



УДК 004:621.3.087.92

Э. П. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Исследование свойств нелинейности сравнивающих функций в приложениях

Исследуется влияние нелинейных свойств сравнивающих устройств (СУ) на метрологические характеристики аналого-цифровых преобразователей (АЦП) при отсутствии и воздействии помех. Подробное исследование этого влияния проведено на двух типах АЦП – следящем и считывания. Доказано, что наличие гистерезисных свойств СУ приводит к повышению помехоустойчивости алгоритмов АЦП относительно воздействия на входной сигнал аддитивной помехи. Показано, что существует оптимальное значение зоны нечувствительности СУ (ϵ) относительно размера кванта, при котором достигается наибольший эффект подавления помехи. Сравнительная оценка влияния вида сравнивающей функции, реализуемой в СУ, на динамику уравнивающей величины в условиях воздействия помех выполнена аналитическими методами нелинейной динамики и подтверждена результатами имитационного моделирования для гауссовой помехи. Методами имитационного моделирования для гауссовой помехи показано, что погрешность АЦП считывания существенно превышает соответствующую погрешность АЦП следящего типа.

Сравнивающие функции, нелинейность, аналитическое описание, методические погрешности, алгоритмы аналого-цифрового преобразования

Исходные сведения и постановка задачи. Сравнивающие функции (СФ) относятся к классу существенно нелинейных функций, так как конечным результатом их применения являются значения, по которым между двумя величинами фиксируются отношения «больше», «меньше» или «эквивалентно». Близки к ним по назначению также пороговые функции, результатом применения которых становится фиксация отношений «больше» или «эквивалентно». Обычно в средствах измерения понятие СФ фактически объединяет обе указанные разновидности функций. Эти функции (их целесообразно отнести к отдельно выделенному классу СФ) отличаются от близких к ним функций, определяющих помимо названных отношений и количественную оценку отношений «больше» или «меньше», указывая на изменение количественных оценок в зависимости от значений этих отношений. По данному признаку последние, более разнообразные по виду, СФ можно отнести к так называемым расширенным СФ. Эти СФ, широко используемые в

устройствах автоматики и иных устройствах (см. [1], [2]), предназначенных для вероятностной обработки информации, несут дополнительную информацию о результатах сравнения, поэтому их можно отнести также к классу дискриминантных функций, применяемых в дискриминантном анализе [3] в виде правил различения – например, в задачах дискриминантного анализа случайных величин, описываемых двумя различающимися по установленным параметрам функциями распределения вероятностей. Как СФ, так и расширенные СФ в соответствии с [2] аналитически могут быть получены в результате дифференцирования так называемых функций потерь, которые формируются при решении, например, задач идентификации систем в соответствии с критерием качества идентификации [2]. В свою очередь, критерии качества, которые используются в решении технических задач, выделяются по признакам, характерным для введенных в математике функций расстояния или меры [4]. При этом задача идентификации систем, в отличие от процедуры измере-

ния, – это задача определения математической модели структуры и значений параметров системы по результатам, наблюдаемым в ходе измерения выходных сигналов идентифицируемой системы и подстраиваемой к ней ее модели при подаче на их входы априорно заданных сигналов.

С учетом обширного применения АЦП и существенной зависимости их метрологических характеристик от свойств и вида входящих в них типов сравнивающих устройств (СУ), реализующих СФ входного сигнала с априорно заданным опорным сигналом, представляет интерес исследование влияния выбора вида СФ и схемы СУ на метрологические характеристики АЦП при отсутствии и воздействии помех. С целью подробного исследования этого влияния для анализа выбраны два простейших типа АЦП – следящий и считывания, алгоритмы функционирования которых достаточно подробно описаны в [5] и отличаются видом используемых СФ. Полученные результаты могут быть распространены и на другие типы АЦП, включая и сигма-дельта АЦП.

Графическое описание различных вариантов сравнивающих функций. В измерениях СФ реализуются схематично представленные на рис. 1 СУ, применяемые по своему прямому назначению в аналого-цифровых измерительных системах, к которым относятся и АЦП. На рис. 1 введены следующие обозначения: $\xi(t)$ – случайно изменяющаяся помеха или шум; E – постоянный сигнал или постоянная составляющая; E_0 – априорно известный регулируемый в соответствии с установленным алгоритмом опорный сигнал, определяющий уровень ограничения; $y(t)$ – выходной сигнал СУ, различные варианты графиков которых приведены на рис. 2; УС (управляющий сигнал) – сигнал, управляющий моментом считывания результата сравнения сигналов, поступающих на входы СУ.

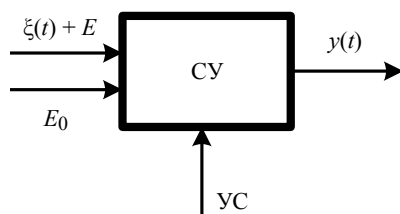


Рис. 1

Применение различных модификаций СФ, в том числе в виде пороговой или индикаторной функции, распространено еще шире. В частности,

в алгоритмах автоматической фрагментации электрофизиологических сигналов, при всем многообразии используемой цепочки промежуточных преобразований сигнала [6], в конечном счете при выборе решения без применения пороговой функции не обойтись. Техническая реализация электронными средствами СФ и их модификаций в виде знаковых – $\text{sign}(\xi + V)$ и пороговых (индикаторных) – $h(\xi + V)$ функций, где $V = E - E_0$, порождает различные варианты реализации электронных СУ с СФ (рис. 2).

Приведенные на рис. 2 графики различных модификаций СФ при отсутствии и наличии зон нечувствительности ϵ , ϵ_1 и ϵ_2 являются идеализацией реальных выходных сигналов СУ, так как ни одно техническое средство реализации СФ не может осуществить перепады с бесконечной производной, а это значит, что реальные СУ будут реагировать на результат сравнения входных сигналов с определенной задержкой по сравнению с идеальными графиками, иллюстрирующими динамику перепадов выходного сигнала $y(t)$ в соответствии с рис. 2. Дальнейшие исследования проводятся преимущественно аналитическими методами на базе теории вероятностей [7] и теории нелинейных систем [8] применительно к отмеченным модификациям алгоритмов АЦП. Для наглядного представления с целью аналитического описания СФ в соответствии с рис. 2, д, т. е. для наиболее сложного случая, но на упрощенном примере синусоидального входного сигнала, на рис. 3 выделены временные интервалы, в пределах которых выполняются указанные на рис. 2 события.

События, представленные на втором графике (рис. 3), определяют вид и динамику выходного сигнала СУ $y(t)$, который принимает три значения в моменты времени, когда происходит изменение событий в соответствии с динамикой входного сигнала СУ $\xi(t)$ и вида нелинейности СФ, в зависимости от превышения или не превышения входным сигналом $\xi(t)$ установленного значения сигнала на втором входе СУ, равного нулю (рис. 1).

Аналитическое описание различных вариантов сравнивающих функций. Ориентируясь на графики, приведенные на рис. 2, а также руководствуясь графической и аналитической информацией, показанной на рис. 3, представим аналитическое описание вариантов СФ, реализуемой в идеале в СУ (рис. 1), и их выходных сигналов при условии, что $V = E - E_0 = 0$, в виде

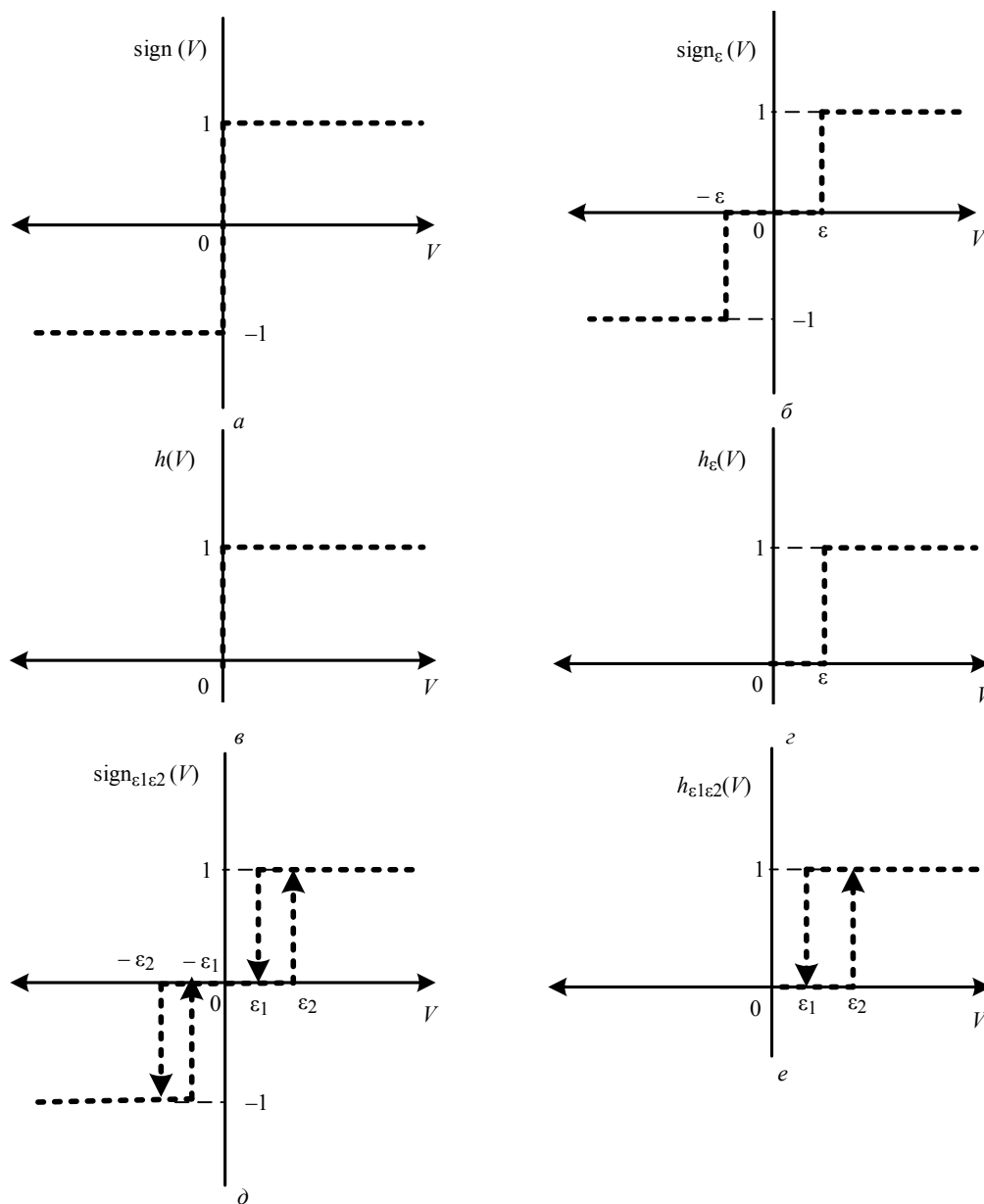


Рис. 2

• для a –

$$\text{sign}(\xi - V)_{V=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > 0, \\ 0 & \text{при } \xi = 0, \\ -1 & \text{при } \xi < 0; \end{cases}$$

• для $б$ –

$$\text{sign}_\epsilon(\xi - V)_{V=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > \epsilon, \\ 0 & \text{при } -\epsilon \geq \xi \geq \epsilon, \\ -1 & \text{при } \xi < -\epsilon; \end{cases}$$

• для $в$ –

$$h(\xi - V)_{V=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0; \end{cases}$$

• для $з$ –

$$h_\epsilon(\xi - V)_{V=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq \epsilon, \\ 0 & \text{при } \xi < \epsilon; \end{cases}$$

• для $г$ –

$$\begin{aligned} \text{sign}_{\epsilon_1 \epsilon_2}(\xi - V)_{V=0} = & \\ = & \begin{cases} 1 & \text{при } [\xi(t) > \epsilon_2 \cap \xi'(t) > 0] \cup \\ & \cup [\xi(t) > \epsilon_1 \cap \xi'(t) < 0], \\ -1 & \text{при } [-\xi(t) < -\epsilon_1 \cap \xi'(t) < 0] \cup \\ & \cup [-\xi(t) < -\epsilon_2 \cap \xi'(t) > 0], \\ 0 & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

где $\cap$ и $\cup$ определяют логические операции И и ИЛИ, а $\xi'(t)$ – производную от $\xi(t)$;

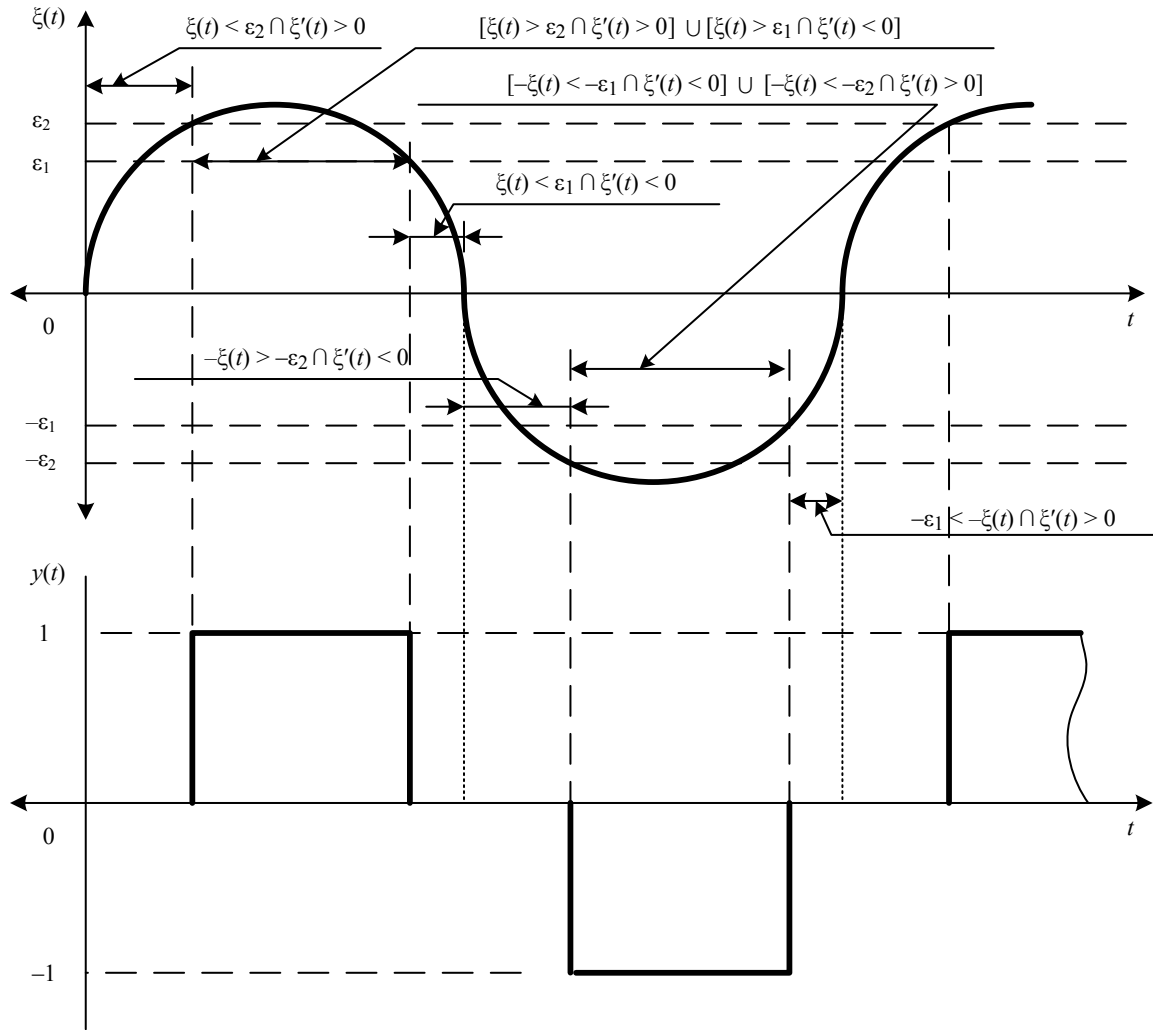


Рис. 3

• для e –

$$h_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) = \begin{cases} 1 & \text{при } [\xi(t) > \varepsilon_2 \cap \xi'(t) > 0] \cup \\ & \cup [\xi(t) > \varepsilon_1 \cap \xi'(t) < 0], \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

В квадратных скобках формул для d и e указаны события для случаев, когда в момент превышения или непревышения входным сигналом $\xi(t)$ фиксированных уровней ε_1 и ε_2 производные по времени от этого сигнала имеют положительные или отрицательные значения соответственно. Иначе говоря, для случаев d и e (рис. 2) выходные сигналы СУ принимают соответствующие значения при условии совпадения двух событий, указанных в вышеприведенных формулах, что и определяет гистерезисные свойства СУ.

Вероятностное описание различных вариантов СФ. Как следует из вышеприведенного аналитического описания вариантов СФ, вероятность появления указанных событий будет соот-

ветствовать вероятности появления на выходе СУ значений выходного сигнала $y(t)$, представляющих собой дискретную случайную величину, принимающую значения в соответствии с графиками на рис. 2. Зная распределение вероятностей этих случайных величин, можно найти для них моменты любого порядка в соответствии с известными формулами определения моментов дискретных случайных величин [7]. С учетом вероятности превышения и непревышения входным сигналом E и помехой ξ соответствующих пороговых значений E_0 математическое ожидание (МО) для каждого из приведенного вида СФ определяется в соответствии с формулами a – g в виде:

• для a –

$$M_{\xi}\{\text{sign}(\xi - V)\} = 1 [1 - F_{\xi}(V)] + (-1) F_{\xi}(V) = 1 - 2 F_{\xi}(V),$$

где $M_{\xi}\{\dots\}$ – в данной и нижеприведенных формулах оператор определения МО для дискретной

случайной величины, принимающей значения единицы, минус единицы или нуля; $F_{\xi}(V) =$

$$= \int_{-\infty}^V w(\xi) d\xi - \text{функция распределения вероятностей (ФРВ), равная вероятности того, что случайная величина } \xi \text{ превысит уровень порога, равного } x, \text{ причем для } V = 0 \text{ и симметричной ФРВ выполняется равенство:}$$

$$M_{\xi} \{ \text{sign}(V) \}_{V=0} = 0;$$

• для б –

$$M_{\xi} \{ \text{sign}_{\varepsilon}(\xi - V) \}_{V=\pm\varepsilon} = 1 - F_{\xi}(\varepsilon) - F_{\xi}(-\varepsilon);$$

или для симметричной ФРВ: $M \{ \text{sign}_{\varepsilon}(\dots) \}_{V=\pm\varepsilon} =$

$$= 1 - 2F_{\xi}(\varepsilon), \text{ где } F_{\xi}(V)_{V=\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\varepsilon} w(\xi) d\xi;$$

• для в –

$$M_{\xi} \{ h(\xi - V) \} = 1 - F_{\xi}(V)$$

и симметричной ФРВ получаем:

$$M_{\xi} \{ h(\xi - V) \}_{V=0} = 1 - F_{\xi}(0) = 0.5;$$

• для г –

$$M_{\xi} \{ h_{\varepsilon}(\xi - V) \}_{V=\varepsilon} = 1 - F_{\xi}(\varepsilon);$$

• для д –

$$M_{\xi} \{ \text{sign}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) \}_{V=0} = \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \int_0^{\infty} w(\xi, \xi') d\xi d\xi' + \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 w(\xi, \xi') d\xi d\xi' - \int_{-\infty}^{-\varepsilon_2} \int_{-\infty}^0 w(\xi, \xi') d\xi d\xi' - \int_{-\infty}^{-\varepsilon_1} \int_0^{\infty} w(\xi, \xi') d\xi d\xi',$$

• для е –

$$M_{\xi} \{ h_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) \}_{V=0} = \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \int_0^{\infty} w(\xi, \xi') d\xi d\xi' + \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 w(\xi, \xi') d\xi d\xi',$$

где $w(\xi, \xi')$ – совместная плотность распределения вероятностей (ПРВ) случайной величины $\xi(t)$ и ее производной $\dot{\xi}(t)$ в наблюдаемый момент времени случайно изменяющегося сигнала или шума.

Известно [9], что случайная величина и ее производные для помехи, зафиксированные в один и тот же момент времени, не коррелированы, а для гауссовского случайного процесса – независимы. Вследствие этого, а также с учетом вышеуказанного определения ФРВ получаем (зависимость от времени t для упрощения записи не указывается):

• для д –

$$M_{\xi \xi'} \{ \text{sign}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) \}_{V=\varepsilon_1, \varepsilon_2} = [1 - F_{\xi}(\varepsilon_1) - F_{\xi}(-\varepsilon_2)] [1 - F_{\xi'}(0)] + [1 - F_{\xi}(\varepsilon_1) - F_{\xi}(-\varepsilon_2)] F_{\xi'}(0)$$

или для симметричной ФРВ:

$$M_{\xi \xi'} \{ \text{sign}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) \}_{V=\varepsilon_1, \varepsilon_2} = [1 - F_{\xi}(\varepsilon_1) - F_{\xi}(\varepsilon_2)];$$

• для е –

$$M_{\xi \xi'} \{ h_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) \}_{V=\varepsilon_1, \varepsilon_2} = [1 - F_{\xi}(\varepsilon_2)] [1 - F_{\xi'}(0)] + [1 - F_{\xi}(\varepsilon_1)] F_{\xi'}(0)$$

или для симметричной ФРВ:

$$M_{\xi \xi'} \{ h_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\xi - V) \}_{V=\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 1 - 0.5 [F_{\xi}(\varepsilon_1) + F_{\xi}(\varepsilon_2)].$$

Из приведенных формул следует, что рассмотренные варианты формул, описывающих СФ, представляют частные случаи последних двух формул.

При проведении дальнейших исследований определим в том же порядке средние квадраты (СК) выходного сигнала СУ. Для вариантов СУ с СФ, представленными на рис. 2, а и б, СК выходного сигнала соответственно равны:

• для а –

$$M \{ \text{sign}^2(V) \} = 1 \text{ для любого значения } V;$$

• для б –

$$M_{\xi} \{ \text{sign}_{\varepsilon}^2(\xi - V) \} = 1 - F_{\xi}(V + \varepsilon) + F_{\xi}(V - \varepsilon),$$

$$M_{\xi} \{ \text{sign}_{\varepsilon}^2(\xi - V) \}_{V=0} = 1 - F_{\xi}(\varepsilon) + F_{\xi}(-\varepsilon)$$

и только для симметричной ФРВ при $V = 0$ имеем

$$M \{ \text{sign}_{\varepsilon}^2(\xi - V) \}_{V=0} = 1;$$

• для в –

$$M_{\xi} \{ h^2(\xi - V) \}_{V=0} = 1 - F_{\xi}(0)$$

и симметричной ФРВ $M_{\xi} \{ h^2(\xi - V) \}_{V=0} = 0.5;$

• для г –

$$M_{\xi} \{ h_{\varepsilon}^2(\xi - V) \}_{V=\varepsilon} = M_{\xi} \{ h_{\varepsilon}(\xi - V) \}_{V=\varepsilon} = 1 - F_{\xi}(\varepsilon);$$

- для δ –

$$M_{\xi\xi'} \left\{ \text{sign}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^2 (\xi - V) \right\}_{V \neq 0} = \\ = [1 - F_{\xi}(V + \varepsilon_2) + F_{\xi}(V - \varepsilon_1)] [1 - F_{\xi'}(0)] \times \\ \times [1 - F_{\xi}(V + \varepsilon_1) + F_{\xi}(V - \varepsilon_2)] F_{\xi'}(0);$$

для $V = 0$ и симметричной ФРВ имеем:

$$M_{\xi} \left\{ \text{sign}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^2 (\xi - V) \right\}_{V=0} = 1 - [F_{\xi}(\varepsilon_2) - F_{\xi}(\varepsilon_1)];$$

- для e и симметричной ФРВ –

$$M_{\xi\xi'} \left\{ h_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^2 (\xi - V) \right\}_{V=0} = M_{\xi\xi'} \left\{ h_{\varepsilon_1\varepsilon_2} (\xi - V) \right\}_{V=0} = \\ = 1 - 0.5 [F_{\xi}(\varepsilon_1) + F_{\xi}(\varepsilon_2)].$$

Дисперсию D_{ξ} для всех рассмотренных случаев можно вычислить по известной [7] формуле

$$D_{\xi} \{ \varphi(V) \} = M_{\xi} \{ \varphi^2(V) \} - [M_{\xi} \{ \varphi(V) \}]^2,$$

где $\varphi(V)$ – обобщенная функция сравнения, принимающая конкретный вид в зависимости от используемого СУ.

Вероятностное описание свойств выходного сигнала СУ, реализующих рассматриваемые варианты СФ, позволяет перейти к анализу динамики уравнивающей величины для установленных ранее типов алгоритмов АЦП при воздействии помех. Очевидно, что динамика уравнивающей величины непосредственно связана с процессом измерения, и поэтому ее свойства использованы при исследовании метрологических характеристик различных типов АЦП в условиях воздействия помех и особенностей СУ, приведенных на рис. 1.

Исследование влияния вида сравнивающей функции на динамику отклонения уравнивающей величины от входного сигнала в условиях воздействия помех. Рассмотрим алгоритм следящего аналого-цифрового преобразования, который обычно описывается математической моделью со знаковой функцией сравнения вида [5]

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \Delta q \text{ sign} [E + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь $E[(n+1)\Delta t]$ и $E(n\Delta t)$ – уравнивающие постоянный входной сигнал E физические величины (напряжение или ток) на $(n+1)$ -м и n -м тактах уравнивания или итерации при временном такте преобразования Δt (отсчетах сигнала $E = \text{const}$) с соответствующими ограничениями

по максимуму и минимуму $|E_{0\max}|$; Δq – квант, или шаг уравнивания, на который изменяется уравнивающее напряжение на временном такте Δt , причем $\Delta q = |E_{0\max}|/2^N$, где N – априорно заданное число двоичных разрядов; $\xi(n\Delta t)$ – помеха в виде дискретных отсчетов реализации, как правило без специальной оговорки, стационарного гауссовского процесса.

Для диапазона изменения входного сигнала $\pm E_{0\max}$ и уравнивающей величины существуют естественные, согласованные между собой ограничения. При этом в случае достижения уравнивающей величиной граничного значения диапазона знаковая функция принимает только те значения, которые исключают выход уравнивающей величины за его пределы. Поскольку в качестве уравнивающей физической величины используется величина, которая изменяется на каждом такте итерации на квант Δq , то из-за относительно медленного уравнивания входного сигнала возникает переходный процесс. Переходный процесс определяется средним числом шагов, необходимым для перехода уравнивающей величины из начального значения в искомое или установившееся значение, равное с точностью до Δq входному сигналу E . Начальное значение либо устанавливается априорно (например, равным нулю), либо сохраняется в виде результата предыдущего преобразования.

Если разделить правую и левую части уравнения в конечных разностях (1), определяющего алгоритм аналого-цифрового преобразования, на значение кванта Δq и принять временной такт преобразования Δt равным единице, то в результате получим следующее эквивалентное уравнение:

$$K(n+1) = K(n) + \text{sign} [E + \xi(n) - K(n)], \quad (2)$$

где $K(n+1) = E(n+1)/\Delta q$ и $K(n) = E(n)/\Delta q$ – значения уравнивающего кода на $(n+1)$ -м и n -м шагах итерации для алгоритма следящего аналого-цифрового преобразования

Учитывая, что при $\Delta q > 0$, справедливо равенство

$$\text{sign} [\Delta q (K_E + \gamma_E + \gamma_{\xi} - K(n))] = \\ = \text{sign} [K_E + \gamma_E + \gamma_{\xi} - K(n)],$$

то в результате приходим к эквивалентному (2) уравнению

$$K(n+1) = K(n\Delta t) + \\ + \text{sign} [K_E + \gamma_E + \gamma_{\xi} - K(n)], \quad (3)$$

где γ_E – равномерно распределенные в пределах кванта Δq случайные величины для изменяющегося

по случайному закону от преобразования к преобразованию постоянного в пределах времени преобразования входного сигнала E , представленного в виде суммы $E = \Delta q (K_E + \gamma_E)$; K_E , K_ξ и γ_ξ , γ_E – соответственно целые и дробные части деления сигнала и помехи $\xi(n)$ на квант Δq .

Заметим, что на выходе реальных АЦП получают не уравнивающие величины, динамика которых описывается алгоритмом (1), а цифровые двоичные коды K_E в соответствии с алгоритмом (3), эквивалентным в установленном смысле алгоритму (1).

Вычитая из K_E правую и левую части уравнения (3), получаем:

$$V(n+1) = V(n\Delta t) + \text{sign} [\eta - V(n\Delta t)]. \quad (4)$$

Здесь $V(n+1) = K_E - K(n+1)$ и $V(n\Delta t) = K_E - K(n)$ – разности, характеризующие отклонения уравнивающей величины на $(n+1)$ -м и n -м тактах итерации; $\eta = \gamma_E + K_\xi + \gamma_\xi$ – суммарная безразмерная случайная величина, причем $0 \leq K_\xi \leq \lambda$, где λ – целое, принимающее значение в пределах $0 \leq \lambda < 2^N$, а $0 \leq \gamma_\xi < 1$ и $0 \leq \gamma_E < 1$.

Свойства алгоритма (4) при знаковой функции сравнения исследованы в [5], [10] без учета влияния указанных на рис. 2 особенностей СФ в условиях воздействия помехи $\xi(n)$, которая, в отличие от сигнала, случайно меняется на каждом такте итерации. В общем случае из результатов исследования известно, что о сходимости алгоритма (4) к так называемой неподвижной точке, или аттрактору, для которого в пределе, т. е. при $n \rightarrow \infty$, выполняется условие $K(n) = K_E$, можно утверждать только в среднем, т. е. при выполнении равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_\eta \{V(n)\} = 0.$$

Причем при выполнении этого равенства должно выполняться условие

$$M_\eta \{\text{sign} (\eta - V)\}_{V=0} = 1 - 2 F_\eta(0) = 0,$$

где $M_\eta \{\dots\}$ – оператор определения МО по случайной величине, равной сумме $\eta = \gamma_E + \xi$, ПРВ составляющих которой симметричны.

Для того чтобы исследовать подробнее процесс сходимости к аттрактору для модификаций знаковой СФ δ и ∂ (рис. 2), рассмотрим следующий обобщенный алгоритм:

$$V(n+1) = V(n) + \phi[\theta(n)] \quad (5)$$

при

$$\phi[\theta(n)] = \begin{cases} \text{sign}[\theta(n)], \\ \text{sign}_{\varepsilon}[\theta(n)], \\ \text{sign}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}[\theta(n)], \end{cases} \quad (6)$$

где $\phi[\theta(n)]$ – обобщенная функция сравнения, конкретизированная в (6); $\theta(n) = \eta + V(n)$.

Усредняя правую и левую части в (5) по случайной величине η , приходим к следующему его усредненному варианту:

$$\bar{V}(n+1) = \bar{V}(n) + M_\eta \{\phi[\theta(n)]\}. \quad (7)$$

Разложим в (7) функцию $\phi[\theta(n)]$ в ряд Маклорена и ограничимся линейным приближением; в результате после усреднения с учетом свойств линейности оператора и симметрии ФРВ помехи η относительно нуля получим

$$\bar{V}(n+1) = \bar{V}(n) + M_\eta \{\phi[0]\} - M_\eta \{\phi'[0]\} \bar{V}(n) \quad (8)$$

или

$$\bar{V}(n+1) = \bar{V}(n) [1 - M_\eta \{\phi'[0]\}] + M_\eta \{\phi[0]\}. \quad (9)$$

Выполняя последовательно итерации в (9) начиная с $n = 0$ и принимая во внимание, что $M_\eta \{\phi'[0]\} < 1$, после суммирования убывающей геометрической прогрессии приходим к следующему решению:

$$\bar{V}(n+1) = \bar{V}(0) [1 - M_\eta \{\phi'[0]\}]^n + \frac{M_\eta \{\phi[0]\} \{1 - [1 - M_\eta \{\phi'[0]\}]^n\}}{M_\eta \{\phi'[0]\}}. \quad (10)$$

Выражение (10) описывает в общем виде в среднем искомую динамику отклонения уравнивающей величины от входного сигнала в условиях воздействия помех с ростом числа итераций n . Результат (10) из (7)–(9) получен с учетом линейности оператора усреднения $M_\eta \{\dots\}$ и разложения в ряд Маклорена функции $\phi[\theta(n)]$ с линейным его ограничением и последующей последовательной подстановкой в каждом такте итерации при росте числа итераций n начиная с нуля.

Сравнительная оценка влияния вида сравнивающей функции на динамику уравнивающей величины в условиях воздействия помех. Для представленных в (6) модификаций СФ $\phi[\theta(n)]$ после усреднения в (7), пренебрегая погрешностью второго порядка малости, приходим к выражению

$$M_{\eta}\{\varphi[0]\} - M_{\eta}\{\varphi[0]\}\bar{V}(n) = \begin{cases} 1 - 2a - 2b\bar{V}(n), \\ 1 - 2a - 2b[\varepsilon + \bar{V}(n)], \\ 1 - 2a - 2b[0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \bar{V}(n)], \end{cases} \quad (11)$$

где $a = F_{\eta}(0)$ и $b = w_{\eta}(0)$ – ФРВ и ПРВ суммарной помехи в нуле соответственно.

Для симметричной ФРВ помехи η из (10) следует, что $a = 0.5$, $M_{\eta}\{\varphi[0]\} = 1 - 2a = 0$, а

$$M_{\eta}\{\varphi'(0)\bar{V}(n)\} = \begin{cases} -2b\bar{V}(n), \\ -2b[\varepsilon + \bar{V}(n)], \\ -2b[0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \bar{V}(n)]. \end{cases} \quad (12)$$

Следовательно, в среднем для следящего алгоритма аналого-цифрового преобразования для рассматриваемых знаковых СФ и преобразований (9)–(12) имеем:

$$\bar{V}(n+1) = \begin{cases} \bar{V}(0) [1 - 2b]^n, \\ \bar{V}(0) [1 - 2b]^n - \varepsilon [1 - [1 - 2b]^n], \\ \bar{V}(0) [1 - 2b]^n - 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) [1 - [1 - 2b]^n], \end{cases} \quad (13)$$

где $\bar{V}(0)$ – усредненное отклонение установившегося значения (аттрактора), соответствующего результату аналого-цифрового преобразования сигнала E , для начального значения уравновешивающей величины $K(0)$.

Из (13) можно сделать вывод, что разность $V(n+1) = K_E - K(n+1)$ стремится к нулю в среднем по кривой, близкой к экспоненте, при ограничении на ПРВ $b < 0.5$ только для модификации СФ рис. 2, а. Напомним, что для гауссовой ПРВ

$$b = 1/(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma),$$

где σ – среднеквадратическое отклонение (СКО), причем для рассматриваемого случая после деления на квант Δq правой и левой частей алгоритма (1) является безразмерной величиной.

Для модификаций знаковой СФ (см. рис. 2, б, д) в следящем АЦП возникает систематическая погрешность преобразования. Поскольку для реальных СУ наиболее близкой математической моделью СФ является модификация (см. рис. 2, д), то наличие систематической погрешности в реальных АЦП, независимо от размера кванта Δq , неизбежно.

Соответствующие преобразования выполним для определения СК разности $V(n)$, определяю-

щего методическую, т. е. зависящую от вида алгоритма при постоянном входном сигнале E , случайную составляющую погрешности преобразования. При равенстве нулю разности $V(n) = K_E - K(n)$ с достаточно большим n СК совпадает с дисперсией методической погрешности аналого-цифрового преобразования. Для СУ с СФ (см. рис. 2, а) для алгоритма (4) и результата его преобразования (9) после возведения в квадрат правой и левой частей (5) и усреднения получим:

$$M_{\eta}[V^2(n+1)] = M_{\eta}[V^2(n)] + 2\{V(n)[\varphi(0) + \varphi'(0)V(n)]\} + M_{\eta}\{\varphi^2[\theta(n)]\}. \quad (14)$$

С учетом равенств (11) и (12), а также того, что для знаковой СФ (см. рис. 2, а) выполняются равенства $M_{\eta}\{\varphi^2[\theta(n)]\} = 1$ и $M_{\eta}\{V(n)[\varphi(0)]\} = 0$ для допустимых в условиях рассматриваемого алгоритма значений разности $V(n) = K_E - K(n)$, из (14) получаем

$$\bar{V}^2(n+1) = \bar{V}^2(n)(1 - 4b) + 1, \quad (15)$$

где

$$\bar{V}^2(n+1) = M_{\eta}\{V^2(n+1)\}, \quad \bar{V}^2(n) = M_{\eta}\{V^2(n)\};$$

$$b = w_{\eta}(0).$$

Решая итерационное уравнение (15) методом подстановки, имеем

$$\bar{V}^2(n+1) = \bar{V}^2(0)(1 - 4b)^n + \frac{1 - (1 - 4b)^n}{4b}.$$

В результате для СК разности $V(n) = K_E - K(n)$, определяющей искомую методическую погрешность, в пределе при числе итерации, стремящемся к бесконечности, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}^2(n) = 1/4b \quad (16)$$

или для гауссовой ПРВ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}^2(n) = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma/4,$$

где $\bar{V}^2(n)$ и σ – безразмерные величины.

К аналогичному результату можно прийти и для остальных рассмотренных видов знаковых СФ (6), представив (5) после сложения правой и левой частей с соответствующими постоянными в следующем виде:

$$V_{\varepsilon}(n+1) = V_{\varepsilon}(n) + \varphi[\theta(n)], \quad (17)$$

где

$$V_{\varepsilon}(n+1) = \begin{cases} V(n+1) & \text{для 1-й модификации, при } \varepsilon = 0, \\ \varepsilon + V(n+1) & \text{для 2-й модификации,} \\ 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + V(n+1) & \text{для 3-й модификации;} \end{cases}$$

$$V_{\varepsilon}(n) = \begin{cases} V(n) & \text{для 1-й модификации, при } \varepsilon = 0, \\ \varepsilon + V(n) & \text{для 2-й модификации,} \\ 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + V(n) & \text{для 3-й модификации.} \end{cases}$$

В этом случае для симметричной ФРВ и СФ рис. 2, б СК разности $V(n) = K_E - K(n)$, определяющей случайную методическую погрешность АЦП следящего типа, по виду будет совпадать с (16) только для случая, когда $\varepsilon = 0$.

Действительно, для определения СК погрешности следящего АЦП относительно разности $V_{\varepsilon}(n)$ на основе модификации знаковой СФ (рис. 2, б) в соответствии с (14) получаем:

$$\bar{V}_{\varepsilon}^2(n+1) = \bar{V}_{\varepsilon}^2(n)(1-4b) + 1 - F_{\xi}[V(n) + \varepsilon] + F_{\xi}[V(n) - \varepsilon]. \quad (18)$$

После разложения в ряд Тейлора ФРВ относительно нуля и линейного приближения приходим к эквивалентному (18), в установленном смысле итерационному уравнению

$$\bar{V}_{\varepsilon}^2(n+1) = \bar{V}_{\varepsilon}^2(n)(1-4b) + 1 - 2b\varepsilon.$$

В пределе из последнего уравнения получаем искомую оценку СК разности $V_{\varepsilon}(n)$ в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\varepsilon}^2(n) = \frac{1-2b\varepsilon}{4b}, \quad (19)$$

которая при $\varepsilon = 0$ совпадает с (16).

Однако для того чтобы оценить случайную методическую погрешность в виде дисперсии для следящего АЦП с учетом того, что погрешность смещения отлична от нуля, т. е. $\varepsilon \neq 0$, из (19) в результате суммирования с величиной ε^2 , приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\varepsilon}^2(n) &= \frac{1-2b\varepsilon + 4\varepsilon^2b}{4b} = \\ &= \frac{1-2b\varepsilon(1-2\varepsilon)}{4b}. \end{aligned} \quad (20)$$

Напомним, что результат (20) получен на основе известной формулы (7), связывающей дисперсию, средний квадрат и МО.

Аналогичные действия для оценки методической погрешности следящего АЦП для СФ рис. 1, д приводят к следующим результату:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\varepsilon}^2(n+1) &= \bar{V}_{\varepsilon}^2(n)[1-4b] + 1 - \\ &- F_{\xi}[V(n) + \varepsilon_2] + F_{\xi}[V(n) - \varepsilon_1], \end{aligned}$$

из которого в пределе получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^2(n) = \frac{1-b(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4b}.$$

Откуда следует, что оценка методической погрешности следящего АЦП для знаковой СФ рис. 1, д в пределе имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\varepsilon}^2(n) = \frac{1-b(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1-\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{4b}$$

и совпадает с (20) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, а для случая, когда $\varepsilon = 0$, совпадает с (16).

Сравнение между собой полученных результатов показывает, что, оказывается, для снижения методической погрешности результатов аналого-цифрового преобразования при использовании СУ с СФ вида рис. 2 б, д более предпочтительно, чем для СУ с СФ вида рис. 2, а. Причем положительный эффект, с рассмотренной точки зрения, как это следует из отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}^2(n)}{\bar{V}_{\varepsilon}^2(n)} = \frac{1}{1-2b\varepsilon(1-2\varepsilon)},$$

возрастает при уменьшении суммарной помехи η за счет возрастания значения максимума ПРВ $w_{\eta}(0)$ в нулевой точке. При этом существует такое оптимальное значение $\varepsilon = 0.25$, при котором для фиксированного значения ПРВ достигается наибольший эффект подавления влияния суммарной помехи на результат следящего АЦП. На основании изложенного, для кванта $\Delta q \neq 1$ рекомендуется выбирать смещение в СФ $\varepsilon = 0.25 \Delta q$.

Проведенные исследования можно выполнить и для алгоритма АЦП считывания с индикаторной СФ, который имеет вид [5]:

$$K(n+1) = K(n) + h[V(n) + \eta(n)],$$

где $V(n \Delta t) = K_E - K(n)$ – как и прежде, разность, характеризующая отклонение уравновешивающего значения входного сигнала кода $K(n)$ на n -м такте итерации; $\eta = \gamma_E + \xi$ – суммарная случайная величина или суммарная помеха.

В среднем для алгоритма АЦП считывания для рассмотренных в начале статьи результатов усреднения различных вариантов индикаторных СФ для симметричных ФРВ помехи имеем

$$M_{\eta} \{ \phi[0] \} + M_{\eta} \{ \phi'[0] \} \bar{V}(n) = \begin{cases} 1 - a - b \bar{V}(n), \\ 1 - a - b [\varepsilon + \bar{V}(n)], \\ 1 - a - b [0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \bar{V}(n)]. \end{cases}$$

После подстановки для симметричных ФРВ $a = 0.5$ и проведения итераций, начиная от начального значения уравнивающей величины $K(0)$, для которой разность $\bar{V}(0) = \bar{K}_E - K(0)$ по-прежнему есть усредненное отклонение начального значения уравнивающей величины от установившегося значения или аттрактора $\bar{K}_E$, соответствующего результату аналого-цифрового преобразования сигнала E , приходим к следующему выражению:

$$\bar{V}(n+1) = \begin{cases} \bar{V}(0)(1-b)^n + [1 - (1-b)^n] / (2b), \\ \bar{V}(0)(1-b)^n - [1 - (1-b)^n] (0.5 - \varepsilon b) / b, \\ \bar{V}(0)(1-b)^n - [0.5 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)b] [1 - (1-b)^n] / b. \end{cases} \quad (21)$$

Из (21) следует, что наличие явления гистерезиса в СУ приводит к снижению погрешности смещения для АЦП считывания по сравнению со случаем его отсутствия, причем эффект снижения будет тем выше, чем больше СКО суммарной помехи η при фиксированном смещении ε и симметричной ПРВ. Напомним, что $b = w_{\eta}(0)$ – ПРВ суммарной помехи в нуле.

Анализ методической случайной составляющей погрешности преобразования приводит к необходимости исследования итерационного уравнения (14), но уже применительно к рассмат-

риваемому алгоритму считывания, учет особенностей которого приводит к результату

$$\bar{V}^2(n+1) = \bar{V}^2(n)(1-2b) + (1-b)\bar{V}(n) + 0.5. \quad (22)$$

Уравнение (22) отличается от аналогичного уравнения (15), полученного для алгоритма следящего АЦП. Его решения в аналитическом виде автору статьи найти не удалось. Однако уравнение (22) можно использовать для численной оценки среднего квадрата методической погрешности алгоритма АЦП считывания и сравнить ее с аналогичной погрешностью АЦП следящего типа (рис. 4).

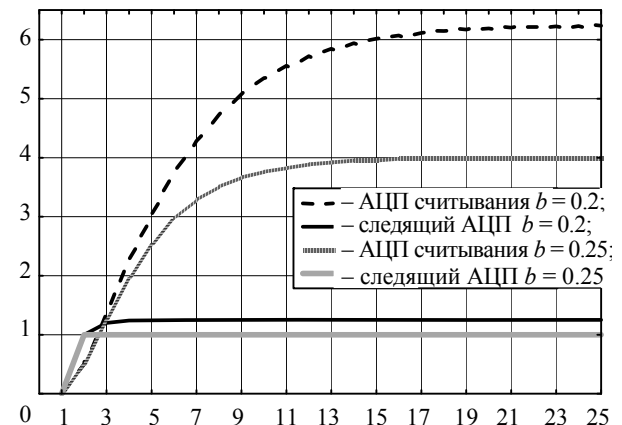


Рис. 4

На рис. 4 приведены соответствующие графики сравнения СК погрешности аналого-цифрового преобразования в условиях воздействия помех, из которых видно, что и по среднему квадрату погрешности аналого-цифрового преобразования АЦП считывания существенно хуже АЦП следящего типа.

В заключение следует констатировать, что гистерезисные свойства СУ приводят к повышению помехоустойчивости алгоритмов АЦП относительно неизбежного воздействия на сигнал аддитивной помехи. При этом существует оптимальное значение зоны нечувствительности ε , равное 0.25 от значения кванта Δq , при котором достигается наилучший эффект подавления помехи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962. 332 с.
2. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
3. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / под ред. И. С. Енюкова; пер. с англ. Дж.-О. Ким,

- Ч. У. Мьюллер, У. Р. Клекка и др. М.: Финансы и статистика, 1989. 215 с.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд., перераб. М.: Наука. Физматлит, 1976. 543 с.
5. Тихонов Э. П. Вероятностно-итерационные методы, алгоритмы и структуры аналого-цифровых средств измерения. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010. 288 с.

6. Рангайян Р. М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход / под ред. А. П. Немирко; пер. с англ. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

7. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука. Физматлит, 1980. 572 с.

8. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. 5-е изд.. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 312 с.

9. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987. 304 с.

10. Тихонов Э. П. Исследование помехоустойчивости аналого-цифрового преобразования методами адаптивного усреднения // Электронное моделирование. 1983. № 1. С. 44–46.

E. P. Tikhonov

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

STUDY OF THE PROPERTIES OF NONLINEAR COMPARING FUNCTIONS IN APPLICATIONS

The effect of the nonlinear properties of comparators on the metrological characteristics of analog-to-digital converters (ADCs) in the absence and impact of interference is investigated. A detailed study of this effect was carried out on two types of ADC, tracking and reading. It is proved that the presence of hysteresis properties of the comparators leads to an increase in noise immunity of the ADC algorithms relative to the effect on the input signal of additive interference. It is shown that there is an optimal value of the insensitivity zone of the comparators (ϵ) relative to the quantum value, at which the greatest effect of interference suppression is achieved. A comparative evaluation of the effect of the comparison function type which is realized in the comparator on the dynamics of the equilibrating quantity under the interference conditions is performed. It is realized with analytical methods of nonlinear dynamics and is confirmed by the results of simulation modeling for Gaussian noise. By simulation modeling methods for Gaussian noise, it is shown that the ADC reading error substantially exceeds the corresponding tracking type ADC error.

Comparing functions, nonlinearity, analytical description, methodological biases, the algorithms of analog-to-digital conversion
