



УДК 621.313

М. А. Ваганов, И. А. Пименова

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Активное и индуктивное сопротивления стержня прямоугольного сечения, расположенного в пазу

Выполнен вывод выражений для активного и индуктивного сопротивлений стержня прямоугольного сечения, расположенного в пазу ротора, при учете эффекта вытеснения тока в верхнюю часть сечения стержня и безотносительно к его материалу. Полученные выражения для сопротивлений стержня позволяют проектировать асинхронные двигатели с необходимой кратностью пускового момента.

Уравнения Максвелла, прямоугольная система координат, напряженность магнитного поля, поверхностный эффект, распределение плотности тока по высоте проводника, активное и индуктивное сопротивления проводника

Наиболее простым с точки зрения практической реализации и, тем не менее, достаточно эффективным способом повышения пускового момента асинхронных короткозамкнутых двигателей является использование явления поверхностного эффекта в стержнях беличьей клетки ротора, расположенных в глубоких пазах. В простейшем случае это могут быть медные или алюминиевые стержни прямоугольного сечения, для которых задача распределения плотности тока по высоте стержня имеет точное аналитическое решение.

Впервые эту задачу решил математик Ф. Эмде, ссылка на которого приведена в [1]. В дальнейшем другими авторами при решении использовался вектор Умова–Пойнтинга, что существенно усложняло сам процесс решения, см., например, [2]. В данной статье предлагается более простой вариант решения, базирующийся непосредственно на использовании понятия плотности тока, и обеспечивающий более четкое физическое объяснение самого явления.

Предположим, что в прямоугольном пазу шириной b расположен массивный проводник прямоугольного сечения (стержень короткозамкнутой обмотки ротора) той же ширины b и высоты h , по которому проходит переменный ток с действующим значением I_0 и круговой частотой ω

$i_0 = I_0 \sqrt{2} \sin \omega t$, создающий свое собственное магнитное поле, силовые линии которого замыкаются поперек паза. Без особой погрешности можно принять бесконечно большой магнитную проницаемость стали, в которой находится рассматриваемый паз. При этом условии силовые линии магнитного поля будут перпендикулярны стенкам паза внутри самого паза. В прямоугольной системе координат, начало которой выбрано в середине основания паза, это магнитное поле будет иметь только одну составляющую H_x по оси x . Ось z перпендикулярна плоскости рисунка. Примем удельную электропроводность материала

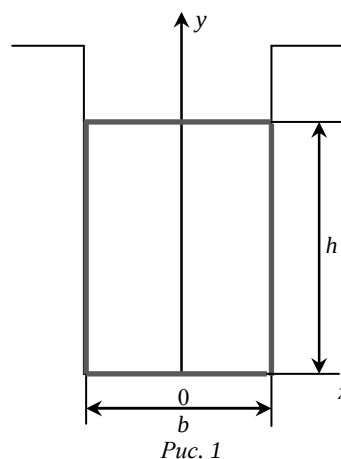


Рис. 1

проводника равной γ , магнитную проницаемость – μ . Необходимо найти распределение плотности тока δ по высоте проводника, а также определить активное сопротивление проводника и его индуктивное сопротивление, обусловленное собственным магнитным полем проводника.

Для решения данной задачи воспользуемся следующей системой уравнений Максвелла, записанных относительно мгновенных значений соответствующих величин в комплексной форме [3]:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}}; \quad (1)$$

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = - \frac{\partial \dot{\vec{B}}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}; \quad \dot{\vec{B}} = \mu \dot{\vec{H}}, \quad (3)$$

где $\dot{\vec{H}}$, $\dot{\vec{B}}$, $\dot{\vec{E}}$ – мгновенные значения комплексных векторов напряженности магнитного поля, магнитной индукции и напряженности электрического поля соответственно.

Мгновенные значения векторов $\dot{\vec{H}}$, $\dot{\vec{B}}$, $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{\delta}}$ при постоянных значениях параметров γ и μ будут меняться во времени по тому же гармоническому закону, что и внешнее магнитное поле амплитуды $\dot{\vec{H}}_{\delta m}$, создаваемое обмоткой статора в воздушном зазоре $\dot{\vec{H}}_{\delta} = \dot{\vec{H}}_{\delta m} e^{j\omega t}$. Обозначая через $\dot{\vec{B}}_m$ амплитуду магнитной индукции в роторе, получим выражение $\dot{\vec{B}} = \dot{\vec{B}}_m e^{j\omega t}$, и тогда

$$\frac{\partial \dot{\vec{B}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\vec{B}}_m e^{j\omega t}) = j\omega \dot{\vec{B}}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{\vec{B}}. \quad (4)$$

Обозначая через $\dot{\vec{H}}_m$, $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{\delta}}_m$ комплексные амплитуды векторов $\dot{\vec{H}}$, $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{\delta}}$, запишем выражения для их мгновенных значений:

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}; \quad \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}; \quad \dot{\vec{\delta}} = \dot{\vec{\delta}}_m e^{j\omega t}. \quad (5)$$

С учетом второго выражения (3), а также (4) и (5) преобразуем систему выражений (1)–(3):

$$\text{rot } \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{\delta}}_m; \quad (6)$$

$$\text{rot } \dot{\vec{E}}_m = - j\omega \mu \dot{\vec{H}}_m; \quad (7)$$

$$\dot{\vec{\delta}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m; \quad \dot{\vec{B}}_m = \mu \dot{\vec{H}}_m. \quad (8)$$

Величину $\dot{\vec{E}}_m$ из первого выражения (8) подставим в (7) и, вводя обозначение

$$\omega \mu \gamma = m^2, \quad (9)$$

преобразуем выражение (7):

$$\text{rot } \dot{\vec{\delta}}_m = - jm^2 \dot{\vec{H}}_m. \quad (10)$$

В свою очередь, величину $\dot{\vec{H}}_m$ из (10) подставим в (6):

$$\text{rot rot } \dot{\vec{\delta}}_m = - jm^2 \dot{\vec{\delta}}_m. \quad (11)$$

Известно, что

$$\text{rot rot } \dot{\vec{\delta}}_m = \text{grad div } \dot{\vec{\delta}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{\delta}}_m. \quad (12)$$

Линии вихревых токов образуют замкнутые кривые и поэтому для плотности вихревых токов справедливо следующее дифференциальное соотношение:

$$\text{div } \dot{\vec{\delta}}_m = 0. \quad (13)$$

При учете условия (13) преобразуем выражение (12) и, подставляя результат в (11), окончательно получим $\nabla^2 \dot{\vec{\delta}}_m = jm^2 \dot{\vec{\delta}}_m$. Раскрывая $\nabla^2 \dot{\vec{\delta}}_m$ в прямоугольной системе координат, получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных

$$\bar{n}_x \frac{\partial^2 \dot{\delta}_{mx}}{\partial x^2} + \bar{n}_y \frac{\partial^2 \dot{\delta}_{my}}{\partial y^2} + \bar{n}_z \frac{\partial^2 \dot{\delta}_{mz}}{\partial z^2} = jm^2 \dot{\vec{\delta}}_m. \quad (14)$$

Проводник или стержень в направлении оси z будем считать достаточно длинным, и поэтому в данном направлении магнитное поле можно принять практически плоскопараллельным. Следовательно, вектор напряженности электрического поля $\dot{\vec{E}}_m = \bar{n}_x \dot{E}_{mx} + \bar{n}_y \dot{E}_{my} + \bar{n}_z \dot{E}_{mz}$ будет иметь только одну составляющую $\dot{E}_{mz}$ в направлении оси z , т. е. $\dot{\vec{E}}_m = \bar{n}_z \dot{E}_{mz}$, а это значит, что в соответствии с первым выражением (8) вектор плотности тока в проводнике также будет иметь только составляющую по оси z $\dot{\vec{\delta}}_m = \bar{n}_z \dot{\delta}_{mz}$. Так как в направлении оси z задача является плоскопараллельной, то $\dot{\delta}_{mz}$ будет функцией только одной переменной y . В соответствии с изложенным выражение (14) примет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\delta}_{mz}}{\partial z^2} = jm^2 \dot{\delta}_{mz} \quad (15)$$

и при дополнительном обозначении $jm^2 = k^2$ выражение (15) примет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\delta}_{mz}}{\partial z^2} - k^2 \dot{\delta}_{mz} = 0.$$

Решение данного уравнения через гиперболические функции запишем в следующей форме:

$$\dot{\delta}_{mz} = C \text{ sh } ky + D \text{ ch } ky. \quad (16)$$

Постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий, которые применительно к данной задаче наиболее просто формулируются относительно магнитного поля. Поэтому необходимо связать составляющие вектора $\dot{\vec{H}}_m$ с $\dot{\delta}_{mz}$.

С этой целью выражение (6) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m &= \bar{n}_x \text{rot}_x \dot{\vec{H}}_m + \bar{n}_y \text{rot}_y \dot{\vec{H}}_m + \\ &+ \bar{n}_z \text{rot}_z \dot{\vec{H}}_m = \dot{\delta}_m = \bar{n}_z \dot{\delta}_{mz} \end{aligned}$$

и отсюда $\text{rot}_z \dot{\vec{H}}_m = \dot{\delta}_{mz}$. В свою очередь, $\text{rot}_z \dot{\vec{H}}_m = \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y}$. Так как магнитное поле в пазу имеет только одну составляющую $\dot{H}_{mx}$, то окончательно получим

$$\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = -\dot{\delta}_{mz} \quad (17)$$

и отсюда $\dot{H}_{mx} = -\int \dot{\delta}_{mz} dy$. Подставляя сюда (16), получим $\dot{H}_{mx} = \frac{C}{k} \text{ch } ky - \frac{D}{k} \text{sh } ky$.

Напряженность магнитного поля $\dot{H}_{mx} = 0$ при $y = 0$, т. е. на дне паза (если не учитывать магнитное сопротивление стали), что будет возможно, если $C = 0$, т. е. на верхней грани проводника при $y = h$ $\dot{H}_{mx}$ должна равняться начальному магнитному полю $\dot{H}_{\delta m}$, и тогда $D = -k\dot{H}_{\delta m}/\text{sh } kh$.

Таким образом, напряженность собственного магнитного поля массивного проводника с током в пределах высоты этого проводника будет определяться выражением

$$\dot{H}_{mx} = \dot{H}_{\delta m} \frac{\text{sh } ky}{\text{sh } kh}.$$

Отсюда видно, что напряженность магнитного поля массивного проводника достаточно быстро возрастает по его высоте (по закону гиперболического синуса) от нуля на его нижней поверхности до наибольшего значения $\dot{H}_0$ на верхней границе проводника. При $y > h$ напряженность магнитного поля остается постоянной и равной $\dot{H}_0$ в соответствии с законом полного тока.

Плотность тока в соответствии с выражением (17)

$$\dot{\delta}_{mz} = -\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = -k\dot{H}_{\delta m} \frac{\text{ch } ky}{\text{sh } kh}. \quad (18)$$

Преобразуем с учетом (9) выражение для $\dot{k} = m\sqrt{j}$. Так как $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j\pi/2}} = e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, то $\dot{k} = m(1+j)/\sqrt{2} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \times (1+j) = k(1+j)$, где $k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$. Подставляя $\dot{k} = k(1+j)$ в выражение (18), получим

$$\dot{\delta}_{mz} = -k(1+j) \dot{H}_{\delta m} \frac{\text{ch } k(1+j)y}{\text{sh } k(1+j)h}. \quad (19)$$

Электрические потери в проводнике на единицу его длины, обусловленные переменным током, распределенным по сечению (высоте) этого проводника с плотностью $\dot{\delta}_{mz}$, определяются выражением

$$\tilde{P}_{\text{эл}} = bl \int_0^h \frac{\delta_{mz}^2}{2\gamma} dy. \quad (20)$$

Обозначим через $\dot{\delta}_{mz}^*$ комплексно-сопряженную величину относительно $\dot{\delta}_{mz}$, и тогда квадрат плотности тока δ_{mz}^2 можно представить как модуль произведения сопряженных величин $\delta_{mz}^2 = |\dot{\delta}_{mz} \dot{\delta}_{mz}^*|$ и, подставив сюда выражения (19) и ему сопряженное, после преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta_{mz}^2 &= 2k^2 H_{\delta m}^2 \frac{\text{ch } k(1+j)y \text{ch } k(1-j)y}{\text{sh } k(1+j)h \text{sh } k(1-j)h} = \\ &= 2k^2 H_{\delta m}^2 \frac{\text{ch } 2ky + \cos 2ky}{\text{ch } 2kh - \cos 2kh}. \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (20) и выполнив интегрирование, окончательно получим

$$\tilde{P}_{\text{эл}} = \frac{1}{2} bl \frac{k}{\gamma} H_{\delta m}^2 \frac{\text{sh } 2kh + \sin 2kh}{\text{ch } 2kh - \cos 2kh}.$$

Данное выражение определяет электрические потери в стержне, обусловленные переменным током с действующим значением I_0 при учете неравномерного распределения его плотности по высоте стержня, обусловленного поверхностным эффектом.

Электрические потери в этом же стержне, обусловленные тем же самым переменным током с действующим значением I_0 , но при равномерном распределении его по сечению стержня (или, что то же самое, электрические потери в этом стержне, вызванные постоянным током силой I_0), будут определяться выражением

$$\bar{P}_{\text{эл}} = lbh \frac{\delta_{m0}^2}{\gamma} = \frac{lbh}{\gamma} \left(\frac{I_0}{bh} \right)^2.$$

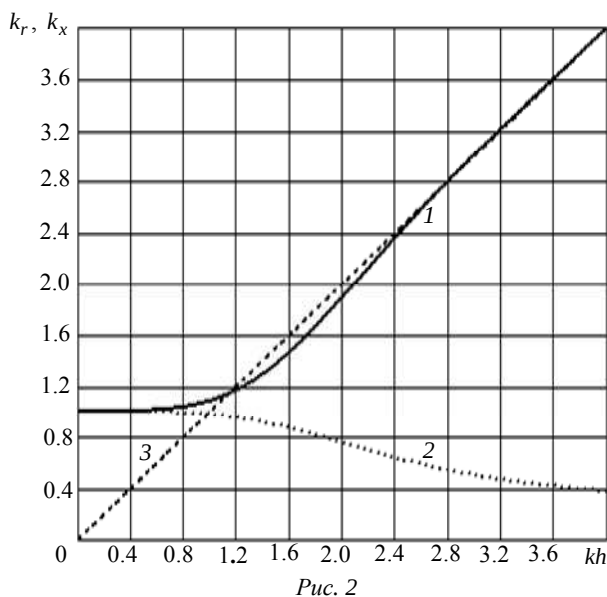
Так как в соответствии с законом полного тока (если не учитывать падение магнитного потенциала в зубцах) $H_{\delta mb} = I_0 \sqrt{2}$, то $\bar{P}_{\text{эл}} = \frac{lb}{2\gamma h} H_{\delta m}^2$.

Увеличение активного сопротивления стержня на переменном токе из-за неравномерного распределения его плотности по сечению стержня по отношению к сопротивлению этого же стержня на постоянном токе (когда ток распределен равномерно по сечению стержня) учитывается коэффициентом Фильда $k_r = \bar{P}_{\text{эл}} / \bar{P}_{\text{эл}}$, который в данном случае определяется выражением

$$k_r = kh \frac{\text{sh } 2kh + \sin 2kh}{\text{ch } 2kh - \cos 2kh}.$$

Зависимость коэффициента $k_r = f(kh)$ представлена на рис. 2 (сплошная кривая 1). В качестве аргумента удобно выбрать произведение kh , так как при этом учитываются электромагнитные свойства проводника, его высота и частота тока в проводнике. Штриховая прямая 3 на рис. 2 является аппроксимацией по отношению к зависимости $k_r = f(kh)$ при резко выраженном поверхностном эффекте.

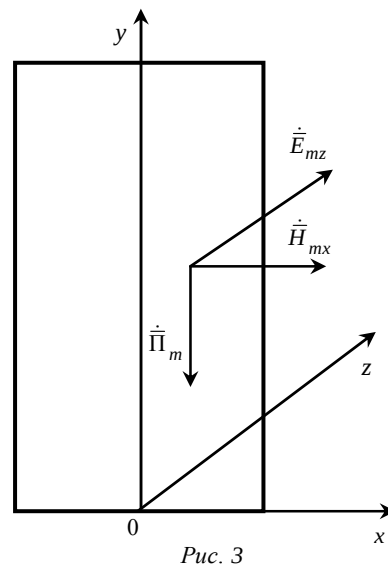
Вывод выражения для коэффициента k_x , учитывающего влияние поверхностного эффекта на индуктивное сопротивление стержня, распо-



ложенного в пазу, выполним, используя вектор Умова–Пойнтинга в комплексной форме записи $\dot{\vec{\Pi}}_m$ (рис. 3). Поток вектора $\dot{\vec{\Pi}}_m$ определяет полную электромагнитную мощность в комплексной форме записи $\dot{S}$, передаваемую через некоторую поверхность Q . Этот поток принимается положительным, если угол между вектором $\dot{\vec{\Pi}}_m$ и единичным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности меньше $\pi/2$, т. е. $\dot{S} = \frac{1}{2} \iint_Q \dot{\vec{\Pi}}_m d\vec{Q}$, где вектор элемента поверхности $d\vec{Q} = dQ \vec{n}$. Числовой коэффициент $1/2$ перед знаком интеграла обусловлен тем, что мощность определяется действительными значениями соответствующих величин, в то время как вектор $\dot{\vec{\Pi}}_m$ представляет собой комплексную амплитуду.

Вектор Умова–Пойнтинга определяется векторным произведением $\vec{\Pi}_m = \vec{E}_m \times \vec{H}_m$, из чего следует, что вектор $\dot{\vec{\Pi}}_m$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{E}_m = \vec{E}_{mz}$ и $\vec{H}_m = \vec{H}_{mx}$, и образует с ними правовинтовую систему.

В данном случае вектор $\vec{E}_m = \vec{n}_z \vec{E}_{mz}$, т. е. имеет единственную составляющую по оси z , а вектор $\vec{H}_m = \vec{n}_x \vec{H}_{mx}$ — составляющую по оси x , и поэтому вектор $\dot{\vec{\Pi}}_m$ будет ориентирован в отрицательном направлении оси y .



Рассмотрим элемент длиной l стержня (рис. 4). Так как вектор $\dot{\vec{P}}_m$ ориентирован в направлении оси y , то для боковых и торцевых граней элемента стержня скалярные произведения $\dot{\vec{P}}_m d\vec{Q}$ будут равны нулю. Тогда электромагнитная мощность, поступающая в элемент стержня, будет определяться только его верхней Q_B и нижней Q_H гранями

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \iint_{Q_B} \dot{\vec{P}}_m d\vec{Q} + \frac{1}{2} \iint_{Q_H} \dot{\vec{P}}_m d\vec{Q}.$$

Причем на верхней грани вектор $\dot{\vec{P}}_m$ и внешняя нормаль к поверхности Q_B находятся в противофазе и поэтому $\dot{\vec{P}}_m d\vec{Q} < 0$, а на нижней грани Q_H вектор $\dot{\vec{P}}_m$ и нормаль $\vec{n}$ находятся в фазе и $\dot{\vec{P}}_m d\vec{Q} > 0$. В результате получим $\dot{S} = -\frac{1}{2} \times \iint_{Q_B} \dot{\vec{P}}_m d\vec{Q} + \frac{1}{2} \iint_{Q_H} \dot{\vec{P}}_m d\vec{Q}$.

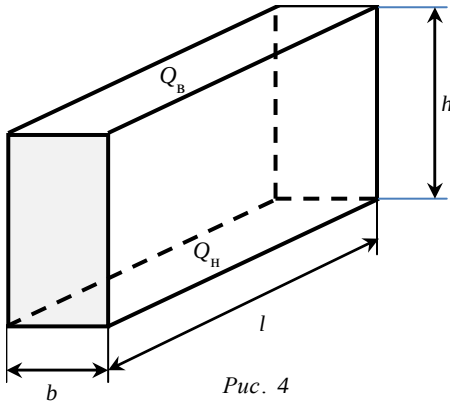


Рис. 4

В комплексной форме записи $\dot{\vec{P}}_m = \dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^*$, и тогда

$$\dot{S} = -\frac{1}{2} \iint_{Q_B} \dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^* dQ + \frac{1}{2} \iint_{Q_H} \dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^* dQ. \quad (21)$$

На поверхностях Q_B и Q_H величины $\dot{E}_{mz}$ и $\dot{H}_{mx}$ постоянные и могут быть вынесены за знак интеграла. Площади верхней и нижней граней одинаковы и составляют bl . Вычислив интеграл в (21) при условии, что для верхней грани $y = h$, а для нижней $y = 0$, получим

$$\dot{S} = \frac{1}{2} bl \left\{ -\dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^* \Big|_{y=h} + \dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^* \Big|_{y=0} \right\}.$$

Напряженность электрического поля $\dot{E}_{mz} = \dot{\delta}_{mz} / \gamma$ и при учете (19)

$$\dot{E}_{mz} = -k(1+j) \dot{H}_{\delta m} \frac{\operatorname{ch} k(1+j)y}{\operatorname{sh} k(1+j)h} \frac{1}{\gamma}. \quad (22)$$

Напряженность магнитного поля из выражения (18) $\dot{H}_{mx} = -\int \dot{\delta}_{mz} dy$ и с учетом (19)

$$\dot{H}_{mx} = \dot{H}_{\delta m} \frac{\operatorname{sh} k(1+j)y}{\operatorname{sh} k(1+j)h}, \quad \dot{H}_{mx}^* = \dot{H}_{\delta m}^* \frac{\operatorname{sh} k(1-j)y}{\operatorname{sh} k(1-j)h}.$$

Вычислим произведение

$$\dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^* = (1+j) \frac{k H_{\delta m}^2}{\gamma} \frac{\operatorname{sh} 2ky - j \sin 2ky}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}.$$

Имея в виду, что при $y=0$ $\dot{E}_{mz} \dot{H}_{mx}^* = 0$, для электромагнитной мощности получим выражение

$$\dot{S} = (1+j) blk \frac{H_{\delta m}^2}{2\gamma} \frac{\operatorname{sh} 2kh - j \sin 2kh}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}.$$

Вещественная часть этого выражения определяет электрические потери в стержне, а мнимая часть характеризует реактивную мощность $\dot{Q}$, а именно

$$\dot{Q} = \operatorname{Im} \dot{S} = blk \frac{H_{\delta m}^2}{2\gamma} \frac{\operatorname{sh} 2kh - \sin 2kh}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}. \quad (23)$$

С другой стороны, эта же мощность может быть выражена через индуктивное сопротивление рассеяния x стержня $Q = x I_0^2$. На основании закона полного тока $H_{\delta m} b = I_0 \sqrt{2}$ и тогда

$$Q = \frac{1}{2} x H_{\delta m}^2 b^2. \quad (24)$$

Приравняв правые части выражений (23) и (24), после преобразований получим следующее выражение для индуктивного сопротивления стержня x : $x = \frac{kl}{\gamma b} \frac{\operatorname{sh} 2kh - \sin 2kh}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}$. Так как $x = \omega \tilde{L}$,

то отсюда индуктивность на переменном токе $\tilde{L} = x / \omega$ и окончательно $\tilde{L} = \frac{kl}{\omega \gamma b} \frac{\operatorname{sh} 2kh - \sin 2kh}{\operatorname{ch} 2kh - \cos 2kh}$.

Составим выражение для индуктивности этого же стержня, расположенного в пазу, но при условии, что по нему проходит постоянный ток I_0 и плотность тока $\delta = I_0 / (bh)$ распределена равномерно по сечению стержня. При ненасыщенной магнитной системе силовые линии перпендикулярны стенкам паза. На основании закона полного тока, записанного для силовой линии, пересекающей

паз на высоте y , магнитная индукция в стержне $B_x = \mu_0 H_x = \mu_0 I_0 y / (bh)$. Магнитный поток $d\Phi$ единичной силовой трубки высотой dy и сечением $l dy$ и проходящей на высоте y , определяется выражением $d\Phi = B_x l dy$. Потокосцепление этой силовой трубки $d\Psi = \frac{y}{h} d\Phi = \mu_0 I_0 \frac{l}{b} \left(\frac{y}{h}\right)^2 dy$.

Полное потокосцепление стержня

$$\Psi = \int_0^h d\Psi = \int_0^h \mu_0 I_0 \frac{l}{b} \left(\frac{y}{h}\right)^2 dy = \frac{1}{3} \mu_0 I_0 \frac{l}{b} h = \bar{L} I_0,$$

где $\bar{L}$ представляет собой индуктивность стержня на постоянном токе, которая будет определяться выражением

$$\bar{L} = \frac{1}{3} \mu_0 \frac{l}{b} h.$$

Составим отношение $\tilde{L}/\bar{L} = k_x$, коэффициент, учитывающий уменьшение индуктивного сопротивления стержня из-за поверхностного эффекта и определяемый выражением

$$k_x = \frac{3}{2kh} \frac{\text{sh } 2kh - \sin 2kh}{\text{ch } 2kh - \cos 2kh}.$$

Зависимость $k_x = f(kh)$ представлена на рис. 2 (пунктирная кривая 2). На постоянном токе, когда $\omega = 0$ и параметр $k = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \gamma} = 0$, $k_r = k_x = 1$. Повышение частоты ω тока в стержне сопровождается увеличением коэффициента k_r (активное сопротивление стержня возрастает) и снижением коэффициента k_x (индуктивное сопротивление стержня уменьшается). При частоте $f_1 = 50$ Гц имеем для медных стержней $kh = 106 h$ и для алюминиевых $kh = 81 h$, где h – высота стержня в метрах. Можно считать, что резкое проявление эффекта вытеснения тока в верхние слои проводника

или стержня начинается при $kh \geq 1.6$. Практически же влияние эффекта вытеснения тока у медных стержней начинает проявляться при $h > 0.01$ м ($kh = 1$), а у алюминиевых – при $h > 0.012$ м.

Аргумент функций, определяющих коэффициенты k_r и k_x , зависит от частоты ω тока в стержне, магнитной проницаемости μ материала стержня, от его удельной электропроводности γ , а также от высоты стержня h , с увеличением которых данный аргумент возрастает. Важно, что поверхностный эффект проявляется, во-первых, при промышленной частоте $f_1 = 50$ Гц, что имеет большое практическое значение, во-вторых, при небольшой высоте стержня (значения указаны в тексте), которая может быть реализована в асинхронных двигателях небольшой мощности, и, в третьих, за счет использования таких традиционных для электромашиностроения проводниковых материалов, как медь и алюминий. Реализация этих трех факторов обеспечивает повышение пускового момента асинхронного двигателя без привлечения каких-либо дополнительных конструктивных усовершенствований. Кроме того, рассматриваемый аргумент не зависит от ширины стержня, что открывает дополнительные возможности за счет ее увеличения снизить рассеяние обмотки ротора и, как следствие, повысить жесткость механической характеристики проектируемого двигателя и его коэффициент мощности.

Представленные аналитические зависимости для коэффициентов k_r и k_x позволяют, во-первых, рассчитать механическую характеристику асинхронного двигателя на этапе его проектирования и, во-вторых, спроектировать этот двигатель с необходимым значением пускового момента, заранее оценив необходимую высоту стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольдек А. И. Электрические машины. Л.: Энергия. Лен. отд-ние, 1974. 839 с.
2. Инкин А. И. Электромагнитные поля и параметры электрических машин. Новосибирск: Изд-во ЮКЭА, 2002. 464 с.
3. Ваганов М. А., Купчик Н. В. Электромагнитный момент асинхронного двигателя с массивным ферромагнитным ротором // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2012. № 7. С. 76–83.

M. A. Vaganov, I. A. Pimenova
Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

ACTIVE AND INDUCTIVE RESISTANCE LOCATED IN A GROOVE OF A RECTANGULAR ROD

Derivation of expressions was performed for active and inductive resistance of a rectangular rod, located in a groove of a rotor, in accounting of the effect of current displacement into the upper part of the rod section and regardless of its material. The expressions obtained for the rod resistance allow to design asynchronous motors with the required starting torque multiplicity.

Maxwell's equations, rectangular coordinate system, magnetic field intensity, surface effect, distribution of current density on the height of the conductor, active and inductive resistance of the conductor