

УДК519.813.7, 004.94

В. А. Акимушкин

Санкт-Петербургский государственный университет

Атхит Майтараттанакон

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Технологии автоматизации работы с исследовательскими задачами на примере задачи «Часы-календарь»

*Представлен новый подход к автоматизации поддержки самостоятельной исследовательской деятельности школьников посредством введения системы критериев оценки построений пользователя в процессе взаимодействия с имитационной моделью. Представленный анализ протоколов работы с сюжетом показывает широкую вариативность решений участников, что подтверждает возможность использования предложенного подхода для поддержки индивидуальных маршрутов, характеризующих творческую составляющую учебного труда.*

### Автоматизация поддержки исследовательской деятельности, имитационное моделирование, управляющие критерии, творческие конкурсы

Проблема технологической поддержки работы с задачами из курса математики, которые не решаются по образцу, а предполагают предварительный эксперимент, выдвижение гипотезы и ее верификацию, весьма актуальна в связи с изменением приоритетов в предметном обучении, связанных с переносом акцента с усвоения конкретных фактов на овладение общими приемами интеллектуальной деятельности в предметной области.

В настоящее время быстро развивается техническая поддержка так называемых серьезных игр, представляющих собой имитационные модели из различных областей человеческой деятельности, в которых обучающим дается большая свобода по сравнению с традиционной учебной деятельностью\*. В то же время, серьезные игры в большей степени применимы к обучению социальным навыкам и меньше – к изучению фундаментальных наук.

Подходы к проблеме соединения трудных или нерешенных задач с информационными технологиями можно видеть в разработке проекта [www.etudes.ru](http://www.etudes.ru), в котором предпринята попытка создания небольших компьютерных фильмов, визуализирующих сложные математические задачи и идеи их решения. Недостатком этого подхода является пассивность обучаемого, т. е. отсутствие обратной связи обучаемого с моделью.

Способ возможного устранения этого недостатка демонстрирует конкурс «Конструируй, исследуй, оптимизируй» ([www.kio.spb.ru/kio](http://www.kio.spb.ru/kio)), в котором участникам предлагаются имитационные модели математических задач [1]–[3]. Каждая задача снабжена набором инструментов, позволяющим проводить эксперименты с моделью. Модели задач приведены в понятной метафоре и снабжены средствами визуализации, позволяющими воспринимать задачу как серьезную (правильнее, научную) игру. Задачи снабжены критериями, позволяющими оценивать качество найденных частичных решений и тем самым обеспечивать целенаправленное улучшение этих показателей.

---

\* Serious Game Design <http://seriousgames.msu.edu>, Foldit. Официальный сайт <http://fold.it>.

Важным условием является и вычислительная сложность разбираемых задач, как правило, они относятся к классу NP-трудных, поэтому даже если участники будут пробовать написать программы для их решения, время работы программы будет слишком большим, чтобы рассматривать этот вариант подхода. Успешными оказываются те участники, которые раньше начинают понимать суть задачи и использовать результаты эксперимента для выдвижения разумных гипотез.

В настоящей статье будут развиты технологические подходы, связанные с формулировкой критериев и анализом протоколов, позволяющие наблюдать за процессом влияния отобранных критериев на поведение участников Конкурса и их результаты.

**Отбор математических задач для конкурса и технология их преобразования в исследовательские сюжеты.** В практике олимпиадного и кружкового движения в России накоплен богатейший опыт [4]. Много интересных сюжетов, связанных с замечательными математическими задачами, собрано в журнале «Квант». В то же время, до настоящего времени не рассматривалась проблема автоматической поддержки работы ученика с трудной задачей, решение которой ученику (а возможно, и никому в настоящий момент времени) неизвестно. В этом случае на первое место выходят не методические вопросы по объяснению нового материала, а методические и технические проблемы организации такой деятельности ученика (точнее, его САМОдеятельности), которая позволит ему понять сущность самой задачи и инициирует желание решить ее. Это желание первоначально выразится в экспериментальной деятельности, а в перспективе приведет к теоретическому осмыслению задачи посредством собственных размышлений, чтения популярной и научной литературы и общения с другими людьми.

Проблема постановки задачи как части процесса обучения математике в такой интерпретации является новой, хотя ставилась ранее в работах Пойа и его последователей безотносительно проблематики автоматизации процесса обучения [5].

Рассмотрим процесс создания исследовательского сюжета для автоматизированной поддержки работы ученика на примере задачи «Часы-календарь», которая была подготовлена к Конкурсу авторами статьи.

Математическое содержание задачи связано с важной темой периодического движения, соизмеримости чисел, рациональными числами, интерпретацией операции умножения в механических

устройствах. Заметим, что теория наилучших приближений Чебышева, не изучаемая не только в школе, но и в большинстве технических вузов, содержит в себе важные фундаментальные идеи, которые должны входить в состав компетенций инженера-техника. Также следует обратить внимание на важное замечание Симура Паперта [6] о том, что он в детстве освоил таблицу умножения, играя с шестереночными механизмами. Таким образом, сюжет дает новую интерпретацию для формирования важных математических понятий.

Реализация сюжета в имитационной модели основана на создании конструктора для сборки часовых механизмов из сдвоенных зубчатых шестерен. Число зубьев (которое определяет радиус шестерни) и расположение шестерен может меняться пользователем. Пользователь может собрать «открытую» или «замкнутую» передачу. В первом случае результат будет представлен двумя циферблатами, по первому из которых будет двигаться стрелка, связанная с первой шестерней, по второму – с последней. Во втором случае стрелки оказываются на одной оси (для этого первая и последняя шестерни могут вращаться на оси независимо друг от друга). Таким образом, если шестерня с  $n$  зубьями передает движение на шестерню с  $k$  зубьями, коэффициент изменения скорости будет  $n/k$ . Например, для создания «обычных» часов нужно комбинацией шестерен получить передаточный коэффициент 12 (соотношения скоростей движения минутной и часовой стрелок). Проанализируем особенности, которые отличают построение математического сюжета с компьютерной поддержкой от создания новой математической задачи.

Первая особенность, о которой уже косвенно упоминалось, – разработка адекватной метафоры. В данном случае это часы. Такая метафора целесообразна, так как часы со стрелками распространены широко, и визуальные представления о соотношении скоростей часовой и минутной стрелок имеют все школьники.

Вторая особенность – создание набора инструментов, который будет не слишком велик, чтобы с ним можно было разобраться на «интуитивном уровне», но который достаточен для того, чтобы опосредовать те математические операции, ради понимания которых создается сюжет. В данном случае это сдвоенные шестерни. Заметим, что инструменты должны быть устроены так, чтобы автоматически компенсировать те сложно-

сти, которые всегда возникают в конкретной реализации абстрактной идеи. Например, в данном сюжете зубцы имеют форму одинаковых правильных треугольников, что не соответствует форме реального зубца, которая учитывает «плавность» взаимодействия зубцов при повороте шестерен. Однако с точки зрения передаточного числа этот фактор несущественен, а использование одинаковых зубцов для всех шестерен позволяет избавить пользователя от необходимости задавать 2 параметра: радиус шестерни и число зубцов и в то же время дает понятную (и легко теоретизируемую) связь между этими параметрами. Далее, нужно как-то учесть расположение шестерен в пространстве (какая находится выше, какая ниже). Для решения этой задачи был выбран следующий прием: взаимодействовать могут только две соседние шестерни, а высота осей шестерен подстраивается автоматически так, чтобы новые шестерни располагались все ниже и ниже.

Третья особенность – выбор критериев для оптимизации (оценочной функции). По мнению авторов, критериев этих должно быть обязательно несколько, чтобы все ученики могли начать работу с сюжетом и получить обратную связь, которая позволит им улучшать свое решение. Заметим, что этим свойством не могут обладать традиционные олимпиадные задачи: они будут либо простыми, либо сложными. Методисты регулярно пытались делать задачи одновременно и простыми и сложными, например, они делили задачи на пункты, создавали последовательности усложняющихся задач. Однако наличие нескольких критериев позволяет решать эту проблему проще, естественнее и с большим педагогическим эффектом.

Итак, *первым критерием* в сюжете про часы была выбрана точность передаточного отношения, а цепочка соединенных шестерен была представлена в форме примера. Тем самым у всех участников был сразу положительный (и неухудшаемый, так как программа всегда сохраняет лучшее решение – рекорд) результат. Далее ученики могли изменять число зубьев, добавлять или убирать шестерни, перемещать их, чтобы замкнуть цепь. Эти действия приводили к усвоению связи между числом зубьев соседних шестерен и передаточным коэффициентом.

Для знакомства с сюжетом участникам был предложен пример, состоящий из четного числа шестерен, поэтому стрелки крутились в разные стороны. Правильное направление движения стрелок – *второй критерий* оценки качества ре-

шения. Заметим, что в процессе решения проблемная ситуация возникала дважды. После того как ученики догадывались о связи четности числа шестерен с направлением вращения стрелок и создавали цепь с нечетным числом шестерен, они начинали пытаться замыкать цепь. И здесь их ждала вторая проблемная ситуация: в замкнутой цепочке число шестерен для согласованности направлений вращения должно быть четное (!). Таким образом, второй критерий давал возможность усложнить задачу только для тех, кто сумел решить первую проблему.

Для тех, кто сумел разобраться с обеими проблемами и создать «правильные» часы с одним циферблатом, начинал работать *третий критерий* (реально все значения целевых функций выводились для каждого решения, однако указанный порядок применения критериев определял именно такую последовательность возникновения новых проблемных ситуаций): «размер корпуса часов». Например, на «виде сверху» вокруг шестерен описывался прямоугольник со сторонами, направленными вертикально и горизонтально, площадь которого и определяла размер корпуса. Теперь ученикам нужно было, во-первых, подумать о том, как выгоднее расположить шестерни, во-вторых, заново подумать о наиболее выгодных размерах этих шестерен, т. е. о числе зубьев и их отношениях (фактически, здесь ученики столкнулись с эквивалентностью различных записей рациональных чисел, таких, как  $36/18$  и  $18/9$ ; заметим, что в школьном курсе объяснение того, что рациональное число представляется классом эквивалентных дробей, считается «трудным местом»).

Четвертая особенность – неявные критерии и ограничения, которые во многих задачах определяют их принадлежность к классу NP-трудных задач. Очевидно, что в данном сюжете нужно ограничить сверху и снизу числа зубьев на шестернях (чтобы не появлялись шестерни с одним зубом или с 1000 зубьев). Заметим, что ограничение сверху можно было бы снять, поскольку оно косвенно определяется третьим критерием, однако по причинам ограниченности экрана целесообразно было это ограничение установить сразу. Другим – неявным, но геометрически естественным критерием было непересечение одними шестернями осей других. Это накладывало условия типа неравенств на количества зубьев соседних шестерен (разумеется, никаких таких ограничений явно не формулировалось, более того, они

являются частью проблемы формализации задачи для тех, кто попытается описать задачу формально-теоретически).

Пятая особенность – выбор визуализации. Выбор визуализации определяется методической целью, однако есть и общие правила. Одним из таких правил является множественность представления [7]. В данной задаче это реализовано параллельным представлением конструкции в двух плоскостях: вертикальной и горизонтальной (на рис. 1 в нижней части показан вид сбоку, а в верхней – вид сверху интерфейса задачи «Часы-календарь» для начального уровня). Вид сбоку позволяет естественным образом ассоциировать передаточные числа с числителем и знаменателем дробей, вид сверху позволяет удобно работать с шестернями и следить за связью решения с третьим критерием.

Шестая особенность – возможность усложнения задачи для различных возрастных уровней. В данной задаче это решено следующим образом: если для младших школьников выбраны «обычные часы» и решить задачу можно выбирая передаточными целые числа (например, 2, 2, 3 для разомкнутой цепочки), то для среднего уровня решение можно было найти, только используя дробные передаточные числа (были предложены часы с неделями). Наконец, для старшего уровня

было предложено сделать годовые часы-календарь, где нужно было согласовать земной год и земные сутки. Для решения этой задачи целесообразно применять теорию наилучших приближений (ее развитие). Поскольку эта теория для участников Конкурса неизвестна, то решение задачи можно рассматривать как постановку проблемной ситуации, разрешить которую ученики смогут при изучении указанной теории.

**Особенности реализации исследовательского сюжета «Часы-календарь».** Для возможности последующего анализа действий пользователя при разработке была поставлена задача полного воспроизведения построения решения в режиме интерактивного плеера. Для этого использовался специальный журнал, в который записывались все операции пользователя с системой.

Модуль задачи «Часы» был реализован с использованием шаблона MVC (model-view-controller), предполагающего разделение модели данных приложения, пользовательского интерфейса и взаимодействия с пользователем на 3 отдельных компонента. Данный подход позволяет модифицировать каждую часть, не затрагивая остальные. На диаграмме (рис. 2) показаны основные классы модели и представления, классы-контроллеры опущены.

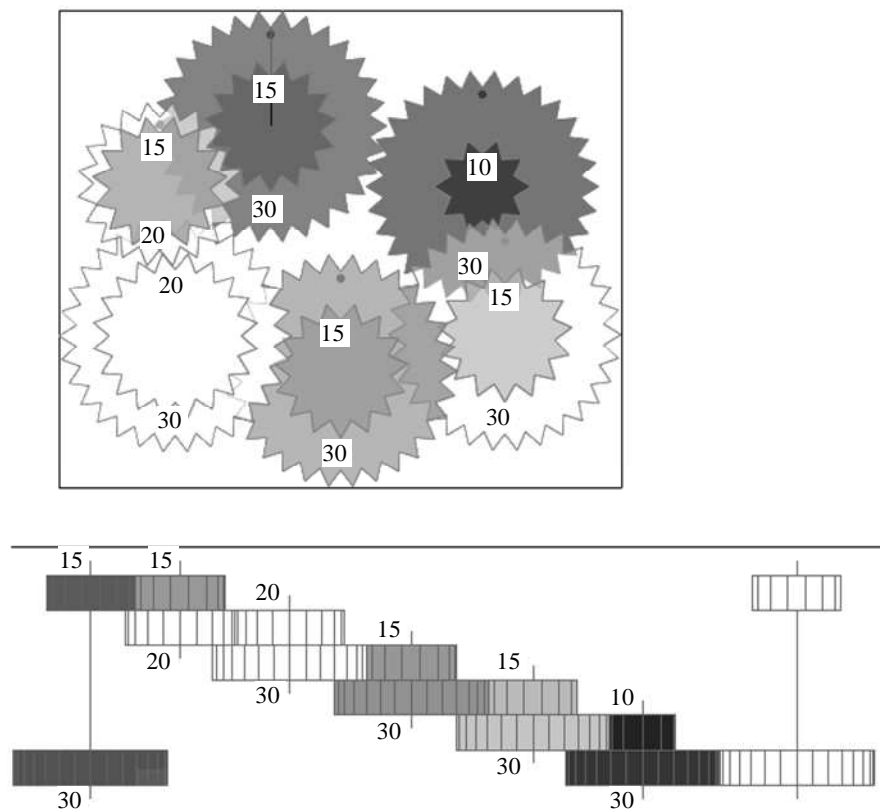


Рис. 1

Основным классом модели является передаточный механизм (TransmissionMechanism), содержащий несколько передаточных шестерен (TransferGear), каждая из которых, в свою очередь, состоит из двух простых шестерен (SimpleGear). Передаточный механизм содержит методы добавления/удаления передаточных шестерен (addTransferGear/removeTransferGear), проверки замкнутости механизма (isFinished), проверки наличия пересечения осей передаточных шестерен (isConflicted) и поворота головной шестерни механизма (rotate). Каждая передаточная шестерня имеет уникальный идентификатор (id) и координаты центра осей на плоскости (x, y). Простая шестерня характеризуется количеством зубьев (amountOfCogs).

Как видно из диаграммы, часовой механизм имеет 2 представления: вид сверху и вид сбоку. Каждый класс модели содержит ссылки на 2 класса представления (\*FrontView и \*SideView).

При изменении объекта-модели автоматически вызываются методы обновления объектов-представлений (update).

Фиксирование изменений можно было реализовать как на уровне модели, так и на уровне представления. Формирование окончательного решения достаточно отследить по изменениям

модели, но тогда информация о способе теряется, так как одни и те же изменения можно осуществить при помощи различных элементов управления (вида сверху, вида сбоку или же дополнительных кнопок панели управления). Последнее представляет интерес с точки зрения анализа удобства интерфейса. Кроме того, отслеживание действий на уровне представления позволяет делать анализ попыток действий, которые не допустимы моделью.

Таким образом, было принято решение записывать в журнал и взаимодействие пользователя на уровне представления, и изменения в модели.

Полученные команды имеют вид:

```
<log item> = <time>; <source>; <command>
{;<command argument>},
```

где time – время выполнения команды; source – источник команды (представление или модель); command – само изменение и его параметры.

Дополнительно в журнале фиксировались улучшения решений, что позволяет выделить контрольные точки и анализировать возможности улучшения, которые использовал пользователь.

Одной из особенностей формата «КИО-конкурса» является возможность растянутого во времени взаимодействия с модулем. Участник может работать на протяжении недели, при этом

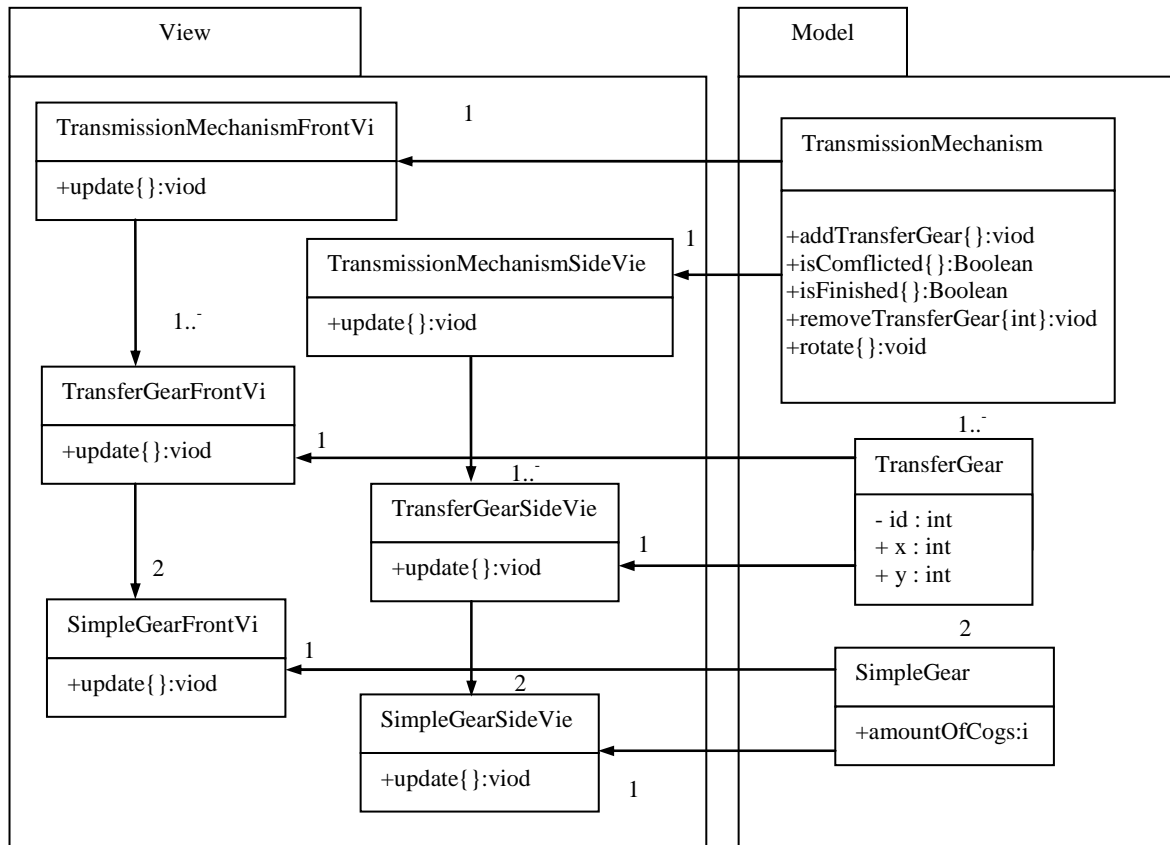


Рис. 2

загружать какие-то из существующих решений или свое лучшее на данный момент решение. Поэтому важной задачей анализа журнала является выделение сеансов непрерывной работы по поиску решения. Временные метки и записи о загрузках решения позволяют это сделать.

Из полученных логов можно извлекать различную педагогическую информацию [10], например:

1. Сколько учеников оптимизировали только первый критерий (точность хода), а сколько перешли к оптимизации по следующим по порядку критериям (направление вращения, замкнутость цепочки шестерен, площадь корпуса).

2. Выделять группы решений по способу оптимизации критерия «площадь часов». Ученики могут идти как по пути уменьшения зубьев у шестерен, так и по изменению геометрии часов.

3. Анализировать скорость улучшения решений.

**Результаты эксперимента и анализ лучших решений.** Описанный сюжет использовался в качестве основной задачи (на каждом уровне была вариация задачи) на конкурсе КИО-2013, в котором участвовало около 5000 школьников.

Для анализа было выбрано 100 лучших решений каждого уровня. На рис. 3–8 представлены примеры решений начального уровня, демонстрирующие широкие возможности использования критериев для поддержки самостоятельной исследовательской деятельности школьников.

Каждому решению можно сопоставить представление числа 12 в виде произведения дробей. Эти представления могут отличаться количеством множителей; порядком множителей; составом множителей; точностью (быть точными или приближенными представлениями).

Например, рис. 3 соответствует представлению  $12 = 32/8 \cdot 24/8 \cdot 24/24$ , а рис. 4 –  $12 = 16/8 \times 16/8 \cdot 16/8 \cdot 12/8$  и  $12 = 16/8 \cdot 16/8 \cdot 16/8 \cdot 15/10$  соответственно.

Перечислим важные педагогические результаты, полученные в результате анализа решений.

1. Участниками представлен широкий спектр различных решений, что свидетельствует о высоком потенциале выбранного подхода для поддержки индивидуальных поисковых маршрутов. Так, даже 2 лучших решения отличаются числом зубьев шестерен, т. е. представляют математически различные решения – различные разложения требуемого передаточного коэффициента на множители, а не только расположением их на плоскости (рис. 4). Другим доказательством тезиса и характеристикой выбираемых для Конкурса задач является наличие большого числа локальных экстремумов в поставленном исследовательском сюжете. Так на рис. 5 показаны вариации решений, использующие всего 4 шестерни, причем вторые 2 решения получены комбинацией целых передаточных коэффициентов.

В таблице представлена полная статистика для 100 лучших решений по разным уровням (0-й уровень соответствует ученикам 1–4-го классов, 1-й уровень – 5–7-й классы, 2-й уровень – 8–11-й классы). Разнообразие найденных участниками решений хорошо характеризует строка 2, из которой следует, что для лучших 100 решений разнообразие решений составляет 70, 83 и 85 % для начального, 1-го и 2-го уровней соответственно.

2. Наличие нескольких критериев позволило участникам найти оригинальные решения, обладающие свойством эстетичности. Вне зависимости от того, что их решения не были лучшими по основному критерию, участники остановились на них. На рис. 6 показано одно из таких решений, в котором использовано всего две шестерни. Из-за того, что эти шестерни получились большими, решения не стали лучшими (по критерию «размер корпуса»). Этот феномен говорит о возможности сюжетов Конкурса затрагивать эстетические чувства обучаемых и формировать представления о красоте математики, что является важной педагогической целью школьного образования.

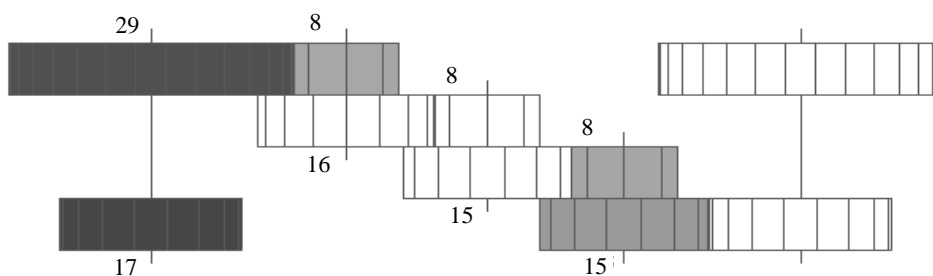


Рис. 3

№ п/п	Показатель	Уровень		
		0-й	1-й	2-й
1	Количество различных передаточных чисел среди решений	11	46	67
2	Количество различных представлений (отличающихся только составом шестерен без учета их перестановки)	70 (70)	83 (83)	85 (85)
3	Количество представлений с «замкнутым» цепочками шестерен	89	77	76
4	Количество представлений с «открытыми» цепочками шестерен	11	23	24
5а	Количество представлений с двумя шестернями	11	17	8
5б	Количество представлений с тремя шестернями	1	2	4
5в	Количество представлений с четырьмя шестернями	35	25	35
5г	Количество представлений с пятью шестернями	8	14	4
5д	Количество представлений с шестью шестернями	38	17	24
5е	Количество представлений с числом шестерен больше шести	7	25	25
6	Количество точных (и приближенных) представлений (для 0-го и 1-го уровней)	100 (0)	45 (55)	–
7	Количество представлений с однонаправленным (и разнонаправленным) движением стрелок	100 (0)	90 (10)	93(7)

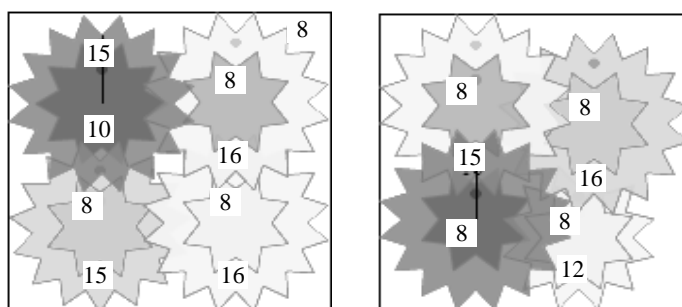


Рис. 4

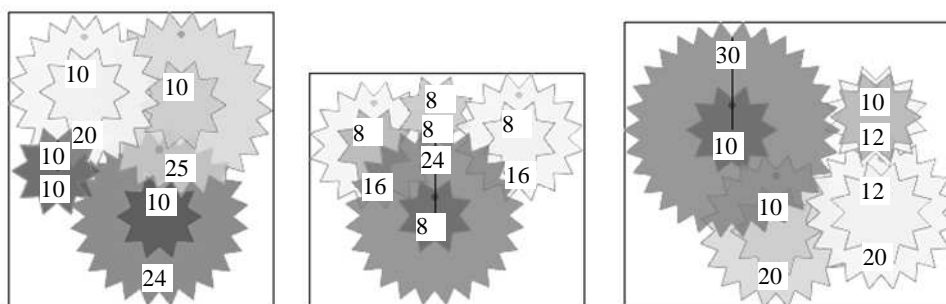


Рис. 5

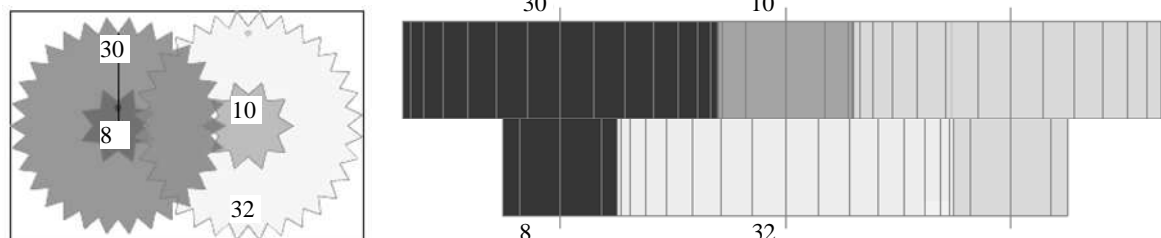


Рис. 6

3. Наличие нескольких критериев оценки решения позволяет преподавателям ставить вспомогательные задачи, варьировать исходные цели. Эта

возможность подтверждается фактами наличия среди решений всех возможных комбинаций параметров по выделенным критериям. Так на рис. 7

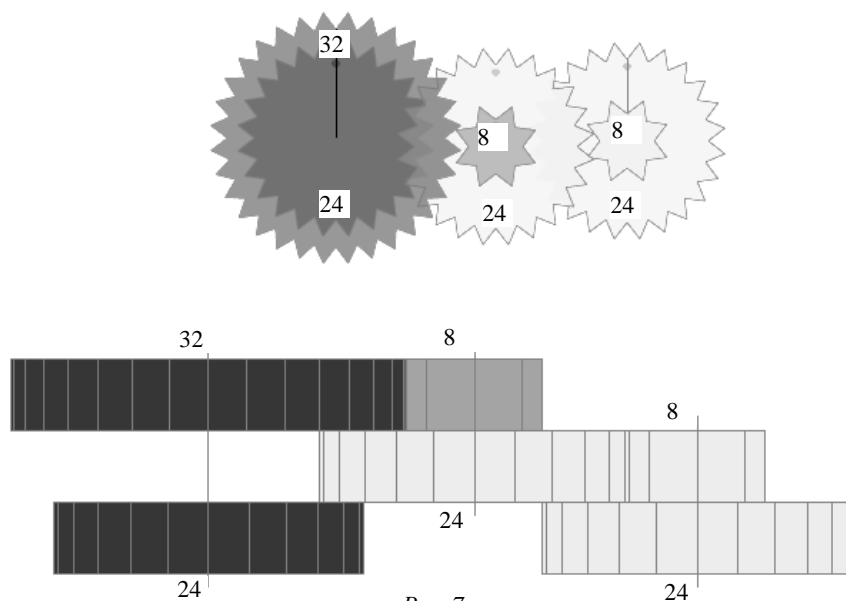


Рис. 7

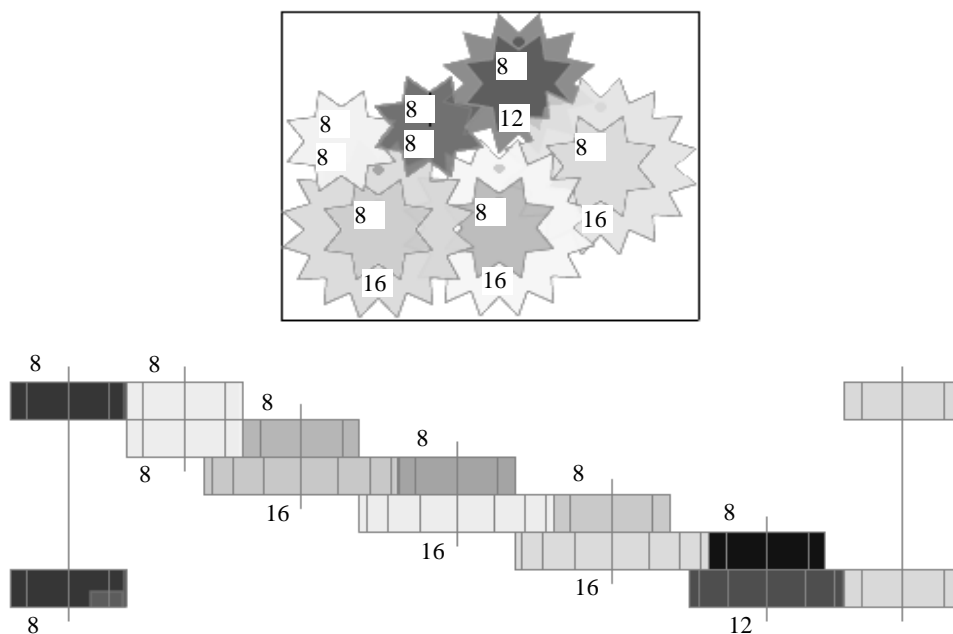


Рис. 8

приведен пример решения с открытой цепочкой (т. е. построенные так часы имеют отдельные циферблаты для часовой и минутной стрелок), а на рис. 8 показано решение, в котором все передаточные коэффициенты являются целыми числами.

Предложен новый подход к автоматизации поддержки исследовательской деятельности учеников посредством внедрения в задачу системы критериев, определяющих иерархическую систе-

му целеполагания в процессе свободной деятельности с имитационной моделью. Разработана методика и технология создания исследовательских сюжетов, отражающих важные идеи математики. Показано, что разработанный подход позволяет обеспечить широкий спектр индивидуальных маршрутов для разных учеников с различным уровнем погружения ученика в существо задачи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pozdnyakov S., Ivanov S. Computers in productive teaching of mathematics or how information technologies can support intellectual freedom of the learner // The 10-th Intern. Congr. on Mathematical Education,

National presentation: Russia, Selected materials, Copenhagen, Denmark, July 4–11, 2004. P. 115–124.

2. Science Popularization by Organizing Training Activities Within the Electronic Game Laboratories/International



/ S. Pozdniakov, I. Posov, A. Pukhov, I. Tsvetkova // J. of Digital Literacy and Digital Competence (IJDLDC). 2012. Vol. 3, № 2. P. 17–31.

3. Posov I., Pozdniakov S. Implementation of Virtual Laboratories for a Scientific Distance Game-Competition for Schoolchildren // The 2013 Intern. Conf. on Advanced ICT (Information and Communication Technology) for Education (ICAICTE2013), Hainan, China. Sept. 20–22, 2013.

4. Рукшин С. Е. Задачи, как цель и средство обучения математике // Всерос. конф. «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков». М.: МЦНМО, 2000. С. 231–233.

5. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1970.

6. Пейперт С. Переворот в сознании. Дети, компьютеры и плодотворные идеи / пер. с англ. М.: Педагогика, 1989.

7. Bogdanov M., Pozdniakov S., Puhov A. Multiplicity of the knowledge representation forms as a base of using a computer for the studying of the discrete mathematics // The 9th Intern. Conf. "Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives". Vilnius Pedagogical University, 16-17 May 2008 (with coauthors).

8. Анализ данных и процессов / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, И. И. Холод и др. СПб.: БХВ-Петербург, 2009.

---

V. A. Akimushkin

Saint-Petersburg state university

Athit Maytarattanakhon

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

## AUTOMATION TECHNOLOGY WITH RESEACH TASKS IN EXAMPLE PROBLEM «CLOCK – CALENDAR»

*In this paper represented a new approach to support automation independent student research by introducing a system of evaluation criteria builds user, when interacting with the simulation model. Submitted by the analysis protocols work with the plot which shows a wide variability of decision of participants that confirms to use the proposed approach to support individual routes and characterize the creative component of the education work.*

**Automation support research activities, simulation model, control criteria, creative competition**

---

УДК 681.5

Ю. В. Ильюшин, И. А. Кучеренко, А. Л. Ляшенко

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

И. М. Новожилов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Моделирование температурных процессов на суперкомпьютере

*Проведен синтез закона распределения температурного поля в изотропном стержне на основе импульсных переходных функций – функций Грина. Проведено математическое моделирование полученного закона на гибридном суперкомпьютере по технологии NVidia CUDA. На основании математического моделирования сделан вывод о возможности оптимизации температурных режимов в рассматриваемой системе управления. Сделаны выводы о количестве нагревательных элементов и числе членов ряда Фурье.*

**Синтез, системный анализ, математическая модель**

Синтез программных управлений осуществляется на основе моделей процессов формализацией требований в виде односточных или многоточечных целевых условий (равенств, неравенств), представленных требованиями минимизации функционалов качества. Для взаимоотношения между

управляемыми координатами (факторами) используются аналитические решения операторов теплопроводности или разностные схемы для соответствующих им задач. Это позволяет приобрести большое многообразие алгоритмов программного управления. Такие алгоритмы при соответствующим