



УДК 611.08; 611.018+611.214

М. К. Касумова

*Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Санкт-Петербургский институт стоматологии последипломного образования»*

Э. П. Тихонов

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)*

## **Информационные технологии при идентификации структуры твердых тканей зубов в системном представлении: разработка физико-математической модели на основе электрического зондирующего сигнала\***

*Для синтеза физико-математической модели (ФММ) твердых тканей зубов (ТТЗ) последовательно вводятся геометрические конусы, аппроксимирующие распределения дентинных трубочек (ДТ) в ТТЗ, на основании которых получены математические зависимости, описывающие структуру ТТЗ. Вершины этих конусов совпадают с условным центром сопротивления зуба, а основания – с поверхностью шлифа зуба. Введенная аппроксимация позволяет, во-первых, математически описать обнаруженную в экспериментах обобщенную доминирующую тенденцию в закономерности распределения ДТ в ТТЗ и, во-вторых, создать обоснованную базу для коррекции исходной аппроксимации с целью учета анизотропии в распределении ДТ, которая зафиксирована при экспериментальных исследованиях шлифов зубов посредством оптического и электрического зондирующих сигналов (ЗС). Для последующего решения задачи идентификации полученных математических зависимостей на основе электрического ЗС приводится краткое описание портативной аналого-цифровой измерительной системы «Дентометр», которая входит в состав представленного в статье координатно-информационно-измерительного комплекса.*

### **Физико-математическая модель, твердые ткани зубов, распределение дентинных трубочек, координатно-информационно-измерительный комплекс**

Описание морфологии биообъектов математическими и иными количественными методами стало особенно актуальным в связи с развитием компьютерных технологий. В частности, в течение последних десятилетий активно развивались принцип и методы геометрической морфологии для выявления различий между морфологическими объектами по форме [1], [2]. Причем, геометрическая морфология основана на многомерном математическом анализе координат – так

называемых меток (особых признаков), зафиксированных на поверхности анализируемого морфологического объекта. Метки выбираются в соответствии с рекомендованными в геометрической морфологии правилами на базе исторически сформировавшихся знаний в областях биологии и математики с учетом возможностей современных информационных технологий. В рассматриваемой статье, в отличие от геометрической морфологии, описывающей внешние формы биообъекта, структура ТТЗ определяется параметрами и закономерностями распределения ДТ в матриксе

\* Начало в № 5/2018, продолжение в № 10/2018.

в системной привязке к челюстно-лицевой системе, которые не обнаруживаются при анализе внешней формы биообъекта. В этом случае, как было показано в [3], изучение морфологии ТТЗ стало возможным благодаря освоению экспериментальных методов исследования, основу которых составляют известные закономерности взаимодействия зондирующего физического поля или сигнала с биообъектом. Существенный успех в этом направлении достигнут в рентгеновской компьютерной томографии (РКТ), в которой благодаря датчикам, преобразующим энергию излучения в электрический сигнал, и цифровым средствам измерения и обработки результатов взаимодействия проникающего рентгеновского облучения с исследуемым биообъектом осуществляется его послойный анализ и обработка для получения изображений в диагностических целях [4]. При этом информация о внутренней структуре исследуемого биообъекта извлекается на основе известной математической зависимости, полученной Радонном, с последующим преобразованием которой, например преобразованием Фурье, восстанавливается в числовой форме образ внутренней структуры исследуемого биообъекта. Тем не менее, в рентгеновских системах и комплексах, включая РКТ, до настоящего времени диагностика обычно осуществляется на основе когнитивного анализа визуальных образов, зафиксированных на установленном носителе информации. Из-за этого, кроме очевидных случаев, диагностика носит субъективный характер и зависит от квалификации врача-рентгенолога, поскольку осуществляется по результатам сравнительного анализа полученных образных отпечатков с теми представлениями о вероятном состоянии исследуемого пациента, которые сложились на основании ранее полученных знаний у врача-рентгенолога. Представляется, что для объективизации диагноза недостаточно фиксации в численном и образном видах внутренней структуры исследуемого биообъекта. Наибольший эффект правдоподобности диагностики может быть достигнут при наличии явной функциональной зависимости структуры исследуемого объекта, выраженной в математической форме, от изменения характеристик и параметров выходного ЗС. Заметим, что в отличие от РКТ, речь идет не о косвенном измерении интересующих нас параметров и характеристик по результатам ослабления коллимированного вы-

ходного рентгеновского излучения в зависимости от массового коэффициента поглощения тканей интересующего биообъекта [4] при изменении направления излучения в привязке к пространственным координатам. Речь идет, в отличие также и от геометрической морфологии, о косвенных измерениях на основе физико-математической модели (ФММ), описывающей структуру исследуемого биообъекта, например ТТЗ, с учетом функциональной взаимосвязи характерных для рассматриваемой структуры признаков и доминирующих структурных элементов, например дентинных трубочек. При этом наличие ФММ позволяет получить информацию о структуре биообъекта по результатам измерения на основе зондирования биообъекта только по одному выбранному направлению. Однако для этого априори требуется определить в математической форме функциональную зависимость в явном виде выходного ЗС от состояния структуры и других характерных свойств исследуемого биообъекта. Для решения этой задачи идет постоянный поиск либо иных ЗС, отличных от проникающих излучений, и, соответственно, других методов и способов извлечения информации о состоянии диагностируемого биообъекта с целью построения ее ФММ, либо поиск и разработка методов и алгоритмов построения ФММ на основе уже известных и широко применяемых видов ЗС – рентгеновских, ультразвуковых, оптических [3] и т. п. Для достижения этих целей представляет интерес электрический ЗС, уже давно привлекающий внимание стоматологов для ранней диагностики и прогнозирования резистентности эмали зубов к кариесу. Именно электрический ЗС обладает свойствами, доступными для использования в стоматологии на базе современных информационных технологий, которые способствуют получению знаний, недоступных, по крайней мере в настоящее время, для иных видов ЗС. Известно, что основной информативный параметр, характеризующий результат взаимодействия постоянного электрического ЗС с исследуемым биообъектом, – это активное сопротивление или функционально связанный с ним по закону Ома постоянный ток. Причем диапазон изменения сопротивления по сравнению с РКТ достаточно велик и занимает пределы от долей килоом и до сотен мегаом, т. е. кратен  $10^8$  и существенно перекрывает динамический диапазон в РКТ:  $\approx 5 \cdot 10^4$ . Охват такого

диапазона современными техническими средствами может быть достигнут при использовании специальных алгоритмов измерения применительно к определенным фрагментам биообъекта, например шлифам зубов. Фрагментарное ограничение при применении рассматриваемого метода к исследованию биообъекта предопределяет его использование в режиме *in vitro*, что, безусловно, снижает диагностические возможности электрического ЗС. Но, вместе с тем, указанное ограничение окупается преимуществами, которые можно извлечь в результате использования электрического ЗС для решения задачи идентификации ТТЗ, с помощью построения (синтеза) искомой ФММ. В этом случае сравнение биообъектов можно осуществить на основе уже наработанных методик и алгоритмов, в отличие от геометрической морфологии, не по форме, а по содержанию, т. е. по структуре сравниваемых биообъектов.

Наглядная иллюстрация преимуществ применения электрического ЗС для построения ФММ представлена на рис. 1, поясняющем процесс проведения измерений на шлифе зуба в соответствии со схемой эксперимента, иллюстрирующей механизм формирования тока в проводнике 2-го рода. Как следует из рис. 1, при заполнении канальцев ДТ электролитом, например хлоридом кальция ( $\text{CaCl}_2$ ), ДТ становятся проводниками

2-го рода для электрического тока – в отличие от окружающего их матрикса. Необходимо упомянуть, что применение электролитов для измерения показателей свойств шлифов, связанных со структурой пронизывающих их ДТ, сопровождается возникновением трудно учитываемых при проведении экспериментов физико-химических явлений, влияющих особым образом на погрешность результатов измерений. Однако материал электрода и подложки, степень увлажнения поверхностей шлифа, окружающая температура и некоторые другие факторы, характерные для проводников 2-го рода, при надлежащей организации эксперимента оказывают не столь существенное влияние по сравнению с достигаемым положительным эффектом от получения результатов прямых измерений, по которым можно синтезировать искомую ФММ. Применение игольчатого электрода (в дальнейшем – электрода) позволяет выполнять с высокой точностью прямые измерения сопротивлений в любой точке шлифа при фиксированных значениях координат положения электрода на шлифе в соответствии с измерительным уравнением

$$R = \rho L/S, \quad (1)$$

где  $R$  – искомое сопротивление при фиксированных значениях координат;  $\rho$  – коэффициент пропорциональности;  $L$  – усредненная длина ДТ, попадаю-

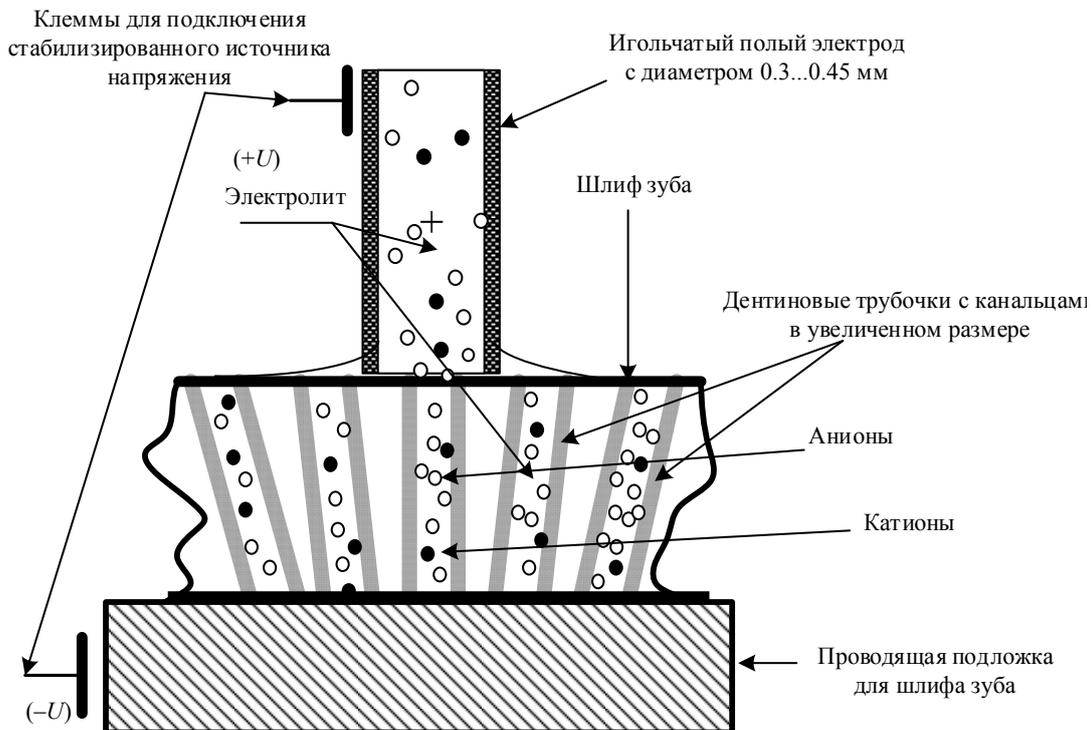


Рис. 1

ших в пределы поперечного сечения электрода;  $S$  – суммарная площадь проводящей части ДТ, находящейся в пределах поперечного сечения электрода.

Коэффициент пропорциональности  $\rho$  определяется через удельную проводимость  $\gamma$  электролита по известной [5] формуле и соответствует удельному сопротивлению ДТ, заполненной электролитом:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{nq\alpha(b_+ + b_-)},$$

где  $n$  – концентрация молекул электролита, находящегося в ДТ шлифа;  $\alpha$  – коэффициент диссоциации;  $q$  – заряд носителя тока;  $b_+$  и  $b_-$  – коэффициенты подвижности положительных и отрицательных ионов электролита  $\text{CaCl}_2$ .

Суммарная площадь  $S(\varphi)$  проводящей части ДТ, находящихся в пределах поперечного сечения электрода, для любой точки на шлифе в пределах дентина определяется в соответствии с равенством

$$S(\varphi) = S_{\text{ср}} n_s(\varphi, S_3), \quad (2)$$

где  $\varphi$  – угол между прямой, соединяющей центр электрода на поверхности шлифа (рис. 2 и 3) с некоторой характерной точкой – условным центром сопротивления зуба, и перпендикуляром к поверхности шлифа, установленным из этой же характерной точки;  $S_{\text{ср}}$  – средняя площадь поперечного сечения ДТ;  $n_s(\varphi, S_3)$  – число ДТ, попадающих под площадь электрода  $S_3$ .

Из (2) следует, что при изотропном распределении ДТ в дентине суммарная площадь  $S(\varphi)$  при

$S_3 = \text{const}$  зависит только от угла  $\varphi$ . При этом возникает вопрос о выборе характерной точки шлифа – определяющей для решения задачи синтеза ФММ, описывающей функциональную связь измеряемого сопротивления с закономерностями изменения интересующих нас параметров ДТ в пределах шлифа. Синтез ФММ выполним поэтапно по мере уточнения априорных сведений об особенностях анатомии зуба, схематично представленных на рис. 2 и иллюстрирующих прямую связь геометрии расположения ДТ в зубе с условным центром сопротивления зуба.

На первом этапе решения задачи синтеза ФММ введем наряду с представлением об изотропности распределения ДТ упрощенную аппроксимацию распределения ДТ в пределах коронки анализируемого зуба в виде прямого конуса с вершиной, совпадающей с условным центром сопротивления зуба  $C$  и основанием в виде круга, описывающего шлиф зуба согласно рис. 3. Поясняющая схема аппроксимирующего прямого кругового конуса (ПКК), при совпадении центра шлифа с проекцией вершины ПКК на его основание, приведена на рис. 3. При этом плоскость поверхности шлифа образует основание данного ПКК. Строго говоря, изотропность распределения ДТ в пределах дентина представляет определенное допущение, так как анализ фотографий шлифов на фоне равномерно распределенного клеточного геометрического теста показывает некоторую неравномерность его отражения при прохождении оптического сигнала через толщину

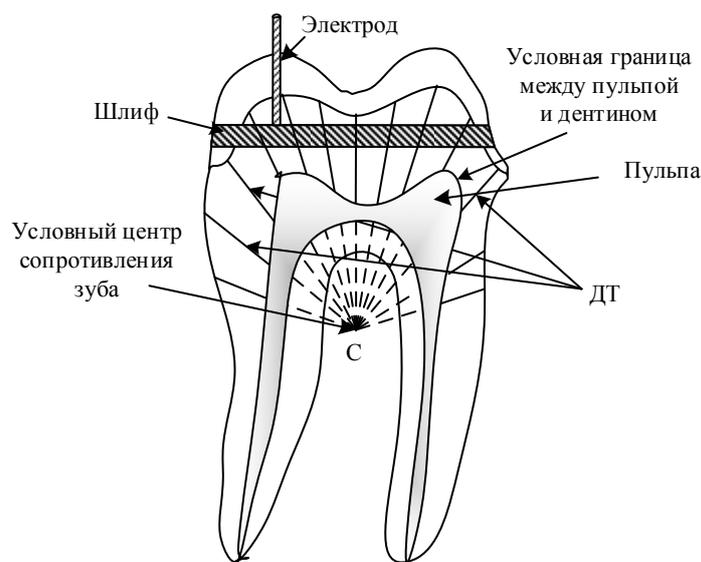


Рис. 2

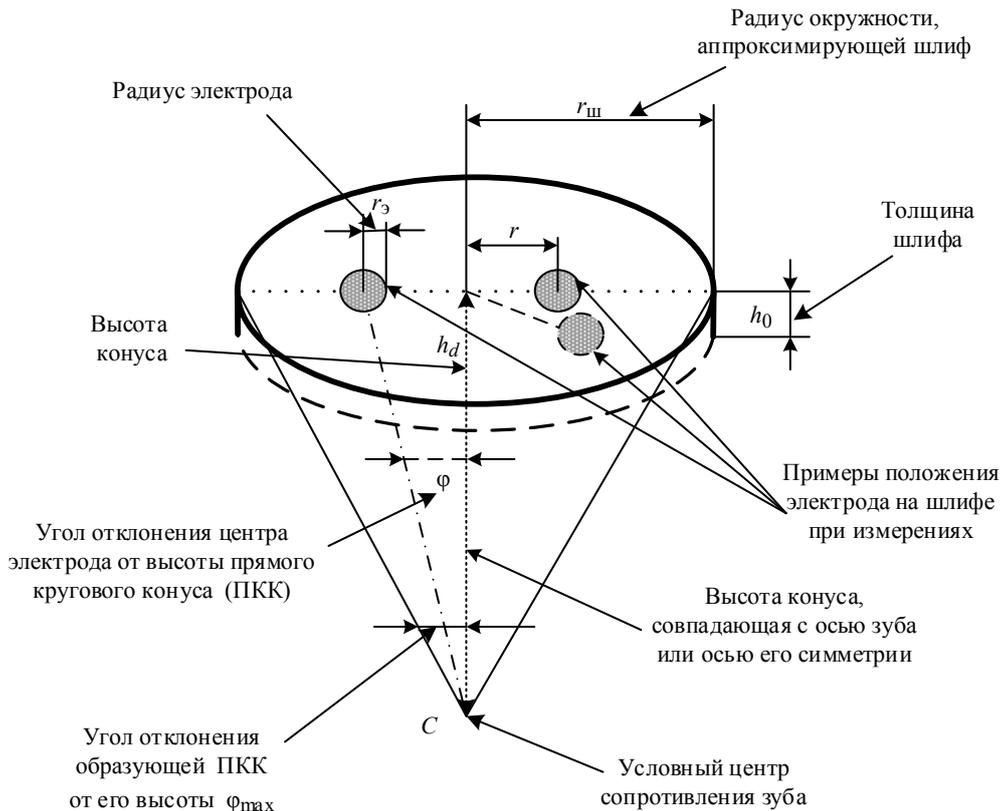


Рис. 3

шлифа [3, рис. 4]. Анизотропия распределения ДТ в пределах дентина доказана и при исследовании ТТЗ с помощью поляризованного оптического ЗС [6], которую связывают с особенностью бугоркового строения коронки зуба. Тем не менее, введенная упрощенная аппроксимация на первом этапе синтеза ФММ позволяет, во-первых, математически описать наблюдаемую в экспериментах обобщенную доминирующую тенденцию в закономерности распределения ДТ в дентине и, во-вторых, создает исходную базу для последующего уточнения упрощенной аппроксимации с целью учета анизотропии в распределении ДТ, которая зафиксирована при экспериментальных исследованиях шлифов зубов посредством оптического и электрического ЗС.

Рассмотренная модель аппроксимации зуба в виде ПКК упрощает методическое обоснование нижеприведенной улучшенной аппроксимации ТТЗ в виде косоугольного конуса с учетом смещения проекции центра сопротивления зуба на плоскость шлифа относительно геометрического центра шлифа. В дальнейшем проекцию центра сопротивления зуба на плоскость шлифа будем рассматривать как главный центр (доминирующая или главная точка) роста зуба. Обоснование дан-

ного определения связано со спецификой трофики зуба. Очевидно, что центр шлифа совпадает с основанием высоты аппроксимирующего конуса – главной точкой роста зуба только для случая ПКК. Рассмотрение эллиптического основания конуса в данном случае для упрощения задачи исключается. Условный центр сопротивления зуба обладает также тем свойством, что расстояние от него до поверхности шлифа, совпадающее с высотой аппроксимирующего конуса, наименьшее и, как показано в [6], определяет наибольшую упорядоченность ДТ в локальной области дентина, включающей высоту конуса. Эта упорядоченность дает основание для вывода о совпадении высоты аппроксимирующего конуса с так называемой осью роста зуба, так как в определенном смысле обеспечивает оптимальную трофику зуба в направлении наименьшего расстояния от пульпы до коронки зуба. Вывод об упорядоченности ДТ в области зуба, содержащей ось его роста, подтвержден экспериментально на основе оптического и электрического ЗС. При проведении эксперимента на основе оптического ЗС характерным оптическим свойством, обнаруженным с помощью скрещенных поляризаторов на поверхности шлифа в центре роста зуба, является

наличие оптического образа коноскопического креста [6]. Формирование в указанных условиях подобного оптического образа как раз и служит признаком упорядоченности структуры ДТ, через которые проходит оптический ЗС. В этих же точках на основе измерений с использованием электрического ЗС зафиксированы области пониженного сопротивления.

Заметим, что, как утверждается в [6], при исследовании множества шлифов наблюдаются определенные изменения в числе, положениях, формах и даже размерах коноскопических крестов. Объяснение таких изменений связывается с естественной вариацией бугорков в коронках зуба, число которых преимущественно совпадает с числом зафиксированных коноскопических крестов. При этом количество зафиксированных коноскопических крестов зависит от исследуемого типа зуба. Понижение сопротивления в области точек роста, во-первых, связано с минимальной усредненной длиной ДТ  $L(\varphi)$ , и, во-вторых, с максимальным числом ДТ, попадающих под контактное сечение (площадь) электрода. Эти параметры влияют на значение измеряемого сопротивления согласно (1). Действительно, в соответствии с упрощенной аппроксимацией, длина  $L(\varphi)$  ДТ в пределах толщины (высоты)  $h_0$  исследуемого шлифа зуба, изменяется в зависимости от угла  $\varphi$  между осью зуба и образующей конуса, направленной из его вершины в наблюдаемую точку на поверхности шлифа (см. рис. 3). Заметим, что ось зуба для ПКК в силу изотропности распределения ДТ служит и его осью симметрии, откуда следует, что усредненная длина канальцев  $L(\varphi)$ , попадающих под контактную площадь электрода, для любой точки на шлифе определяется по формуле

$$L(\varphi) = h_0 / \cos \varphi,$$

где  $h_0$  – толщина (высота) шлифа (см. рис. 3).

Учитывая тот факт, что при проведении экспериментов в одних и тех же условиях удельная проводимость  $\gamma$  электролита остается постоянной величиной, из (1) как раз и следует, что измеряемое сопротивление зависит не только от средней длины ДТ  $L(\varphi)$ , но и от суммарной площади проводящей части сечения ДТ  $S(\varphi)$  [7], находящейся в пределах поперечного сечения электрода (см. рис. 1). Принимая во внимание эти условия, разрабатывать ФММ целесообразно исходя из поиска функциональной зависимости сопротивления локального объема шлифа, находящегося под

контактной поверхностью электрода, от координат, фиксирующих центр электрода на поверхности шлифа. Для ПКК, в силу изотропности распределения ДТ, упомянутое сопротивление локального объема шлифа, ограниченного контактным сечением электрода, будет зависеть только от расстояния  $r$  от центра шлифа до центра электрода (см. рис. 3). При этом суммарная площадь сечения ДТ  $S$  в пределах поперечного сечения электрода зависит от числа ДТ, ограниченных площадью сечения электрода, т. е. является функцией от числа ДТ в заданной точке шлифа. Согласно известным данным, приведенным, например, в [8], диаметр поперечного сечения канальцев ДТ изменяется от 3 до 0.5 мкм, а плотность расположения ДТ на поверхности пульпы составляет 45...76 тыс./мм<sup>2</sup>. В коронке премоляров и моляров (на дентино-эмалевой границе) соответствующая плотность распределения ДТ изменяется в пределах 15...20 тыс./мм<sup>2</sup>. С учетом того, что шлиф зуба занимает некоторое промежуточное положение между пульпой и дентино-эмалевой границей (в принципе, может находиться и на дентино-эмалевой границе, согласно рис. 2), в пространство, ограниченное площадью электрода, попадает не менее 15...20 тыс./мм<sup>2</sup> ДТ. Это достаточно репрезентативная выборка, в пределах которой случайная вариация площади сечения ДТ не оказывает существенного влияния на параметр  $S$  в (1). Значительно большее влияние на показание результатов измерения сопротивления  $R$  оказывает изменение плотности ДТ в дентине с ростом угла  $\varphi$ , т. е. по мере удаления электрода от центра (см. рис. 2) при перемещении точки измерения (наблюдения) к периферии шлифа. Определенное влияние оказывает и изменение усредненной длины  $L(\varphi)$  с изменением  $\varphi$ . Логично предположить, что число канальцев  $n_s(\varphi, S_s)$  есть случайная величина, так как расхождение ДТ от центра сопротивления в силу изотропности распределения ДТ для упрощенной модели осуществляется под углами, подчиняющимися определенному закону распределения вероятностей в пределах, которые зависят от формы зуба. Для идеальной аппроксимации зуба (см. рис. 3) эти пределы одинаковы относительно основания высоты ПКК, аппроксимирующего форму зуба, а закон распределения вероятностей переменной  $\varphi$  соответствует равномерному закону.

Исходя из равномерного распределения угла расхождения ДТ  $\varphi$  от центра сопротивления  $C$  с круговым распределением выходов ДТ на шлифе зуба (см. рис. 3), площадь основания прямого конуса, опирающегося на шлиф зуба, определяется равенством

$$S(\varphi_{\max}) = \pi r_{\text{ш}}^2,$$

или с учетом того, что

$$r_{\text{ш}} = h_d \operatorname{tg} \varphi_{\max}; \quad \varphi_{\max} \operatorname{arctg} \mu_{\max}, \quad (3)$$

получаем

$$\varphi_{\max} = \pi [h_d \operatorname{tg} \varphi_{\max}]^2,$$

где  $\varphi_{\max}$  – максимальный угол между образующей ПКК с основанием, равным площади шлифа, и высотой  $h_d$ ;  $\mu_{\max} = r_{\text{ш}}/h_d$ ,  $r_{\text{ш}}$  – радиус шлифа.

Таким образом, результат измерения сопротивления в конкретной точке шлифа электродом с контактной площадью  $S_3$ , зависит от случайной доли ДТ, которая попадает под площадь электрода  $S_3$ , в их возможном общем числе в дентине. Поскольку эта доля ДТ изменяется случайно в зависимости от изменения координат центра электрода или расстояния  $r$ , то интегрирование плотности распределения вероятностей (ПРВ) ДТ в пределах шлифа по площади  $S_3$  определяет искомую вероятность попадания ДТ под площадь  $S_3$  контактного электрода в исследуемой точке шлифа. Очевидно, что, чем меньше площадь  $S_3$ , тем меньше вероятность попадания ДТ в область, ограниченную площадью  $S_3$ , и тем больше измеряемое сопротивление в соответствии с (1). Аналогичный вывод следует и для случая, при котором для фиксированной площади  $S_3$  вероятность попадания ДТ в область, ограниченную площадью  $S_3$ , снижается по мере увеличения расстояния от центра сопротивления зуба до наблюдаемой (измеряемой) точки на поверхности шлифа. С учетом очевидного факта значительно превышения контактной площадью электрода  $S_3$  площади сечения одной ДТ, перейдем к определению искомой вероятности с достаточной для практических расчетов статистической достоверностью. Эту искомую вероятность можно определить при условии знания ПРВ ДТ в зависимости от изменения расстояния  $r$  от центра шлифа до

центра электрода. Для вывода этой ПРВ (см. рис. 3) необходимо функционально связать координату  $r$  с углом  $\varphi$ , воспользовавшись зависимостью (3), в виде

$$r(\varphi) = h_d \operatorname{tg} \varphi. \quad (4)$$

Распределение вероятности угла  $\varphi$ , как уже отмечалось выше, при изотропном распределении ДТ описывается равномерным законом на отрезке  $[-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$ . Поэтому для определения искомой вероятности попадания ДТ в пределы, ограниченные площадью электрода, в зависимости от расстояния  $r$ , необходимо воспользоваться разработанным в теории вероятностей выводом ПРВ значений функции, зависящей от случайной величины [9]. В общем виде для случая монотонной функции искомая ПРВ находится в соответствии с равенством

$$w_y(y) = w_x[\psi(y)] |\psi'(y)|, \quad (5)$$

где  $w_y(y)$  – искомая ПРВ для монотонной функции  $y = \varphi(x)$  от случайного аргумента  $x$ , для которой обратная функция в виде  $x = \psi(y)$  однозначна;  $w_x[\psi(y)]$  – ПРВ случайной величины  $x$ ;  $|\psi'(y)|$  – абсолютное значение производной по  $y$  обратной функции  $[\psi(y)]$ .

Искомая обратная функция для (4) в пределах  $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$  имеет вид

$$\varphi(r) = \operatorname{arctg} \left( \frac{r}{h_d} \right). \quad (6)$$

Производная от функции  $\varphi(r)$  вида (6) по  $r$  равна

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{r}{h_d} \right) \right] = \frac{h_d}{h_d^2 + r^2}. \quad (7)$$

В соответствии с (7), учитывая тот факт, что угол  $\varphi$  между образующей конуса и его высотой для прямого конуса подчиняется равномерной ПРВ в пределах  $-\varphi_{\max} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ , получаем с учетом (5) искомую ПРВ ДТ  $w(r)$  в зависимости от изменения координаты  $r$  в виде

$$w(r) = \frac{1}{2\varphi_{\max}} \frac{h_d}{h_d^2 + r^2}. \quad (8)$$

Прежде чем установить вероятность попадания канальцев под площадь электрода, необходимо ввести дополнительные пояснения, уточнить

определения параметров и ввести дополнительные разъяснения свойств, характеризующих геометрические и биомеханические характеристики зуба, введенные в данной статье. Предварительно обратим внимание на то, что в соответствии с (1) в знаменателе суммарная площадь ДТ определяется вероятностью попадания ДТ под площадь электрода, тогда как (8) описывает одномерную ПРВ ДТ в зависимости от координаты  $r$ . В этом случае вероятность попадания ДТ в отрезок, ограниченный диаметром электрода  $2r_3$ , при совмещении начала отсчетов декартовой системы координат с центром шлифа и при наличии одной оси симметрии в зубе определяется следующим результатом интегрирования:

$$P(r - r_3 \leq r \leq r + r_3) = \frac{1}{2\varphi_{\max}} \int_{r-r_3}^{r+r_3} \frac{h_d}{h_d^2 + r^2} dr = \frac{1}{2\varphi_{\max}} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{r+r_3}{h_d} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{r-r_3}{h_d} \right) \right], \quad (9)$$

где  $\varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \mu_{\max}$ , так как рассматривается простейший случай прямого конуса при одноосной симметрии зуба, опущенного из центра сопротивления зуба  $C$  на поверхность шлифа при совпадении центра симметрии с центром шлифа;  $r$  – координата, соединяющая центр шлифа с центром электрода радиусом  $r_3$ , причем

$$0 \leq |r| \leq r_{\text{ш}} - r_3.$$

Очевидно, что при стремлении радиуса  $r_3$  к достаточно малому значению вероятность попадания ДТ под площадь электрода будет стремиться к значению ПРВ ДТ, вычисляемой в соответствии с (9). Для упрощения (9) выполним следующую замену переменных:  $\mu = r/h_d$ ,  $\mu_3 = r_3/h_d$  и  $\mu_{\text{ш}} = \mu_{\max} = r_{\text{ш}}/h_d$ , а также воспользуемся известным равенством

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \left[ \frac{(x - y)}{(1 + xy)} \right], \quad xy > -1$$

или после подстановки  $x = \mu + \mu_3$ ,  $y = \mu - \mu_3$ , получаем

$$P(r - r_3 \leq r \leq r + r_3) = \frac{1}{2 \operatorname{arctg} \mu_{\text{ш}}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{2\mu_3}{1 + (\mu^2 - \mu_3^2)} \right], \quad (10)$$

где  $\mu_{\text{ш}} = r_{\text{ш}}/h_d$ ,  $\mu_3 \leq \mu \leq \mu_{\text{ш}}$ .

Из (10) следует, что ПРВ ДТ относительно центра шлифа при  $-\mu_{\text{ш}} \leq \mu \leq \mu_{\text{ш}}$  симметрична и зависит, в силу выполненной аппроксимации при  $\mu_3 = \text{const}$ , только от  $\mu$ , т. е. от отношения расстояния между центрами электрода и шлифа к высоте конуса  $h_d$ . Следовательно, должна быть симметрична и функция, описывающая изменение сопротивления при движении электрода от центра шлифа к периферии в соответствии с (1). Однако это утверждение, как показали эксперименты с электрическим и рентгеновским ЗС (см. рис. 2 [3]), не подтверждается полученными результатами эксперимента. Причем, как это следует из логического анализа, причина несовпадения заключается в том, что в реальном зубе центр шлифа не совпадает с основанием перпендикуляра, опущенным из условного центра сопротивления зуба на поверхность среза шлифа, т. е. с высотой аппроксимирующего конуса. Это несовпадение объясняется анатомией зубной системы в целом. В связи с этим аппроксимацию распределения ДТ в дентине необходимо осуществить косым (наклонным) конусом, т. е. таким конусом, у которого ортогональная проекция его вершины, совмещенная с центром сопротивления зуба, на основание конуса, образуемое поверхностью шлифа, не совпадает с геометрическим центром шлифа (для окружности этот центр служит и центром симметрии шлифа). При этом изотропия распределения ДТ нарушается, так как плотность распределения вероятностей ДТ может изменяться в зависимости от направления движения электрода от центра шлифа (см. рис. 4 с изображением схемы расположения шлифа зуба и аппроксимирующего косого конуса при смещении высоты (оси роста зуба) относительно центра шлифа).

В соответствии с рис. 4, приведенным с необходимыми пояснениями, плоскость поверхности шлифа должна быть расположена перпендикулярно высоте  $h_d$ . Как следует из рис. 4, максимальные значения углов между высотой и образующими конуса в плоскости сечения конуса, проходящей перпендикулярно основанию конуса через его диаметр, в этом случае асимметричны и равны  $\varphi_{1\max}$  и  $\varphi_{2\max}$  соответственно. Прямая, проходящая через основание высоты  $h_d$  конуса и центр шлифа, образует так называемую ось ориентации зуба в челюсти (в дальнейшем – ось ориентации), а углы  $\varphi_{1\max}$  и  $\varphi_{2\max}$ , как это следует из рис. 4, определяются в соответствии с формулами

$$\varphi_{1\max} = \varphi_{\max} - \alpha; \quad \varphi_{2\max} = \varphi_{\max} + \alpha,$$

где  $\alpha = \arctg(\Delta r/h_d)$ .

Если выразить углы  $\varphi_{1\max}$  и  $\varphi_{2\max}$  через геометрические параметры шлифа, то, как это следует из рис. 4, они определяются в соответствии с формулами

$$\varphi_{1\max} = \arctg[(r_{\text{ш}} - \Delta r)/h_d] = \arctg(\mu_{\text{ш}} - \Delta\mu),$$

$$\varphi_{2\max} = \arctg[(r_{\text{ш}} + \Delta r)/h_d] = \arctg(\mu_{\text{ш}} + \Delta\mu),$$

где  $\mu_{\text{ш}} = r_{\text{ш}}/h_d$ ;  $\Delta\mu = \Delta r/h_d$ .

Следовательно, если  $xy < 1$  ( $x = \mu_{\text{ш}} - \Delta\mu$ , а  $y = \mu_{\text{ш}} + \Delta\mu$ ), то с учетом (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{1\max} + \varphi_{2\max} &= \arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \\ &= \arctg\left[\frac{2\mu_{\text{ш}}}{1-(\mu_{\text{ш}}^2 - \Delta\mu^2)}\right]. \end{aligned}$$

В первом приближении для варианта, когда выполняется неравенство  $\Delta r \ll r_{\text{ш}}$ , приходим к описанному ранее варианту, при котором имеем  $\varphi_{1\max} + \varphi_{2\max} \approx 2\varphi_{\max}$ .

Как уже отмечалось, согласно рис. 4 и 5, вводится определение оси ориентации зуба в челюсти, соответствующей прямой, проходящей в

плоскости шлифа через его центр и проекцию центра сопротивления зуба на плоскость шлифа. Эта проекция служит основанием высоты конуса, причем в этой точке шлифа наблюдается наименьшее измеряемое в соответствии с (1) сопротивление. Более того, как показали эксперименты с использованием оптического ЗС, в локальной симметричной окрестности основания высоты  $h_d$  конуса наблюдается наибольшая упорядоченность расположения ДТ. Такая упорядоченность ДТ, разветвляющаяся, как это будет показано далее по тексту, в направлении бугорков коронки зуба, обеспечивает наилучшую трофику зуба. На основании этого высоту  $h_d$  конуса целесообразно определить, как главную ось роста зуба, а точку ее проекции на шлифе – как центр роста зуба. Плоскость сечения зуба, перпендикулярная плоскости шлифа и проходящая через высоту (ось роста зуба) и ось конуса, образует воображаемую линию пересечения этой плоскости с окклюзионной поверхностью зуба, которая имеет сложную форму из-за анатомических особенностей поверхности эмали зуба, приспособленной для выполнения ее главной функции. Возможно, что эта линия пересечения близка или даже совпадает с фиссурной бороздкой на поверхности эмали зубов (рис. 4 и 5).

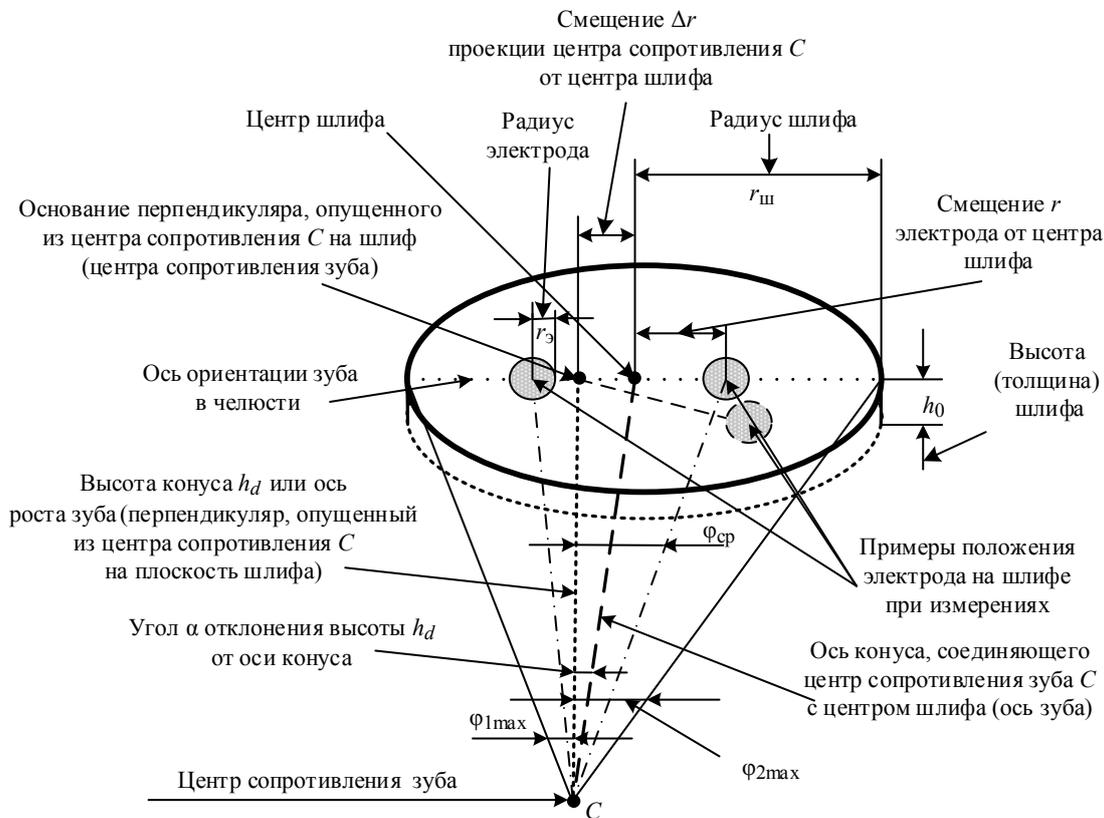


Рис. 4

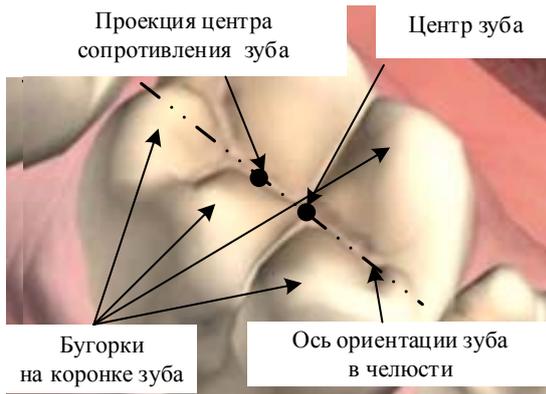


Рис. 5

Физический смысл оси ориентации зуба заключается в том, что она характеризует положение зуба в челюсти и поэтому формируется или, по крайней мере, связана с направлением касательной к зубной дуге в точке проекции центра сопротивления зуба  $C$ . При этом логично предположить, что направление основной силы реакции зуба совпадает с высотой  $h_d$  конуса (рис. 4), а результирующая сила реакции зуба зависит еще и от скатов бугорков зуба при окклюзии во время жевательного процесса [10]. Как уже отмечалось и показано в [6], в направлении выпуклой области бугорков (рис. 5), расположенных на коронке зуба, также наблюдается определенная упорядоченность ДТ. В результате этого реальная общая геометрическая картина распределения ДТ, что

подтверждается экспериментом, существенно усложняется, а структура конуса, связанная с реальной картиной изменения сопротивления шлифа зуба, отличается от идеального случая изменения сопротивления при круговом аппроксимирующем конусе, приведенном на рис. 4.

Возникает вопрос об особенностях геометрической фигуры, которой можно аппроксимировать реальное распределение ДТ в пределах описанного конуса. Представление о данной геометрической фигуре при сохранении общей картины распространения ДТ от центра сопротивления к бугоркам коронки зуба можно составить согласно рис. 6.

На рис. 6 схематично показано, что в пределах основного конуса ДТ сгущаются в локальных областях в направлении каждого бугорка, расположенного на коронке зуба. Следовательно, распределение ДТ в пределах основного аппроксимирующего конуса модулируется в пространстве по углу в области повышенной концентрации ДТ, ориентированных на бугорок коронки зуба. Причем в направлении бугорков, согласно экспериментам, проведенным проф. В. М. Золотаревым [6], с помощью поляризованного оптического сигнала обнаружены фигуры в виде мальтийского креста, указывающие на локальную упорядоченность ДТ в направлении бугорков коронки зуба в виде фокона. Как показали независимые эксперименты на основе электрического ЗС, которые

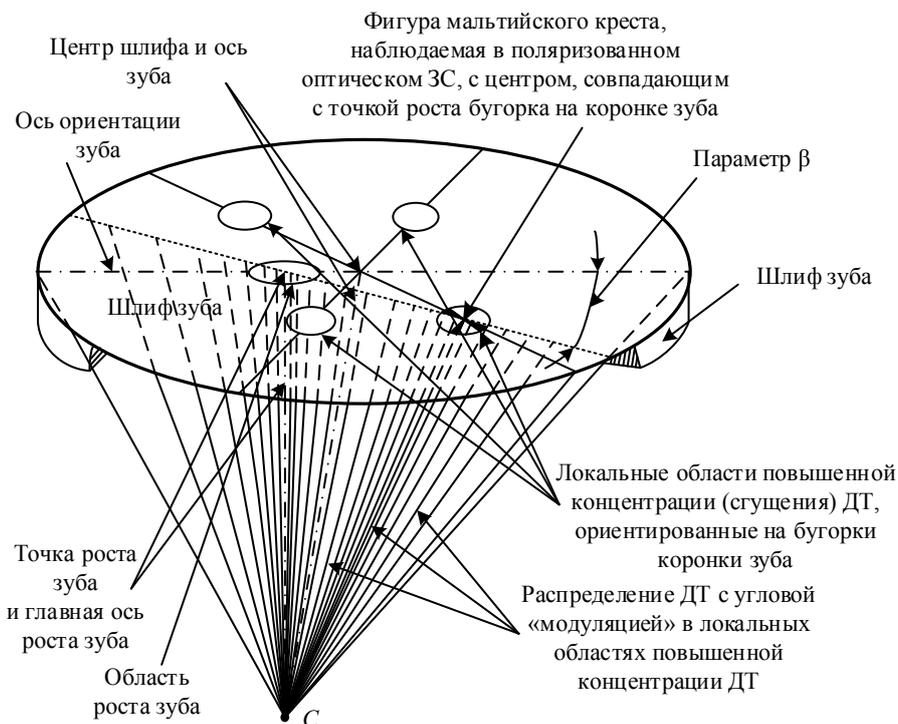


Рис. 6

будут приведены в № 10/2018, наблюдаемые области аномалий измеряемых сопротивлений совпали с теми областями, которые были обнаружены оптически поляризованным сигналом [6]. Заметим, что проведенный анализ относится в основном к молярам и премолярам. Поскольку структура всех зубов привязана к ДТ, то рассмотренный подход к аппроксимации распределения ДТ в зубе можно применить и к другим типам зубов, но при этом параметры аппроксимирующей геометрической фигуры изменятся. Отсутствие в исследовании поиска подобной аппроксимации связано только с недостатком экспериментальных данных.

Таким образом, в реальном зубе параметры одномерной ПРВ ДТ в дентине будут зависеть от выбранного радиального направления сканирования поверхности шлифа. При экспериментах целесообразно, чтобы точка отсчета или начальная точка радиального сканирования совпадала с точкой роста зуба (рис. 6), служащей основанием высоты аппроксимирующего косоугольного конуса. Отсюда следует, что ПРВ угла  $\varphi$  между образующей и высотой конуса при сканировании по радиальной прямой зависит еще и от параметра  $\beta$ , определяющего направление радиального сканирования шлифа при измерении сопротивления в соответствующей точке шлифа (рис. 6). Поскольку ДТ выполняют определенные механические функции, то их структура функционально связана с векторами сил реакции зуба и скатов бугорков [10]. Отсюда логически вытекает следующая связь между векторами силы реакции зуба и силами реакции бугорков: вектор силы реакции зуба, или главная сила реакции зуба, совпадает с главной осью роста, а вспомогательные оси связаны с вспомогательными векторами сил реакции бугорков при окклюзии. Результирующая сила реакции зуба несколько отклоняется от главной оси роста зуба. Именно поэтому точки роста зуба не совпадают с центром шлифа, что и отображено на рис. 6. Из несовпадения оси зуба с главной осью роста зуба, как уже отмечалось, следует ее смещение на величину  $\Delta r$  относительно центра шлифа. В этом случае ось зуба будет наклонена под углом  $\alpha$  относительно перпендикуляра  $h_d$ , опущенного из центра сопротивления зуба в главную точку роста зуба, а ПРВ угла  $\varphi$  будет зависеть от направления сканирования шлифа зуба. Как следует из рис. 6, равномерность ПРВ угла наклона ДТ сохранится только тогда, когда

сканирование электродом поверхности шлифа совпадает с направлением оси ориентации зуба. При этом пределы распределения угла  $\varphi$ , как уже указывалось, будут несимметричны относительно высоты  $h_d$ . В этом случае для косоугольного аппроксимирующего конуса при движении электрода по оси ориентации зуба искомая вероятность (9) преобразуется к виду

$$P(r - r_3 \leq r \leq r + r_3) \approx \begin{cases} \frac{2\mu_3}{(\varphi_{1\max} + \varphi_{2\max}) \arctg \left[ 1 + \left( (\mu + \Delta\mu)^2 - \mu_3^2 \right) \right]}, \\ -\Delta\mu \leq \mu \leq \mu_{\text{ш}}; \\ \frac{2\mu_3}{(\varphi_{1\max} + \varphi_{2\max}) \arctg \left[ 1 + \left( (\mu + \Delta\mu)^2 - \mu_3^2 \right)^2 \right]}, \\ -\mu_{\text{ш}} \leq \mu \leq -\Delta\mu, \end{cases}$$

где  $\mu_{\text{ш}} = r_{\text{ш}}/h_d$ ;  $\mu_3 = r_3/h_d$ ;  $\Delta\mu = \Delta r/h_d$ ;  $\mu = r/h_d$ .

До сих пор определялась вероятность попадания ДТ под площадь электрода, который при радиально-круговом сканировании шлифа смещался по прямой линии, совпадающей с осью ориентации зуба. При определении вероятности попадания ДТ под площадь электрода в соответствии с (10) в случае несовпадения линии сканирования с осью ориентации зуба будет возникать методическая погрешность вычисления из-за отклонения ПРВ угла  $\varphi$  от равномерного закона распределения вероятностей. Для оценки этой методической составляющей погрешности и последующего уточнения ФММ в виде (10) необходимо получить информацию о реальном изменении сопротивления в пределах исследуемого шлифа. С целью получения данной информации на основании патента [11] была разработана портативная аналого-цифровая измерительная система (АЦИС) «Дентометр». Эта система в соответствии со схемой [3, рис. 1] вошла в состав координатно-информационно-измерительного комплекса (КИИК), фотография которого приведена на рис. 7, для выполнения пространственных измерений и последующего введения результатов измерений в компьютер для обработки полученной информации. Согласно рис. 7, искомые значения сопротивлений измерялись с применением строчной развертки

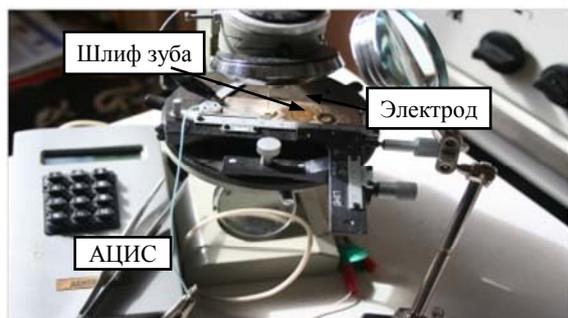


Рис. 7

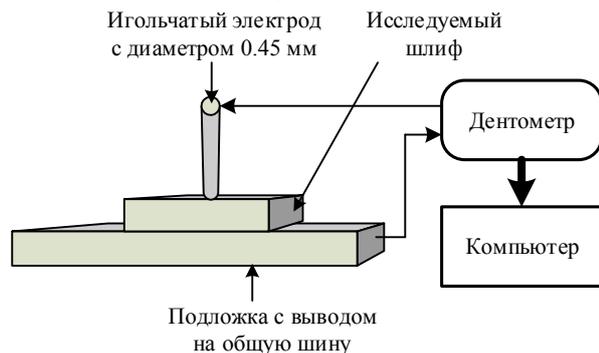


Рис. 8

в дискретных точках шлифа с фиксированными координатами и минимальным шагом дискретизации 0.1 мм с помощью регуляторов установки координат или «водила» (предметного столика, на котором был расположен исследуемый шлиф зуба). Полученные данные автоматически вводились в запоминающее устройство АЦИС с целью

их последующей передачи через разъем USB в компьютер. (Упрощенная схема, поясняющая принцип работы КИИК, представлена на рис. 8.) При этом электролит  $\text{CaCl}_2$  в КИИК поступал в точку контакта электрода со шлифом по полному каналу электрода из специального резервуара, закрепленного в верхней части КИИК (на рис. 7 не показан).

Как показано в статье, ДТ в дентине расходятся под случайным углом от условного центра сопротивления зуба и подчиняются выведенному в статье закону распределения вероятностей, в соответствии с которым электрическое сопротивление возрастает при перемещении электрода от центра к периферии шлифа зуба. Эта закономерность не противоречит экспериментальным данным, полученным на основе рентгеновского ЗС и приведенным в [3]. Однако для последующего уточнения разработанной математической модели и ее идентификации по результатам эксперимента на основе КИИК и электрического ЗС необходима не только дополнительная информация о реальном изменении сопротивления в пределах исследуемого шлифа, но и ее образное пространственное представление. Решение данной задачи с привлечением компьютерной обработки результатов измерения будет рассмотрено далее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Slice Geometric morphometrics: ten years of progress following the «revolution» / C. Dean, F. Adams, R. James, E. Dennis // *Ital. J. Zool.* 2004. Vol. 71. P. 5–16.
2. Павлинов И. Я., Микешина Н. Г. Принципы и методы геометрической морфометрии // *Журн. общей биологии.* 2002. Т. 63, № 6. С. 473–493.
3. Иванова Г. Г., Касумова М. К., Тихонов Э. П. Информационные технологии при идентификации структуры твердых тканей зубов в системном представлении: исходные сведения, анализ достигнутых результатов и общая постановка задачи // *Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ».* 2018. № 5. С. 89–101.
4. Календер В. Компьютерная томография. Основы, техника, качество изображений и области клинического использования. М.: Техносфера, 2006. 344 с.: ил.
5. Ремизов А. Н. Медицинская и биологическая физика: учеб. для мед. спец. вузов. 3-е изд. испр. М.: Высш. шк., 1999. 616 с.: ил.
6. Золотарев В. М. Структурная организация дентиновых трубочек в коронковой зоне зуба // *Ин-т стоматологии.* 2006. № 2 (31). С. 78–80.
7. Тихонов Э. П. Микро- и макроморфология в формировании генезиса твердых тканей зубов // *Ин-т стоматологии.* 2005. № 2 (27). С. 73–77.
8. Быков В. Л. Гистология и эмбриология органов полости рта человека. СПб.: Специальная литература, 1999. 247 с.: ил.
9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / В. Г. Володин, М. П. Ганин, И. Я. Динер и др.; под общ. ред. А. А. Свешникова. М.: Наука, ГРФМЛ, 1965. 632 с.: ил.
10. Шварц А. Д. Биомеханика и окклюзия зубов. М.: Медицина, 1994. 185 с.: ил.
11. Пат. RU № 230608, С2, МПК А61В 5/053. Способ и устройство для диагностики состояния твердых тканей зубов биообъектов / Г. Г. Иванова, В. Н. Иванов, М. К. Касумова, Т. Ш. Мчедлидзе, Э. П. Тихонов (РФ) – № 2005137558/14 (041955); опубл. 10.08.2008. Бюл. № 22.

M. K. Kasumova

*Private Educational Institution of Advanced Professional Education  
«The Saint Petersburg Dental Institute of Postgraduate Training»*

E. P. Tikhonov

*Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»*

## INFORMATION TECHNOLOGIES IN IDENTIFICATION OF TOOTH HARD TISSUE STRUCTURE UNDER SYSTEMIC CONCEPTION: Development of a physical and mathematical model on the basis of an electrical probe signal

*In compliance with Part 1 of the paper, for the development of a physical and mathematical model of the tooth hard tissues (THT) the geometrical cones are sequentially introduced that approximate the dentine tubules (DT) distribution in the tooth hard tissues, and on this basis mathematical dependences describing the THT structure have been obtained. The tops of these cones coincide with the conditional tooth resistance centre, and the cones bases – with the tooth slot surface. The approximation introduced allows, first, to mathematically describe the generalized dominating tendency, as revealed in the experiment, of the DT distribution law in THT, and secondly, to create a reasonable basis for correcting the original approximation so as to account for the DT distribution anisotropy, which was recorded during the study of tooth slots by means of the optical and electrical probe signals (PS). To further solve the problem of identification of mathematical dependences obtained on the PS basis, a short description of a portable analogue-digital Dentometer measuring system is presented, which is an integral part of the coordinate information and measuring complex described in the paper.*

**Physical and mathematical model, tooth hard tissues, distribution of dentine tubules, coordinate information and measuring complex**

---