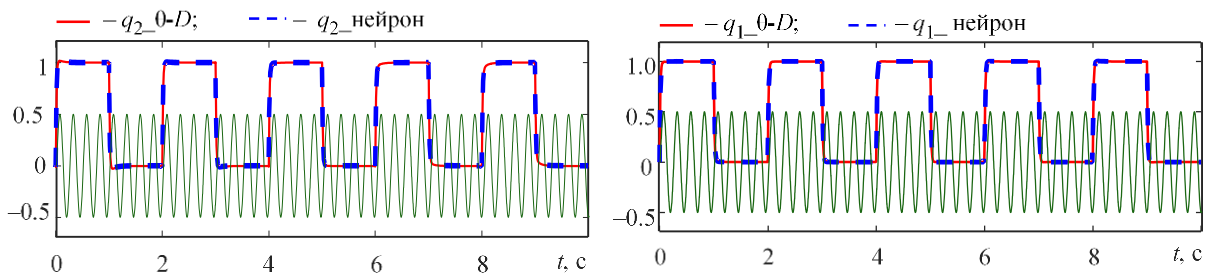


Рис. 8

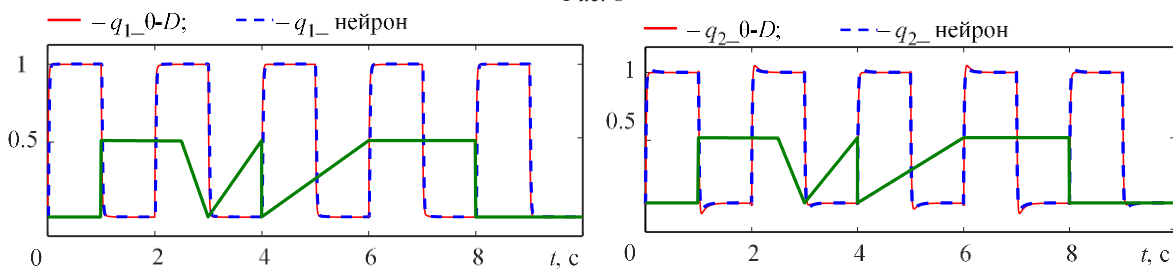


Рис. 9

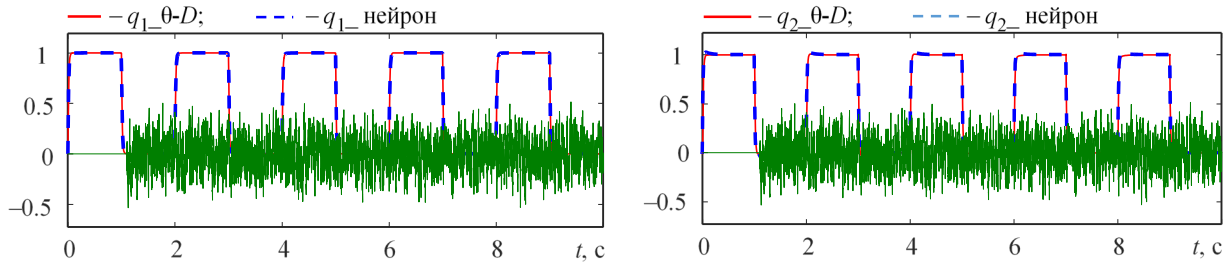


Рис. 10

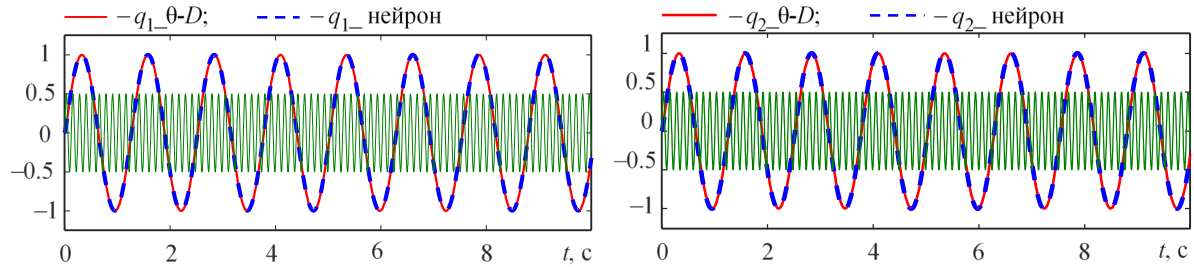


Рис. 11

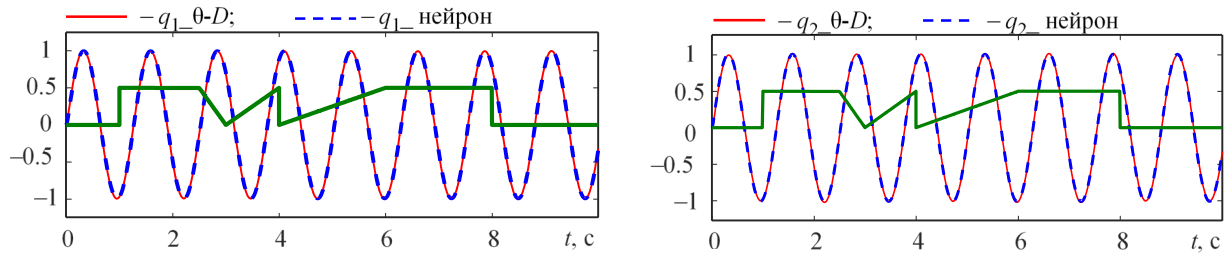


Рис. 12

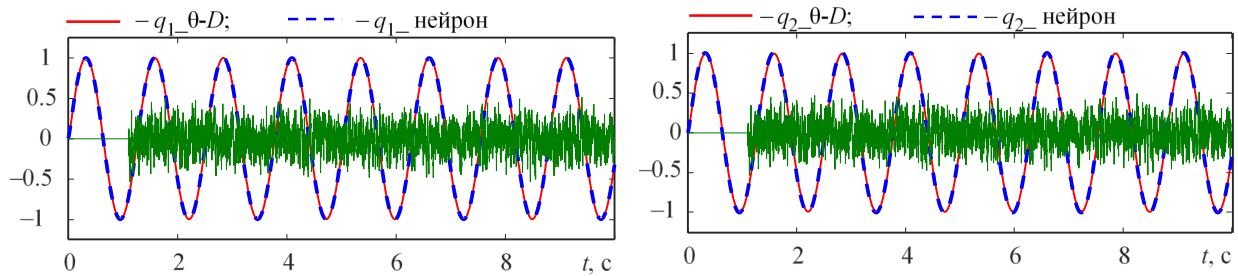


Рис. 13

**После обучения ИНС тестируется в следующих вариантах.** Вариант 1: сигналы ввода в виде квадратного импульса: амплитуда 1.0 рад, период 2 с. При возмущении нагрузки в синусоидальном виде с амплитудой 10 рад, частотой 25 рад/с на рис. 8. При возмущении нагрузки в линейном виде с амплитудой 10 на рис. 9. При возмущении нагрузки в случайном виде на рис. 10.

Вариант 2: сигналы ввода в синусоидальном виде: амплитуда 1.0 (рад), частотой (5 рад/с). При возмущении нагрузки в синусоидальном виде с амплитудой 10 и частотой (50 рад/с) на рис. 11. При возмущении нагрузки в линейном виде с ам-

плитудой 10 на рис. 12. При возмущении нагрузки в случайном виде на рис. 13. Результаты проведенных исследований показаны на рис. 8–13.

Результаты моделирования в среде Matlab/Simulink показывают, что интеллектуальный контроллер, основанный на искусственных нейронных сетях, полностью отвечает заданным критериям качества. Это показывает адаптивность интеллектуальных контроллеров к любому динамическому объекту. Качество и динамические характеристики контроллера зависят только от данных образца и метода обучения для ИНС.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xin M., Balakrishnan S. N. A new method for suboptimal control of a class of non-linear systems // Optimal Control Applications and Methods. 2005. Vol. 26.2. P. 55–83.

2. Lewis F. L., Abu-Khalaf M. A neural network solution for fixed-final time optimal control of nonlinear systems // Automatica. 2005. Vol. 41. P. 482–490.

3. Finlayson B. A. The method of weighted residuals and variational principles // SIAM. 2013. Vol. 73. P. 186–198.

4. Lyshevski S. E. Optimal control of nonlinear continuous-time systems: design of bounded controllers VIA generalized nonquadratic functionals // IEEE. 1998. Vol. 1. P. 205–209.

5. Шумский С. А. Байесова регуляризация обучения // Сб. лекций по нейроинформатике. Ч. 2. М.: МИФИ, 2002.

6. Kropotov D., Vetrov D. On one method of non-diagonal regularization in sparse Bayesian learning // Proc. of the 24<sup>th</sup> Intern. Conf. on Machine Learning, Corvallis, OR; United States, 2007. P. 457–464.

M. P. Belov, D. K. Tran  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## INTELLIGENT CONTROLLER BASED ON NONLINEAR OPTIMAL CONTROL OF ROBOTIC MANIPULATORS

*This paper presents a robust control approach for robot manipulators in the presence of uncertain dynamics due to the unknown load. The optimal method of  $\theta$ -D is used to obtain the law of optimal feedback control. The optimal method  $\theta$ -D is based on the approximate solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation (H-J-B) through the perturbation process. A part of disturbances is added to the system cost function to ensure optimality and achieve global stability. Adjustable parameters in the system disturbance components allow for flexible adjustment of the system performance. The synthesized problem of nonlinear optimal control was solved by the  $\theta$ -D method, which provides an approximate analytical feedback solution. The structural controller of the neural network was analyzed on the basis of the H-J-B equation. Bayesian regression method of training for the learning process of the neural network was estimated. The results of the simulation showed that the intelligent controller built on the basis of nonlinear optimal control leads the robot manipulator to the desired position, fully providing a criterion for system quality at large load variations.*

**Optimal method  $\theta$ -D, intelligent controller, artificial neural network**

УДК 62–52.001.24

Ю. А. Бычков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

С. В. Щербakov

Псковский государственный университет

## Алгоритм расчета установившихся периодических режимов в линейных автономных электрических цепях на основе интегрального преобразования Лапласа и взаимосвязи коэффициентов степенных и тригонометрических рядов

*Предлагается алгоритм расчета установившегося периодического режима в линейных электрических цепях с сосредоточенными стационарными параметрами. Расчетная схема алгоритма определяет возможность рассмотрения одновременно всех гармоник периодического внешнего воздействия, описываемого тригонометрическим многочленом. Алгоритм основан на формировании изображений по Лапласу искомого решения уравнения динамики цепи и последующем разложении изображений регулярных составляющих решений в ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычисленные на основе коэффициентов рядов Лорана коэффициенты рядов Тейлора для регулярных составляющих решений разделяют на две составные части, одна из которых соответствует свободной, а другая – вынужденной составляющим реакции цепи. Используя «уравнения взаимосвязи» между известными коэффициентами рядов Тейлора и показателями гармоник тригонометрических многочленов для периодических вынужденных составляющих реакций цепи, вычисляют амплитудные и фазовые показатели гармоник этих составляющих.*

**Электрическая цепь, реакция цепи, уравнения динамики цепи, установившийся периодический режим, преобразование Лапласа, ряд Лорана, ряд Тейлора, тригонометрический многочлен, амплитудные и фазовые показатели гармоник**

**Постановка задачи.** Расчет установившегося периодического режима в линейных электриче-

ских цепях с сосредоточенными стационарными параметрами, определяя электротехническую ос-