УДК 615.47

О. П. Кормилицын, Е. Ю. Шукейло, Ю. А. Шукейло
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Алгоритм расчета прочности и жесткости стержневых систем остеосинтеза

Представлена математическая модель анализа прочности и жесткости биотехнической системы (кость – система фиксации). В качестве фиксаторов перелома используются стержневые аппараты внешней фиксации и пластины ТРХ (Ткаченко, Руцкий, Хомутов). В основу алгоритма исследования стержневых систем положен метод перемещений, использующий аппарат функций влияния.

Алгоритм, прочность, жесткость, биотехническая система, остеосинтез

Рассматривается алгоритм исследования плоских и пространственных стержневых систем, позволяющий эффективно, без больших затрат машинного времени и оперативной памяти ПЭВМ решать задачи прочности конструкций приборов, биомеханических систем и, в частности, исследовать биомеханику остеосинтеза переломов стержневыми аппаратами внешней фиксации и пластинами ТРХ.

В основу алгоритма исследования стержневых систем положен метод перемещений, использующий аппарат функций влияния. Ввиду специфичности рассматриваемых конструкций и условий их работы разработка алгоритма велась с учетом следующих условий:

– на элементы конструкций действуют статические и динамические нагрузки, причем как сосредоточенные, так и распределенные по длине стержня, а также статическая осевая сила;

– учитывается сдвиг сечений;

– инерция поворота поперечных сечений не учитывается, так как длина стержней значительно превосходит наибольшие диаметры их поперечных сечений.

Алгоритм расчета состоит в следующем: методом начальных параметров находится общее решение для колебаний стержня, нагруженного продольной статической силой, откуда получаются матрицы функций влияния, с помощью которых составляется выражение для краевых значений изгибающих моментов и перерезывающих сил в начале и в конце каждого стержня через значения прогибов и углов поворота. Каждый стержень рассматривается в местной системе координат, где ось OX направлена вдоль стержня от его начала к концу.

Далее выписывается условие равновесия узлов, которые образуют систему линейных уравнений относительно узловых перемещений. Находится решение этой системы и по найденным деформациям определяются значения изгибающих моментов и перерезывающих сил в начале и в конце каждого стержня.

Алгоритм изложен в матричном виде, что позволяет наблюдать абсолютную идентичность в расчетах стержня, плоской и пространственной рамы, так как в этом виде формулы метода перемещений и условие равновесия узлов одинаковы. Отличие имеется лишь во внутреннем содержании матриц, но внешнее их сходство дает основание для составления единого алгоритма и программы. Кроме того, матрицы для одиночного стержня и плоской рамы получаются из матриц пространственной конструкции вычеркиванием соответствующих строк и столбцов.

Формулы, выражающие зависимость между краевыми усилиями и узловыми перемещениями в общем случае для пространственной рамы, на стержни которой действует внешняя гармоническая нагрузка, состоящая из сосредоточенных сил, изгибающих моментов и распределенной на некотором участке нагрузки, имеют вид

$$M_{yi}^{H} = A_{iy}\,\varphi_i^{H} + C_{iy}\,U_{zi}^{H} + B_{iy}\,\varphi_i^{K} - D_{iy}\,U_{zi}^{K} + {} + \frac{D_{iy}l_i}{q_{iy}}\left[W^K\right]_{iy} - \frac{B_{iy}}{q_{iy}}\left[V^K\right]_{iy},$$

$$Q_{zi}^{H} = C_{iy}\,\varphi_i^{H} + K_{iy}\,U_{zi}^{H} + D_{iy}\,\varphi_i^{K} - H_{iy}\,U_{zi}^{K} + {} + \frac{H_{iy}l_i}{q_{iy}}\left[W^K\right]_{iy} + \frac{D_{iy}}{q_{iy}}\left[V^K\right]_{iy},$$

$$N_i^{H} = \frac{E_iF_i}{l_i}\left(U_{xi}^{H} - U_{xi}^{K}\right),$$

$$M_{zi}^{H} = A_{iz}\,\psi_i^{H} + C_{iz}\,U_{yi}^{H} + B_{iz}\,\psi_i^{K} + D_{iz}U_{yi}^{K} + {} + \frac{D_{iz}l_i}{q_{iz}}\left[W^K\right]_{iz} - \frac{B_{iz}}{q_{iz}}\left[V^K\right]_{iz},$$

$$Q_{yi}^{H} = C_{iz}\,\psi_i^{H} + K_{iz}\,U_{yi}^{H} + D_{iz}\,\psi_i^{K} - H_{iz}\,U_{yi}^{K} + {} + \frac{H_{iz}l_i}{q_{iz}}\left[W^K\right]_{iz} - \frac{D_{iz}}{q_{iz}}\left[V^K\right]_{iz},$$

$$M_{yi}^{K} = B_{iy}\,\varphi_i^{H} - D_{iy}\,U_{zi}^{H} + A_{iy}\,\varphi_i^{K} - C_{iy}\,U_{zi}^{K} - {} - \frac{D_{iy}l_i}{q_{iy}}\left[W^H\right]_{iy} + \frac{B_{iy}}{q_{iy}}\left[V^H\right]_{iy},$$

$$Q_{zi}^{K} = -D_{iy}\,\varphi_i^{H} - H_{iy}\,U_{zi}^{H} - C_{iy}\,\varphi_i^{K} + K_{iy}\,U_{zi}^{K} - {} - \frac{H_{iy}l_i}{q_{iy}}\left[W^H\right]_{iy} - \frac{D_{iy}}{q_{iy}}\left[V^H\right]_{iy},$$

$$N_i^{K} = \frac{E_iF_i}{l_i}\left(U_{xi}^{H} - U_{xi}^{K}\right),$$

$$M_{zi}^{K} = B_{iz}\,\psi_i^{H} + D_{iz}\,U_{yi}^{H} + A_{iz}\,\psi_i^{K} - C_{iz}\,U_{yi}^{K} - {} - \frac{D_{iz}l_i}{q_{iz}}\left[W^H\right]_{iz} + \frac{B_{iz}}{q_{iz}}\left[V^H\right]_{iz},$$

$$Q_{yi}^{K} = -D_{iz}\,\psi_i^{H} - H_{iz}\,U_{yi}^{H} - C_{iz}\,\psi_i^{K} + K_{iz}\,U_{yi}^{K} + {} + \frac{H_{iz}l_i}{q_{iz}}\left[W^H\right]_{iz} - \frac{D_{iz}}{q_{iz}}\left[V^H\right]_{iz},$$

где ψ, φ – угловые перемещения относительно координатных осей OY и OZ; $[U]$, $[V]$, $[W]$ – члены, учитывающие влияние внешних нагрузок на каждый стержень относительно координатных осей X, Y, Z; M_{yi}^{H}, M_{yi}^{K}, M_{zi}^{H}, M_{zi}^{K}, Q_{yi}^{H}, Q_{yi}^{K}, Q_{zi}^{H}, Q_{zi}^{K}, N_i^{H}, N_i^{K} – внутренние напряжения в начале и в конце стержня от действия жевательной внешней нагрузки; U_{xi}, U_{yi}, U_{zi} – линейные перемещения стержня вдоль координатных осей X, Y, Z; A, B, C, D, H, K – коэффициенты, вычисляемые через функции влияния, которые зависят от вида внешней нагрузки, вида возникающих деформаций и целого ряда других факторов: q – жесткость стержня на изгиб, E – модуль нормальной упругости, F – площадь поперечного сечения стержня; G – модуль сдвига, l – длина стержня, $j_{\text{пр}}$ – приведенный момент инерции сечения стержня.

Формулы для определения $\left[W^H\right], \left[W^K\right]$, $\left[V^H\right], \left[V^K\right]$, A, B, C, D, H, K в каждом конкретном случае нагружения стержней представлены в работе [см. лит.].

Приведенные формулы в матричной форме выглядят следующим образом:

$$\left|R_i^H\right| = \left|A_i^H\right|\left|r_i^H\right| - \left|B_i^H\right|\left|r_i^K\right| + \left|B_i^H\right|\left|T_i^H\right|,$$

$$\left|R_i^K\right| = \left|A_i^K\right|\left|r_i^K\right| - \left|B_i^K\right|\left|r_i^H\right| + \left|B_i^K\right|\left|T_i^K\right|,$$

где

$$\left|R_i^H\right| = \begin{bmatrix} M_{yi}^H \\ Q_{zi}^H \\ N_i^H \\ M_{zi}^H \\ Q_{yi}^H \\ M_{xi}^H \end{bmatrix}, \quad \left|R_i^K\right| = \begin{bmatrix} M_{yi}^K \\ Q_{zi}^K \\ N_i^K \\ M_{zi}^K \\ Q_{yi}^K \\ M_{xi}^K \end{bmatrix},$$

$$\left|r_i^H\right| = \begin{bmatrix} \varphi_i^H \\ \psi_i^H \\ \theta_i^H \\ U_{xi}^H \\ U_{yi}^H \\ U_{zi}^H \end{bmatrix}, \quad \left|r_i^K\right| = \begin{bmatrix} \varphi_i^K \\ \psi_i^K \\ \theta_i^K \\ U_{xi}^K \\ U_{yi}^K \\ U_{zi}^K \end{bmatrix},$$

$$\left|A_i^H\right| = \begin{bmatrix} A_{iy} & C_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{iy} & K_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_iF_i/i_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{iz} & C_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{iz} & K_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_i\,j_{\text{пр}}/i_i \end{bmatrix},$$

$$\left|A_i^K\right| = \begin{bmatrix} A_{iy} & -C_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{iy} & K_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_iF_i/l_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{iz} & -C_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{iz} & K_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_i j_{\text{пр}}/l_i \end{bmatrix},$$

$$\left|B_i^H\right| = \begin{bmatrix} -B_{iy} & D_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_{iy} & H_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_iF_i/l_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{iz} & D_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_{iz} & H_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_i j_{\text{пр}}/l_i \end{bmatrix},$$

$$\left|B_i^K\right| = \begin{bmatrix} -B_{iy} & -D_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{iy} & H_{iy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_iF_i/l_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{iz} & -D_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{iz} & H_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_i j_{\text{пр}}/l_i \end{bmatrix},$$

$$\left|T_i^H\right| = \begin{bmatrix} \left[V^K\right]_{yi*} 1/q_{iy} \\ \left[W^K\right]_{iy*} l_i/q_{iy} \\ 0 \\ \left[V^K\right]_{iz*} 1/q_{iz} \\ \left[W^K\right]_{iz*} l_i/q_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left|T_i^K\right| = \begin{bmatrix} -\left[V^K\right]_{yi*} 1/q_{iy} \\ \left[W^K\right]_{iy*} l_i/q_{iy} \\ 0 \\ -\left[V^K\right]_{iz*} 1/q_{iz} \\ \left[W^K\right]_{iz*} l_i/q_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Описанный алгоритм, как уже указывалось, дан в предположении, что стержень рассматривается в местной системе координат, т. е. в системе координат *OXYZ*, связанной со стержнем. Для перехода от местной системы координат к единой *OX*Y*Z** необходимо выполнить линейное преобразование рассмотренных ранее уравнений с матрицей направляющих косинусов.

Условие равновесия каждого *j*-го узла рамы (*j* = 1, 2, 3, …, *n*), который является началом m^H и концом m^R стержней в матричной форме в единой системе координат, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m^H} \left|R_{i*}^H\right| + \sum_{i=l}^{m^K} \left|R_{i*}^K\right| = \left|P_{j*}\right|,$$

где * – символ матрицы элементов относительно единой системы координат; $\left|P_{j*}\right|$ – матрица-столбец внешних нагрузок, приложенных в *j*-м узле.

Если стержневая система имеет *n* узлов, то выше указанные условия равновесия образуют систему 6*n* линейных уравнений относительно 6*n* неизвестных. Решением этой системы определяются внутренние усилия, перемещения и углы поворота всех узлов конструкции в единой системе координат. Далее легко перейти к местной системе координат.

Таким образом, получен обобщенный алгоритм, позволяющий анализировать напряженно-деформированное состояние и частоты собственных колебаний плоских и пространственных стержневых систем. Данный алгоритм апробирован при решении задач прочности различных конструкций приборов и систем машиностроительного профиля. Однако он может быть эффективно использован при исследовании биомеханических систем, и в частности при анализе биомеханики остеосинтеза переломов стержневыми аппаратами внешней фиксации и пластинами ТХР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Кормилицын О. П., Санкин Ю. Н., Малышев Ю. Н. Алгоритмы и программы анализа плоских и пространственных стержневых систем ЦНТИ «Поиск». М., 1981.

O. P. Kormilitsyn, E. Yu. Shukeylo, Yu. A. Shukeylo

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

THE ALGORITHM FOR CALCULATION OF THE STRENGTH AND STIFFNESS BAR SYSTEMS OSTEOSYNTHESIS

A mathematical model for analysis of the strength and stiffness bioengineering system (bone-fixation system) is offered. Rod devices for external fixation and plate TRK (Tkachenko, Rutskii, Khomutov) are used as fixation devices of the fracture. An algorithm of the research rod systems is based on the method of displacements, using the dominant functions.

Algorithm, strength, stiffness, bioengineering system, osteosynthesis