УДК 517.977

А. Ю. Александров, А. В. Платонов
Санкт-Петербургский государственный университет

Анализ устойчивости решений одного класса нелинейных гибридных систем

Рассматривается гибридная система, состоящая из семейства нелинейных подсистем специального вида и закона переключения между ними. Предполагается, что нулевое решение каждой из подсистем асимптотически устойчиво. Определяются классы допустимых законов переключения, при которых нулевое решение соответствующей гибридной системы также будет асимптотически устойчиво.

Системы с переключениями, устойчивость, функции Ляпунова

Многие задачи теории управления приводят к исследованию систем с переключениями [1], [2]. Система с переключениями представляет собой гибридную динамическую систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем является активной. Системы такого рода широко применяются в задачах управления механическими, энергетическими, электроэнергетическими системами, при управлении технологическими процессами [2]. Переключения могут вызываться меняющимися внешними факторами, воздействующими на систему. Кроме того, в последние годы активно развиваются методы управления техническими объектами посредством логико-динамических устройств, способных переключаться в разные режимы функционирования в зависимости от возникающей ситуации. Например, переключающиеся тиристоры и диоды широко используются в электрических цепях.

Одной из важных проблем, связанных с проектированием систем с переключениями, является проблема устойчивости. Основной метод анализа устойчивости таких систем – это прямой метод Ляпунова. Для того чтобы с его помощью доказать асимптотическую устойчивость, равномерную относительно закона переключения, достаточно построить общую функцию Ляпунова для всех индивидуальных подсистем, соответствующих рассматриваемой системе [1]. В тех случаях, когда общую функцию Ляпунова построить не удается, обеспечить асимптотическую устойчивость можно наложением дополнительных ограничений на закон переключения (dwell-time approach) [3].

Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(x_1), ..., f_n(x_n)\right)^T$, скалярные функции $f_i(x_i)$ заданы и непрерывны при $|x_i| < \Delta$ ($0 < \Delta \le +\infty$) и обладают свойством $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i = 1, ..., n$; $\sigma = \sigma(t)$ – кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t) : [0, +\infty) \to Q = \{1, \ldots, N\}$; $\mathbf{P}_s = \left\{p_{ij}^{(s)}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – постоянные матрицы, $s = 1, \ldots, N$. Таким образом, в каждый момент времени работа исследуемой системы описывается одной из подсистем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_s \mathbf{f}(\mathbf{x}), \; s = 1, \; \ldots, N. \tag{2}$$

Системы вида (2) широко применяются при изучении систем автоматического регулирования [4]. Они также используются при моделировании нейронных сетей [4].

Система (1) имеет нулевое решение. Обозначим через θ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ моменты переключений между подсистемами $(0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots)$. Пусть

$\theta_0 = 0$, функция $\sigma(t)$ в точках разрыва непрерывна справа, а последовательность $\theta_1, \theta_2, \ldots$ является минимальной, т. е. $\sigma(\theta_i) \neq \sigma(\theta_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, будем рассматривать только такие законы переключения, для которых функция $\sigma(t)$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет бесконечное количество точек разрыва, а на любом ограниченном промежутке их может быть только конечное число.

В работе [5] были получены достаточные условия, при выполнении которых для семейства подсистем (2) существует общая функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом предлагалось несколько возможных вариантов построения такой функции Ляпунова.

В настоящей статье рассмотрим случай, когда установленные в [5] условия существования для подсистем (2) общей функции Ляпунова не выполнены. Тогда применим к системе (1) второй подход, описанный ранее (dwell-time approach). Будем считать, что моменты переключения $\theta_1, \theta_2, \ldots$ известны, а порядок, в котором происходит смена режимов функционирования гибридной системы, в общем случае – нет.

Далее в настоящей статье на правые части уравнений (2) накладываются некоторые дополнительные ограничения.

Предположение 1. Пусть для каждого значения индекса $s \in \{1, \ldots, N\}$ существуют положительные числа $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}$, при которых матрица $\mathbf{P}_s^T \mathbf{\Lambda}_s + \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{P}_s$ отрицательно определена. Здесь $\mathbf{\Lambda}_s = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}\}$.

Замечание 1. Условия существования таких значений $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}$ исследовались во многих работах (см., например, [4], [5] и цитируемую там литературу).

Замечание 2. Если выполнено предположение 1, то для каждого $s \in \{1, \ldots, N\}$ нулевое решение s-й подсистемы из (2) асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$, причем для этой подсистемы функция $V_s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau$ удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если бы указанные значения $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}$ удалось подобрать одинаковыми для всех $s \in \{1, \ldots, N\}$, то это бы означало, что для подсистем (2) построена общая функция Ляпунова. Однако условия существования такой общей функции являются гораздо более жесткими, нежели условия существования своей частной функции Ляпунова для каждой отдельной подсистемы.

Предположение 2. Пусть функции $f_j(x_j)$ представимы в виде $f_j(x_j) = \alpha_j x_j^{\mu_j} + h_j(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, где α_j – положительные постоянные; μ_j – положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, а функции $h_j(x_j)$ обладают свойством $h_j(x_j) / x_j^{\mu_j} \to 0$ при $x_j \to 0$.

Замечание 3. Не умаляя общности, будем считать, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$, а $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$.

Случай, когда $\mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu$, исследовался в [3] для $\mu = 1$ и в [6] для $\mu > 1$. В [7] предполагалось, что $1 < \mu_1 < \mu_n$. В настоящей статье рассмотрим случай, когда $\mu_1 < \mu_n = 1$. Этот случай интересен тем, что однородные функции порядка однородности, меньшего единицы, широко используются в современной теории управления в качестве стабилизирующих управлений, обеспечивающих выход возмущенных решений на заданные программные режимы за конечное время (finite-time stability) [8], [9]. Кроме того, такие функции могут применяться для обеспечения асимптотической устойчивости линейных систем в случаях, когда для изучаемых систем не существует линейных стабилизирующих управлений [9].

Условия устойчивости. Согласно предположению 2 подсистемы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} x_j^{\mu_j} \quad (i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N) \qquad (3)$$

можно рассматривать в качестве первого, в широком смысле, приближения для подсистем (2). Исследуем далее устойчивость нулевого решения гибридной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\sigma)} x_j^{\mu_j}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Построим функции Ляпунова для подсистем из совокупности (3) в виде

$$V_s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \frac{x_i^{\mu_i+1}}{\mu_i+1}, \quad s = 1, \ldots, N .$$

Возьмем в качестве коэффициентов $\lambda_1^{(s)},\ldots,\lambda_n^{(s)}$ числа из предположения 1. Тогда производная функции $V_s(\mathbf{x})$ в силу s-й подсистемы из (3) будет отрицательно определенной, $s = 1, \ldots, N$. Нетрудно показать, что для любого $H_1 > 0$ число $\beta_1 > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\|\mathbf{x}\| < H_1$ указанные производные удовлетворяли соотношениям

$$\dot{V}_s \le -\beta_1 V_s, \quad s = 1, \ \ldots, N. \qquad (5)$$

Аналогично для любого $H_2 > 0$ число $\beta_2 > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\|\mathbf{x}\| > H_2$ выполнялись неравенства

$$\dot{V}_s \le -\beta_2 V_s^{1+\rho}, \ s = 1, \ldots, N. \qquad (6)$$

Здесь $\rho = (\mu_1 - 1)/(\mu_1 + 1)$.

Положим

$$c = \max_{i=1,\ldots,n} \ \max_{s,j=1,\ldots,N} (\lambda_i^{(s)} / \lambda_i^{(j)}), \qquad b = c^{-\rho}.$$

Тогда $c \ge 1$, и для любых $\mathbf{x} \in R^n$ имеем

$$V_s(\mathbf{x}) \le c V_j(\mathbf{x}), \ s, \ j = 1, \ldots, N.$$

Замечание 4. Если $c = 1$, то $V_1(\mathbf{x}) \equiv \ldots \equiv V_N(\mathbf{x})$, т. е. для подсистем (3) построена общая функция Ляпунова. В этом случае при любом законе переключения нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво в целом. Поэтому далее считаем, что $c > 1$.

Пусть $T_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Построим вспомогательные функции. Положим $\varphi(m,1) = \chi(m,1) = 0$, $\varphi(m,k) = \sum_{i=1}^{k-1} T_{m+i} b^{-i}$, $\chi(m,k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} T_{m+i}$ при $k = 2, 3, \ldots;$ $m = 1, 2, \ldots$.

Зададим некоторое $H_1 > 0$. По этому числу найдем такое $\beta_1 > 0$, что в области $G_1 = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| < H_1\}$ справедливы оценки (5).

Используя известные частные функции $V_1(\mathbf{x})$, …, $V_N(\mathbf{x})$, строим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})$ [3], соответствующую закону переключения $\sigma(t)$.

Выберем начальный момент времени $t_0 \ge 0$ и начальную точку $\mathbf{x}_0 \in G_1$, $\mathbf{x}_0 \ne \mathbf{0}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (4), выходящее при $t = t_0$ из точки $\mathbf{x}_0$. Найдем натуральное число m, такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$.

Если на промежутке $[t_0, t]$ решение $\mathbf{x}(t)$ содержится в области G_1, то тогда, интегрируя дифференциальные неравенства (5), получаем оценки: $V_{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{x}(t)) \le V_{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{x}_0) e^{-\beta_1(t-t_0)}$ при $t \in [t_0, \theta_m)$, $V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\mathbf{x}(t)) \le V_{\sigma(\theta_{m-1})} \times \times (\mathbf{x}_0) e^{k \ln c - \beta_1(t-t_0)}$ при $t \in [\theta_{m+k-1}, \ \theta_{m+k})$, $k \ge 1$.

Учитывая, что $t - t_0 = (t - \theta_{m+k-1}) + k\chi(m,k) + +(\theta_m - t_0)$ при $t \in [\theta_{m+k-1}, \ \theta_{m+k})$, $k \ge 1$, имеем, что если

$$\chi(m,k) \to +\infty \quad \text{при } k \to +\infty \qquad (7)$$

для любых $m = 1, 2, \ldots$, то нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво. А если предельное соотношение (7) выполнено равномерно относительно $m \in \{1, 2, \ldots\}$, то нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво.

Замечание 5. Если $\chi(1,k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, то $\chi(m,k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$ для любого $m = 1, 2, \ldots$.

Найденные условия устойчивости можно ослабить. Зададим некоторое $H_1 > 0$. Как и ранее, найдем такое $\beta_1 > 0$, что в области $G_1 = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| < H_1\}$ справедливы оценки (5). Тогда для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4) достаточно, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$k(\beta_1 \chi(m,k) - \ln c) \to +\infty \ \text{ при } k \to +\infty \qquad (8)$$

для всех $m = 1, 2, \ldots$. Если соотношение (8) выполнено равномерно относительно $m \in \{1, 2, \ldots\}$, то нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво. Например, равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения будет наблюдаться, если $T_i > \ln c / \beta_1$, $i = 1, 2, \ldots$.

Если предельное соотношение (7) (или (8)) выполнено равномерно относительно $m \in \{1, 2, \ldots\}$ и, кроме того, $\varphi(1, k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, то нулевое решение системы (4) будет асимптотически устойчивым в целом. Действительно, как уже отмечалось, в этом случае нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво. Покажем, что областью асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы является все пространство R^n. В соответствии с определением равномерной асимптотической устойчивости можно указать такое число $H_2 > 0$, что если некоторое решение системы (4) в какой-то момент времени попадет в окрестность $\|\mathbf{x}\| \le H_2$, то тогда это решение будет стремиться к началу координат с ростом времени. Определим $\beta_2 > 0$ так, чтобы в области $G_2 = \left\{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| > H_2\right\}$ были справедливы оценки (6). Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (4), выходящее при $t = t_0 \ge 0$ из точки $\mathbf{x}_0 \in G_2$. Снова найдем такое натуральное число m, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$. Если решение $\mathbf{x}(t)$ на некотором промежутке $[t_0, t]$ остается в области G_2, то, интегрируя дифференциальные неравенства (6), получаем следующие оценки:

$$V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho}\mathbf{x}(t) \le V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho}(\mathbf{x}_0) + \beta_2\rho(t - t_0) \text{ при } t \in [t_0, \theta_m),$$

$$V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{-\rho}\mathbf{x}(t) \le b^k\Big[V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho}(\mathbf{x}_0) + \\ + \beta_2\rho\Big(b^{-k}(t - \theta_{m+k-1}) + \varphi(m, k) + (\theta_m - t_0)\Big)\Big] \quad (9)$$

при $t \in [\theta_{m+k-1}, \quad \theta_{m+k})$, $k \ge 1$.

Если $\varphi(1, k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, то тогда $\varphi(m, k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$ для любого $m = 1, 2, \ldots$. Таким образом, левая часть неравенства (9) положительна, а правая стремится к $-\infty$ при $k \to +\infty$. Значит, в некоторый момент времени решение $\mathbf{x}(t)$ выйдет из области G_2. Следовательно, найдется такое $T \ge 0$, что $\|\mathbf{x}(t_0 + T)\| \le H_2$. В результате имеем, что $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Получаем требуемое.

Установленные для системы (4) результаты можно использовать и для анализа устойчивости системы (1). Пусть справедливы предположения 1 и 2. Тогда если при всех $m = 1, 2, \ldots$ выполнено предельное соотношение (7), то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. А если соотношение (7) выполнено равномерно относительно $m \in \{1, 2, \ldots\}$, то нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Пример. Рассмотрим систему автоматического регулирования вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_\sigma\mathbf{x} + \mathbf{g}_\sigma f(\xi), \\ \dot{\xi} &= h_\sigma f(\xi) + \mathbf{c}_\sigma^T\mathbf{x}. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$, ξ – скалярная переменная; $\sigma = \sigma(t) : [0, +\infty) \to Q = \{1, \ldots, N\}$ – функция, задающая закон переключения и обладающая указанными ранее свойствами; $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_N$ – постоянные гурвицевы матрицы; $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_N$, $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_N$ – постоянные векторы; $h_1, \ldots, h_N$ – постоянные отрицательные параметры; функция $f(\xi)$ определена и непрерывна при $\xi \in (-\infty, +\infty)$, $\xi f(\xi) > 0$ при $\xi \ne 0$. Если $h_s \ne \mathbf{c}_s^T\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{g}_s$, $s = 1, \ldots, N$, то система (10) имеет единственное положение равновесия $\left(\mathbf{x}^T, \xi\right)^T = \left(\mathbf{0}^T, 0\right)^T$.

Уравнения (10) можно рассматривать как сложную систему, описывающую взаимодействие двух подсистем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\sigma\mathbf{x}, \quad (11)$$

$$\dot{\xi} = h_\sigma f(\xi). \quad (12)$$

В качестве общей функции Ляпунова для уравнений $\dot{\xi} = h_s f(\xi)$, $s = 1, \ldots, N$, составляющих гибридную подсистему (12), можно взять $v_1(\xi) = |\xi|$.

Пусть $\mathbf{B}$ – постоянная симметрическая положительно определенная матрица, удовлетворяющая неравенствам

$$\mathbf{A}_s^T\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}_s < \mathbf{0}, \qquad s = 1, \quad \ldots, \quad N. \quad (13)$$

Неравенства (13) понимаются как условия отрицательной определенности соответствующих квадратичных форм. Тогда функция $v_2(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}$ является общей функцией Ляпунова для систем

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s\mathbf{x}$, $s = 1, \ldots, N$, составляющих гибридную подсистему (11).

Предположим, что $f(\xi) = \xi^{\alpha}$, где α – рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $0 < \alpha < 1$. Нетрудно указать такие постоянные $p_{11}^{(s)} < 0$, $p_{22}^{(s)} < 0$, $p_{12}^{(s)} > 0$, $p_{21}^{(s)} > 0$, $s = 1, \ldots, N$, что при всех $\mathbf{x} \in R^m$ и $\xi \in (-\infty, +\infty)$ будут справедливы неравенства

$$\begin{cases} \dot{v}_1 |_{(10)} & \leq & p_{11}^{(\sigma)} v_1^{\alpha}(\xi) + p_{12}^{(\sigma)} v_2(\mathbf{x}), \\ \dot{v}_2 |_{(10)} & \leq & p_{21}^{(\sigma)} v_1^{\alpha}(\xi) + p_{22}^{(\sigma)} v_2(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Таким образом, получаем для (10) систему сравнения

$$\begin{cases} \dot{u}_1 & = & p_{11}^{(\sigma)} u_1^{\alpha} + p_{12}^{(\sigma)} u_2, \\ \dot{u}_2 & = & p_{21}^{(\sigma)} u_1^{\alpha} + p_{22}^{(\sigma)} u_2. \end{cases} \qquad (14)$$

Система (14) имеет вид (4). Здесь $n = 2$, $\mu_1 = \alpha$, $\mu_2 = 1$. Значит, если выполнено предположение 1, то для анализа асимптотической устойчивости нулевого решения системы (14), а следовательно, и нулевого решения системы (10) можно применить установленные ранее для системы (4) результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9.38.674.2013) и РФФИ (гранты № 13-01-00376-а и 13-08-00948-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stability criteria for switched and hybrid systems / R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulf, C. King // SIAM Rev. 2007. Vol. 49, № 4. P. 545–592.

2. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems / R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson // Proc. of the IEEE. 2000. Vol. 88, № 7. P. 1069–1082.

3. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems / G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, A. N. Michel // J. of the Franklin Institute. 2001. Vol. 338. P. 765–779.

4. Kazkurewicz E., Bhaya A. Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1999.

5. Александров А. Ю., Платонов А. В. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 3–18.

6. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Platonov A. V. On the asymptotic stability of switched homogeneous systems // Systems and Control Letters. 2012. Vol. 61. P. 127–133.

7. Александров А. Ю., Платонов А. В. Исследование устойчивости решений одного класса гибридных нелинейных систем // Вестн. ВГУ. Системный анализ и информационные технологии. 2012. № 1. С. 35–40.

8. Bhat S. P., Bernstein D. S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability // Math. Control Signals Systems. 2005. Vol. 17. P. 101–127.

9. Qian C., Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46, № 7. P. 1061–1079.

A. Yu. Aleksandrov, A. V. Platonov
Saint-Petersburg state university

STABILITY ANALYSIS OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR HYBRID SYSTEMS

The hybrid system consisting of the family of subsystems of a special type and a switching law is considered. It is assumed that the zero solution of each subsystem is asymptotically stable. The classes of admissible switching laws are determined under which the zero solution of the corresponding hybrid system is also asymptotically stable.

Switched systems, stability, Lyapunov functions