УДК 621.865.8+63-83

М. П. Белов, Д. Х. Чан, Х. Ф. Чан
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Нелинейное оптимальное управление роботами-манипуляторами в неопределенных условиях

Представлен подход к управлению роботами-манипуляторами при наличии неопределенной динамики из-за неизвестной нагрузки. Робастное управление приведено к эквивалентной оптимальной структуре управления включением ограничений неопределенности в функцию критерия системы, чтобы обеспечить стабильность и оптимальность. Используется оптимальный метод θ-D, чтобы получить закон оптимального управления обратной связью. Оптимальный метод θ-D основан на приближенном решении уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (Г-Я-Б) через процесс возмущения. Решение этого уравнения основано на преобразовании в ряд алгебраических уравнений Ляпунова. Добавлены возмущения к функции критерия качества системы, чтобы обеспечить оптимальность и достичь глобальной стабильности. Регулируемые параметры в компонентах возмущения системы позволяют гибко регулировать производительность системы. Синтезированная задача нелинейного оптимального управления была решена методом θ-D, который обеспечивает приблизительное аналитическое решение обратной связи. Результаты моделирования показали, что этим методом управления робот-манипулятор точно приводится в желаемое положение при больших вариациях нагрузки. Данный метод может быть применен к широкому классу нелинейных динамических систем с неопределенностями.

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, оптимальный метод θ-D, робастное управление, уравнение Риккати

Роботы-манипуляторы – это система динамически многоосевых электромеханических систем, которые широко применяются в автоматизации промышленности. Быстрое и точное управление роботами-манипуляторами – сложная задача, поскольку оно, как правило, представляет собой высоконелинейную динамическую систему, имеющую различные полезные нагрузки и неопределенности в модели. Значительные исследования были направлены на робастное управление роботами-манипуляторами [1]–[3], рассмотренное с точки зрения оптимального управления. Несколько исследователей отметили связь между робастной стабилизацией неопределенных динамических систем и проблемой оптимального управления. Хаддад [2] показал, что функция Ляпунова, гарантирующая замкнутую стабильность неопределенной динамической системы, служит решением стационарного уравнения Г-Я-Б для оптимальной управляемой системы с модифицированной функцией критерия качества, включая границы неопределенности. Лин [3] доказал, что робастная стабилизация задачи нелинейного управления при определенном согласующем условии эквивалентна задаче оптимального управления через правильное определение функции критерия качества, отражающей границы неопределенности.

В этой статье используется метод θ-D [4], чтобы получить закон оптимального управления обратной связью. Метод θ-D основан на приближенном решении уравнения Г-Я-Б через процесс возмущения. Решение уравнения Г-Я-Б может быть преобразовано в ряд алгебраических уравнений Ляпунова. При этом к функции критерия качества системы добавлен ряд возмущений, чтобы обеспечить оптимальность и достичь глобальной стабильности. Синтезирующая задача нелинейного оптимального управления была решена методом θ-D, который обеспечивает приблизительное решение обратной связи и таким образом облегчает реализацию закона оптимального управления. Результаты моделирования показали, что этот новый метод робастного управления приводит манипулятор точно в желаемое положение при различных нагрузках.

Модель динамической системы роботов-манипуляторов. Уравнение Лагранжа, описывающее манипулятор, имеет вид

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+F(\dot{q})+G(q)=\tau, \qquad (1)$$

где $M(q)$, $C(q,\dot{q})\dot{q}$, $F(\dot{q})$, $G(q)$ – матрицы инерции, центробежных и кориолисовых сил, тяжелых сил; сил трения; τ – совокупность внешних сил, действующих на систему; $q,\dot{q}$ – угловые координата и скорость манипулятора.

Уравнение (1) может быть записано также в виде

$$\ddot{q}=-M^{-1}(q)N(q,\dot{q})\dot{q}+M^{-1}(q)\tau, \qquad (2)$$

где $N(q,\dot{q})\dot{q}=C(q,\dot{q})\dot{q}+F(\dot{q})+G(q)$.

Предположим следующие оценки неопределенностей:

$$0<M_{\min}(q)\le M(q)\le M_0(q);$$
$$\|N(q,\dot{q})-N_0(q,\dot{q})\|\le \mathbf{n}_{\max}(q,\dot{q});\ \mathbf{n}_{\max}(0,0)=0.$$

Определяются переменные состояния: $x_1=q=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}$; $x_2=\dot{q}=\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\end{bmatrix}$; $\tau=\begin{bmatrix}\tau_1\\\tau_2\end{bmatrix}$.

Тогда (2) может быть записано также в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_2&=-M^{-1}(x_1)\left[\tau-N(x_1,x_2)\right]=\\&=-M^{-1}(x_1)\left[\tau-N_0(x_1,x_2)\right]+\\&+M^{-1}(x_1)\left[N_0(x_1,x_2)-N(x_1,x_2)\right]=\\&=-M^{-1}(x_1)M_0(x_1)u+M^{-1}(x_1)\times\\&\times\left[N_0(x_1,x_2)-N(x_1,x_2)\right].\end{aligned}$$

Пусть $h(x)=-M^{-1}(x_1)M_0(x_1)-I$; $f(x)=M^{-1}(x_1)\left[N_0(x_1,x_2)-N(x_1,x_2)\right]$; $u(x)=M_0^{-1}(x_1)\times\left[\tau-N_0(x_1,x_2)\right]$,

$$\dot{x}_2=u(x)+h(x)u(x)+f(x),$$

где $h(x)=-M^{-1}(x_1)M_0(x_1)-I$; $f(x)=M^{-1}(x_1)\times\left[N_0(x_1,x_2)-N(x_1,x_2)\right]$ и $u(x)=M_0^{-1}(x_1)\times\left[\tau-N_0(x_1,x_2)\right]$.

Уравнение состояния системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\\dot{x}_2=u+h(x)u+f(x);\end{cases}$$
$$\dot{x}=A_0x+B_0u(x)+h(x)u(x)+B_0f(x), \qquad (3)$$

где $A_0=\begin{bmatrix}0_{2\times2} & I_{2\times2}\\0_{2\times2} & 0_{2\times2}\end{bmatrix}$; $B_0=\begin{bmatrix}0_{2\times2}\\I_{2\times2}\end{bmatrix}$.

Требуется найти такой закон управления обратной связью $u(x)=\tau$, чтобы замкнутая система (3) была асимптотически устойчива для всех неопределенностей $h(x)$ и $f(x)$.

Для задачи определения устойчивости в [3] предлагается решение, как в виде

$$\dot{x}=A(x)+B(x)u(x)+B(x)f(x). \qquad (4)$$

В этом случае требуется такой закон управления обратной связи $u(x)$, чтобы замкнутая система (4) была асимптотически устойчива для ограниченных неопределенностей $f(x)$ и удовлетворяла условию $\|f(x)\|\le f_{\max}(x)$. Для оптимального решения предполагается использование вспомогательной линейной системы с ограничениями неопределенности $f(x)$ в виде

$$\dot{x}=A_0x+B_0u+B_0f(x) \qquad (5)$$

и минимизацией функции критерия качества

$$J=\int_0^\infty\left[f^2{}_{\max}(x)+\|x\|^2+\gamma^2\|u\|^2\right]dt,$$

где $\gamma\ne0$ – регулируемый параметр. Предположим, что $A(0)=0$, $f(0)=0$, функция неопределенности имеет вид $\|f(x)\|^2$ и удовлетворяет условию

$$f^{\mathrm{T}}(x)f(x)\le x^{\mathrm{T}}Px,$$

где P – положительная матрица. При применении теории линейного квадратного регулирования (ЛКР) для решения (5) управление $u=u_0(x)$ находится при минимизации функции критерия качества:

$$J=\int_0^\infty\left[x^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}x+\gamma^2u^{\mathrm{T}}u\right]dt,$$

В этом случае оптимальный вход системы (5) имеет вид $u=-B_0^{\mathrm{T}}Sx$, где S – решение алгебраического уравнения Риккати:

$$A_0^{\mathrm{T}}S+SA_0+P+I-SB_0B_0^{\mathrm{T}}S=0,$$

где $S=\begin{bmatrix}S_1 & S_2\\S_2 & S_3\end{bmatrix}$; $P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\P_2 & P_3\end{bmatrix}$.

В [5] доказали оптимальное решение для нелинейной системы в неопределенных условиях в виде

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u = F\left[x, u(x)\right], \tag{6}$$

где $u(t) = u\left[x(t)\right]$ – управление, удовлетворяющее условию $u(0) = 0$.

Предположим, что существует функция $V'(x)$, такая, что $x \neq 0$,

$$V'(x)F\left[x,u(x)\right] \le V'(x)F\left[x,u(x)\right] + \Gamma\left[x,u(x)\right] < 0.$$

Функция оценки имеет вид

$$J = \int_0^\infty \left[L_1(x) + L_2(x)u + u^{\mathrm{T}}Ru \right] dt .$$

С учетом ограничения неопределенности систему (6) можно преобразовать в следующий вид:

$$\dot{x} = A_0(x) + \Delta A(x) + \left[B_0(x) + \Delta B(x)\right]u. \tag{7}$$

Предположим, что существуют функции $V : R^n \to R$, $L_2 : R^n \to R^{1\times m}$, $\Gamma_{xx} : R^n \to R$, $\Gamma_{xu} : R^n \to R^{1\times m}$ и $\Gamma_{uu} : R^n \to N^{m\times m}$ такие, что $V(0) = 0$, $L_2(0) = 0$, $\Gamma_{xu}(0) = 0$, $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$

$$V(x) > 0,\ x \in R^n,\ x \neq 0, \tag{8}$$

$$V'(x)\left[\Delta A(x) - \frac{1}{2}\Delta B(x) R_*^{-1}(x) V_*(x) \right] \le \Gamma_{xx}(x) - \\ - \frac{1}{2}\Gamma_{xu}(x) R_*^{-1}(x) V_*(x) + \\ + \frac{1}{4} V_*^{\mathrm{T}}(x) R_*^{-1}(x) \Gamma_{uu}(x) R_*^{-1}(x) V_*(x), \tag{9}$$

$$V'(x)\left[A_0(x) - \frac{1}{2} B_0(x) R_*^{-1}(x) V_*(x) \right] < -\Gamma_{xx}(x) + \\ + \frac{1}{2}\Gamma_{xu}(x) R_*^{-1}(x) V_*(x) + \\ + \frac{1}{4} V_*^{\mathrm{T}}(x) R_*^{-1}(x) \Gamma_{uu}(x) R_*^{-1}(x) V_*(x), \tag{10}$$

где $R_*(x) = R(x) + \Gamma_{uu}(x)$ и $V_*(x) = [L_2(x) + \Gamma_{xu}(x) + V'(x)B_0(x)]^{\mathrm{T}}$. Тогда система (7) асимптотически устойчива при всех ограниченных неопределенностях $\Delta A(x)$, $\Delta B(x)$ и имеет закон оптимального управления

$$u(x) = -\frac{1}{2} R_*^{-1}(x) V_*(x). \tag{11}$$

Из (8)–(10) имеем

$$\dot{V}(x) = V'(x)\left\{ A_0(x) + \Delta A(x) + \left[B_0(x) + \Delta B(x)\right] \times \\ \times \left[-\frac{1}{2} R_*^{-1}(x) V_*(x) \right] \right\} < 0. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует:

$$\dot{V}(x) = V'(x)\left\{ A_0(x) + \Delta A(x) + \\ + \left[B_0(x) + \Delta B(x)\right] u(x) \right\} < 0. \tag{13}$$

Функция $V(x)$ является функцией Ляпунова системы (6). Из (8) и (13), согласно теории устойчивости Ляпунова, замкнутая система (6) отлично обеспечивает асимптотическую устойчивость для всех ограниченных неопределенностей.

Оптимальный метод θ-D. Из приведенных рассуждений видно, что установление условий для вычисления функций, удовлетворяющих условиям теоремы Ляпунова, очень сложное. Далее будет представлен оптимальный метод, основанный на оптимальной теории, называемой «тета-D» (θ-D) [4]. Он упростит процесс вычисления закона управления системой. Метод θ-D основан на разложении возмущений системы в ряд. Члены ряда возмущений добавятся к функции критерия качества системы, чтобы компенсировать и устранить эффект возмущения системы и обеспечить стабильность замкнутой системы.

Рассмотрим объект управления, имеющий описание в виде

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u. \tag{14}$$

Оптимальное решение этой задачи может быть получено с помощью решения дифференциального уравнения с частными производными уравнения Г-Я-Б:

$$V_x f(x) - \frac{1}{2} V_x^{\mathrm{T}} B(x) R^{-1} B^{\mathrm{T}}(x) V_x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x = 0,$$

где $V_x = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, $V(x) > 0$, $V(0) = 0$.

Функция оценки качества линейного квадратичного регулятора

$$V(x) = \min \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^{\mathrm{T}} Q x + u^{\mathrm{T}} R u \right) dt ,$$

где Q, R – положительные определенные матрицы.

Вход управления системы имеет вид (11)

$$u = -R^{-1} B^{\mathrm{T}}(x) \frac{\partial V}{\partial x} .$$

Функция оценки качества метода θ-D имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^{\mathrm{T}} \left[Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x + u^{\mathrm{T}} R u \right) dt , \tag{15}$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i$ получена разложением ряда возмущений системы; θ – скалярная величина и D_i – матрица, выбираемые так, что $Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i$ – полуположительное определение, и управление системой в этом случае имеет вид

$$u = -R^{-1} B^{\text{T}}(x) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i x,$$

где $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i x$.

Уравнение (14) можно записать в виде

$$\dot{x} = \left[A_0 + \theta \left(\frac{A(x)}{\theta} \right) \right] x + \left[B_0 + \theta \left(\frac{B(x)}{\theta} \right) \right] u, \quad (16)$$

где A_0, B_0 – постоянные матрицы и управляемая пара.

Тогда решить (16) с критерием качества (15) можно, используя следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^{\text{T}} \left[A_0 + \theta \left(\frac{A(x)}{\theta} \right) \right] x + \frac{1}{2} x^{\text{T}} \left[Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x -$$

$$- \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^{\text{T}} \left[B_0 + \theta \left(\frac{B(x)}{\theta} \right) \right] \times$$

$$\times R^{-1} \left[B_0 + \theta \left(\frac{B(x)}{\theta} \right) \right]^{\text{T}} \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

где $T_i(x, \theta)$ $(i = 0, 1, ..., n)$ – симметричная матрица, полученная с помощью решения рекурсивного алгоритма:

$$T_0 A_0 + A_0^{\text{T}} T_0 - T_0 B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} T_0 + Q = 0, \quad (17)$$

$$T_1 \left(A_0 - B_0 R^{-1} g_0^{\text{T}} T_0 \right) + \left(A_0^{\text{T}} - T_0 B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} \right) T_1 =$$

$$= -\frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^{\text{T}}(x) T_0}{\theta} + T_0 B_0 R^{-1} \frac{B^{\text{T}}(x)}{\theta} T_0 +$$

$$+ T_0 \frac{B(x)}{\theta} R^{-1} B_0^{\text{T}} T_0 - D_1; \quad (18)$$

$$T_n \left(A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} T_0 \right) + \left(A_0^{\text{T}} - T_0 B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} \right) T_n =$$

$$= -\frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^{\text{T}}(x) T_{n-1}}{\theta} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-2} T_j \frac{B(x)}{\theta} R^{-1} \frac{B^{\text{T}}(x)}{\theta} T_{n-2-j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-2} T_j \left[B_0 R^{-1} \frac{B^{\text{T}}(x)}{\theta} + \frac{B(x)}{\theta} R^{-1} B_0^{\text{T}} \right] T_{n-1-j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} T_j B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} T_{n-j} - D_n. \quad (19)$$

Из (17)–(19) видно, что управление зависит от переменного состояния $A(x)$ в правой части. Это приведет к увеличению амплитуды управления системой, так как компоненты $A(x)$ увеличатся и приведут к снижению стабильности системы. Чтобы уменьшить этот эффект, добавим компоненты возмущения в правую часть (17)–(19). D_i выбираются, как рекомендовано в [4]:

$$D_1 = k_1 e^{-l_1 t} \left[-\frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^{\text{T}}(x) T_0}{\theta} \right];$$

$$D_2 = k_2 e^{-l_2 t} \left[-\frac{T_1 A(x)}{\theta} - \frac{A^{\text{T}}(x) T_1}{\theta} + T_1 B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} T_1 \right];$$

$$D_n = k_n e^{-l_n t} \times$$

$$\times \left[-\frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^{\text{T}}(x) T_{n-1}}{\theta} + \sum_{j=1}^{n-1} T_j B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} T_{n-j} \right],$$

где $k_i > 0$, $l_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ – скалярные регулярные параметры.

Шаги для расчета состава ряда $T_i(x, \theta)$ заключаются в следующем:

1) решить алгебраическое уравнение Риккати (17), чтобы получить T_0 с известными матрицами A_0, B_0, Q и R. Заметим, что полученная T_0 – положительно определенная постоянная матрица;

2) решить (18) для получения $T_1(x, \theta)$, где члены $\left(A_0 - B_0 R^{-1} g_0^{\text{T}} T_0 \right), \left(A_0^{\text{T}} - T_0 B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} \right)$ – постоянные матрицы, удовлетворяющие условию $\lambda_{\max} \times \times \left[\left(A_0 - B_0 R^{-1} g_0^{\text{T}} T_0 \right) + \quad + \left(A_0^{\text{T}} - T_0 B_0 R^{-1} B_0^{\text{T}} \right) \right] < 0$, где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение матриц D_i. Пусть $A_{c0} = \ = \left(A_0 \ - \ B_0 R^{-1} g_0^{\text{T}} T_0 \right)$, $\hat{A}_0 = I \otimes A_{c0}^{\text{T}} + A_{c0}^{\text{T}} \otimes I$, где $\otimes$ – символ Кронекера. Из (18) следует, что $\hat{A}_0 T_1 = Q(x, \theta, t)$, или $T_1 = \hat{A}_0^{-1} Q(x, \theta, t)$;

3) аналогично шагу 2 вычисляем T_i $(i = 2, 3, ..., n)$.

В качестве примера рассмотрим модель плоского двухзвенного робота-манипулятора на рис. 1.

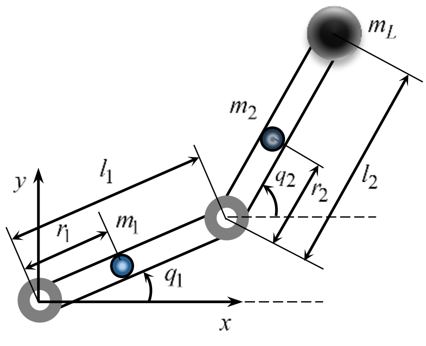


Рис. 1

Для этого робота математическое описание имеет вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) = \tau;$$

$$M_{11}(q_2) = I_1 + I_2 + I_L + m_1 r_1^2 + \\ + m_2\left(l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2 \cos(q_2)\right) + \\ + m_L\left(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2)\right);$$

$$M_{12}(q_2) = M_{21}(q_2) = I_2 + \\ + m_2\left(r_2^2 + l_1 r_2 \cos(q_2)\right) + I_L + m_L\left(l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)\right);$$

$$M_{22}(q_2) = I_2 + m_2 r_2^2 + I_L + m_L l_2^2; \quad I_i = \frac{m_i l_i^2}{3}$$

– инерция i-го звена; $F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1\dot{q}_1 & b_2\dot{q}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -l_1\left(m_2 r_2 + m_L l_2\right)\left(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\dot{q}_2 \sin(q_2) \\ l_1\left(m_2 r_2 + m_L l_2\right)\dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{bmatrix};$$

$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – матрица внешних сил;

$$N(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) = \\ = \begin{bmatrix} -l_1\left(m_2 r_2 + m_0 l_2\right)\left(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\dot{q}_2 \sin(q_2) + b_1\dot{q}_1 \\ l_1\left(m_2 r_2 + m_0 l_2\right)\dot{q}_1^2 \sin(q_2) + b_2\dot{q}_2 \end{bmatrix};$$

q_i – координаты системы; r_i – радиусы центральной массы i-го звена; b_i – коэффициенты трения звеньев; I_L, m_L – инерция и масса нагрузки; m_i, l_i – параметры звеньев $(i = 1, 2)$.

Неопределенность и другие свойства нагрузки приведут к изменениям в матрице инерции $M(q)$ и динамике системы. Для включения этих неопределенностей в конструкцию управления обозначим неизвестную нагрузку как Δm_L, фактическую нагрузку – как $m_L = m_0 + \Delta m_L$.

Вычисления для оптимального решения, зависимого от переменных состояния, сведутся к следующему:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + B_0 f(x),$$

где $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^{\mathrm{T}}$; $G(q) = 0$;

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}; \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} \\ I_{2\times2} \end{bmatrix};$$

$$N_0(x_1, x_2) = \\ = \begin{bmatrix} -l_1\left(m_2 r_2 + (m_0 + \Delta m_L) l_2\right) \times \\ \times\left(2x_3 + x_4\right)x_4 \sin(x_1) + b_1 x_3 \\ l_1\left(m_2 r_2 + (m_0 + \Delta m_L) l_2\right)x_3^2 \sin(x_1) + b_2 x_4 \end{bmatrix};$$

$$f(x) = M^{-1}(x_1)\left[N_0(x_1, x_2) - N(x_1, x_2)\right].$$

Вычисления с использованием оптимального метода θ-D. Неопределенности, отраженные в $M(x)$ и $S(x)$ за счет Δm_L, обозначаются, соответственно, ΔM и ΔS:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -\left(M + \Delta M\right)^{-1}\left(S + \Delta S\right) \end{bmatrix} x + \\ + \begin{bmatrix} 0_{2\times2} \\ \left(M + \Delta M\right)^{-1} \end{bmatrix} \tau + d(x),$$

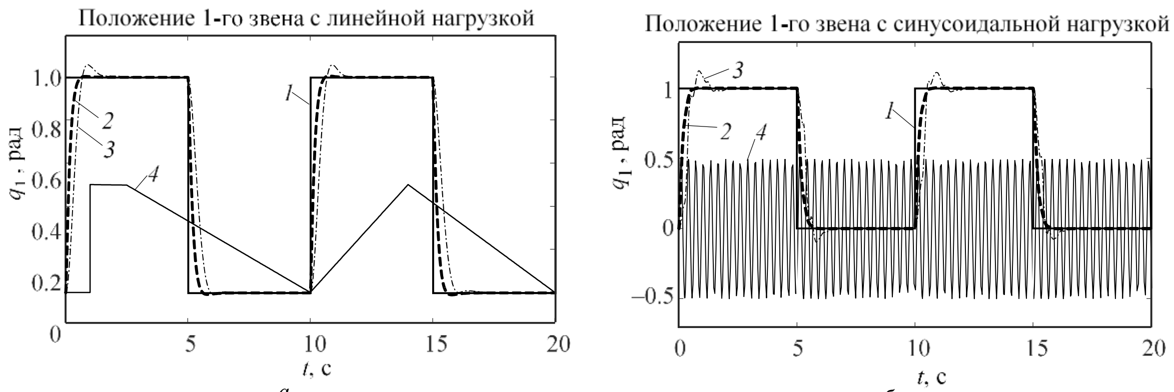
где $d(x)$ – внешнее возмущение.

С неопределенностями и возмущениями уравнение состояния (4) имеет вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -M^{-1}S \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0_{2\times2} \\ M^{-1} \end{bmatrix} \tau + \\ + \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -M^{-1}\Delta S \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0_{2\times2} \\ \Delta M^{-1} \end{bmatrix} \tau + \\ + \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -\Delta M^{-1}\left(S + \Delta S\right) \end{bmatrix} x + d(x).$$

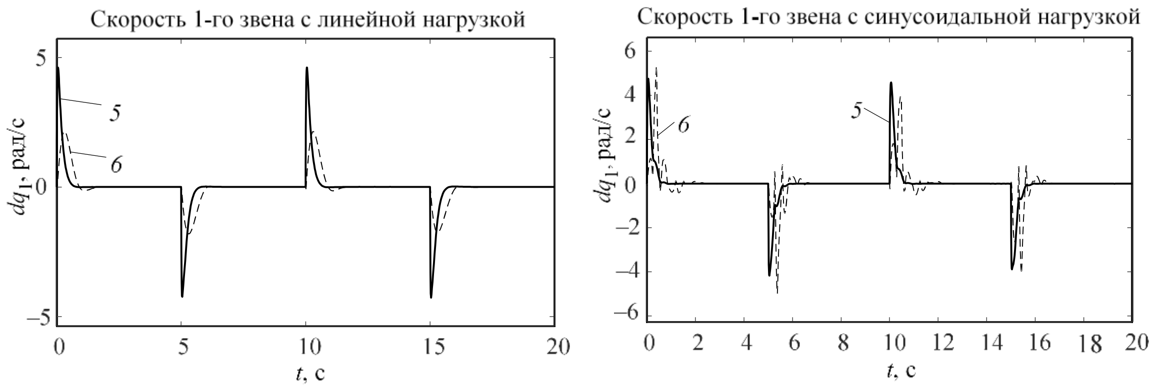
Пусть $A(x) = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -M^{-1}S \end{bmatrix}$; $B(x) = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} \\ M^{-1} \end{bmatrix}$;

$h(x) = M\ \Delta M$;



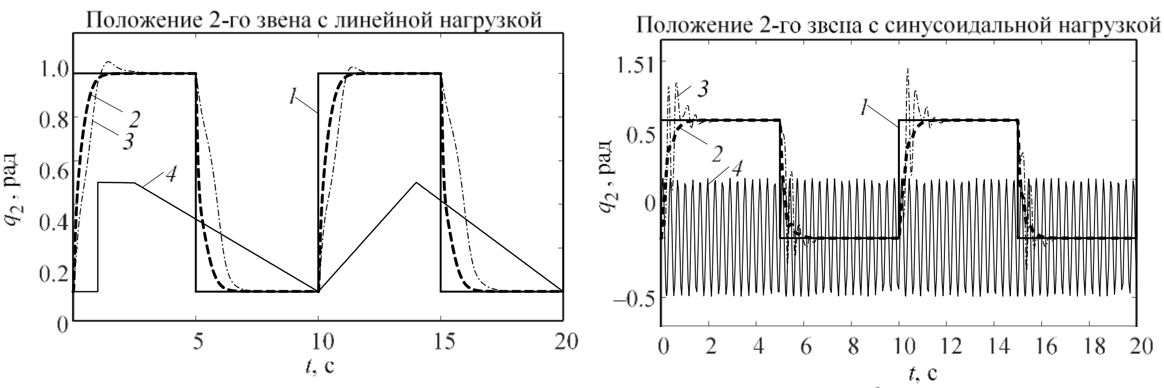
а *б*

Рис. 2



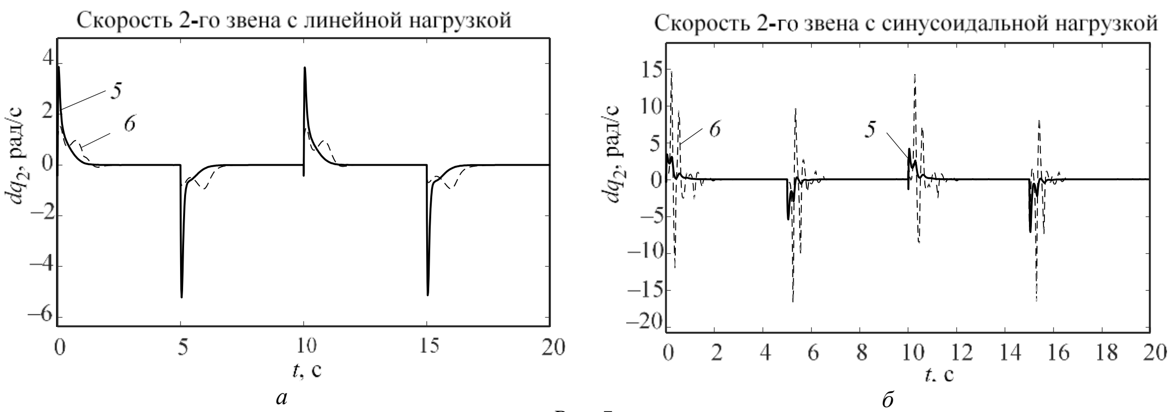
а *б*

Рис. 3



а *б*

Рис. 4



а *б*

Рис. 5

$$D(x) = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -M^{-1}\Delta S \end{bmatrix} x +$$

$$+\begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -\Delta M^{-1}\left(S+\Delta S\right) \end{bmatrix} x + d(x);$$

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)\tau + B(x)h(x)\tau + D(x).$$

Объект моделируется с параметрами, представленными в таблице.

Параметр	Значение	Параметр	Значение
m_1, кг	18	J_2, Н · м	$0.11 \cdot 10^{-3}$
m_2, кг	13	b_1	$3.65 \cdot 10^{-3}$
L_1, м	1.0	b_2	$9.15 \cdot 10^{-3}$
L_2, м	0.5	Δm_L, кг	0…10
J_1, Н · м	$0.44 \cdot 10^{-3}$	m_0, кг	10

Результат моделирования. Модель системы моделируется в среде Matlab/Simulink с вводным сигналом управления в виде квадратного импульса: амплитуда 1.0 рад, период 10 с, ширина импульса 50 %, что соответствует двум случаям нагрузки: линейная вариация нагрузки с амплитудой $\Delta m_L = 10$ кг в трапециевидной форме (левые части на рис. 2–5); синусоидальная вариация нагрузки с амплитудой $\Delta m_L = 10$ кг с частотой 20 рад/с (рис. 2–5, *а*). Результаты моделирования: на рис. 2 – угол поворота первого звена, рис. 3 – скорость поворота 1-го звена, рис. 4 – угол поворота 2-го звена, рис. 5 – скорость поворота 2-го звена.

На рис. 2–5 обозначены: *1* – желаемый вводный сигнал; *2* – выходной сигнал по методу θ-D; *3* – выходной сигнал по методу управления ЛКР; *4* – сигнал нагрузки системы; *5* – выходная скорость по методу θ-D; *6* – выходная скорость по методу ЛКР.

По результатам моделирования можно сделать следующие выводы:

– при использовании трапецеидальной нагрузки до $\Delta m_L = 100\,\%$ от номинальной нагрузки (рис. 2–5, *а*) оба метода управления (метод управления ЛКР и оптимальный метод θ-D) соответствуют критериям качества переходного процесса системы;

– при воздействии синусоидальной нагрузки $\Delta m_L = 100\,\%$ с высокой частотой колебаний 20 рад/с (результат на правых рисунках) для метода управления ЛКР система не соответствует критериям качества оптимальной системы: перерегулирование, колебание и время переходного процесса увеличиваются, а при оптимальном методе θ-D система соответствует критериям качества переходного процесса системы;

– эксперимент проведен в среде Matlab/Simulink при увеличении скорости нагрузки до 100 рад/с система нестабильна при использовании метода управления ЛКР. Для оптимального метода θ-D система обеспечивает оптимальную стабильность в соответствии с критериями качества.

Результаты моделирования показали, что метод θ-D приводит робот-манипулятор точно в желаемое положение при больших вариациях нагрузки. Этот метод управления может быть применен к широкому классу нелинейных динамических систем с неопределенностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника / пер. с англ. Мир. 1989. 624 с.

2. Haddad M. W. Optimal non-linear robust control for non-linear uncertain systems // Intern. J. of Control. 2000. Vol. 73 (4). P. 329–342.

3. Lin F., Olbrot A. W. An LQR approach to robust control of linear systems with uncertain parameters // Decision and Control. IEEE. 1996. Vol. 4. P. 4158–4163.

4. Xin M., Balakrishnan S. N. A new method for suboptimal control of a class of non-linear systems // Optimal Control Applications and Methods. 2005. Vol. 26 (2). P. 55–83.

5. Andreas W., Cook G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem // Automatica. 1975. Vol. 11. P. 75–84.

M. P. Belov, D. K. Tran, Hu. Ph. Tran
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

NONLINEAR OPTIMAL CONTROL OF ROBOTIC MANIPULATORS IN UNCERTAIN CONDITIONS

Robust control approach for robot manipulators in the presence of uncertain dynamics due to the unknown load. The robust control was formulated in an equivalent optimal control framework by incorporating the uncertainty bounds into the cost functional such that both robust stability and optimality can be achieved. The optimal method of θ-D is used to obtain the optimal feedback control law. The optimal method θ-D is based on the approximate solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation (HJB) through the perturbation process. The solution of the HJB equation can be transformed into a series of algebraic Lyapunov equations. Added a part of disturbances to the system cost function to ensure optimality and achieve global stability. Adjustable parameters in the system disturbance components allow for flexible adjustment of system performance. The resulting problem of nonlinear optimal control was solved by the θ-D method, which provides an approximate analytical feedback solution. The simulation results showed that this new robust control is able to drive the manipulator to the desired position precisely under large load variations. This robust control method with an optimal control solution can be applied to a wide range of nonlinear dynamic systems with uncertainties.

Hamilton–Jacobi–Bellman, optimal method θ-D, robust control, Riccati equation