ка среднего времени выполнения $L_{\text{теор}}$ сравнивается со значением $L_{\text{изм}}$. Близкие значения $L_{\text{теор}}$ и $L_{\text{изм}}$ свидетельствуют об адекватном представлении моделью динамики выполнения программы, а значит и о корректности разработанной методики построения ОГМП в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р ИСО/МЭК 9126–93. Информационная технология. Оценка программной продукции. Характеристики качества и руководства по их применению. М.: Изд-во стандартов, 1993.

2. Кирьянчиков В. А., Чистяков П. А. Мобильный программный комплекс для моделирования и анализа производительности программ на основе иерархических графовых моделей // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2004. № 2. С. 46–50.

V. A. Kirianchikov
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

THE TECHNIQUE OF CONSTRUCTING OF OPERATIONAL GRAPH MODEL OF THE PROGRAM

Thepurpose, ways of presentingand technique of constructing of operational graph model of the program (OGMP) is considered. Main stages of the operational graph model constructing are pointed and problems in their implementation are noted. A software tool for support of OGMP constructing is described. The tool was developed and used in the laboratory workshop of the MOEVM department for the calculation of program performance characteristics. The features of the implementation of this software tool main components are noted such as the module of the arrangement of control points (CT), which ensures the introduction of the CT function calls into the text of the program and the creation of the program control graph (PCG) and theprogram loading module forming the required OGMP in the form of a graph with loaded arcs. In conclusion, we propose a procedure for verifying the adequacy of the established OGMP, confirming the correspondence of its behavior to the work of the program under study.

Effectiveness,operational graph model of the program, program control graph,resource consumption parameter, probability of program execution route selection, check point

УДК 621.391

Д. М. Клионский, В. В. Геппенер
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Применение частотно-временного распределения Гильберта–Гуанга для анализа осциллирующих сигналов

Статья посвящена рассмотрению частотно-временного спектра Гильберта–Гуанга для решения задачи адаптивной обработки сигналов. Частотно-временное распределение строится на основе компонент, извлеченных из сигнала с использованием декомпозиции на эмпирические моды (ДЭМ). ДЭМ позволяет получить компоненты разложения непосредственно из исходного сигнала, в связи с чем такого рода разложение является уникальным и не повторяющимся для других сигналов. Эмпирические моды используются для расчета аналитического сигнала, на основе которого далее рассчитывается частотно-временной спектр. При этом вычисляется полная фаза сигнала, которая в дальнейшем применяется для расчета мгновенной частоты. Описан способ нормировки эмпирических мод для вычисления мгновенной частоты, а также необходимая предварительная обработка сигналов. Спектр Гильберта–Гуанга может быть использован для выявления амплитудных и частотных модуляций в сигналах, классификации сигналов, а также выявления областей, в которых сосредоточена энергия. Данный спектр также может применяться для расчета мгновенной плотности энергии как функции времени и маргинального спектра, который зависит только от частоты и является аналогом спектра Фурье для нестационарных сигналов.

Частотно-временное распределение, спектр Гильберта–Гуанга, декомпозиция на эмпирические моды, мгновенная частота, эмпирическая мода, осциллирующий сигнал

Распределение Гильберта–Гуанга относится к классу частотно-временных распределений (УВР), позволяющих добиться лучшего, чем преобразование Фурье и вейвлет-преобразование, частотного разрешения применительно к анализу нестационарных быстро меняющихся осциллирующих сигналов. К тому же преобразование Фурье сопровождается принципом неопределенности, суть которого заключается в том, что невозможно одновременно обеспечить одинаково высокое разрешение при представлении сигнала во временной и частотной областях. Отсюда вытекает, что при увеличении разрешения по времени, т. е. при уменьшении периода дискретизац Δt и сигнала, автоматически ухудшается частотное разрешение, т. е. теряется информация о частотном содержании сигнала и наоборот. Математически данное соотношение неопределенности, известное также как принцип неопределенности Гейзенберга–Габора [1]–[3] записывается следующим образом:

$$\Delta f \Delta t \geq 1,$$

где Δf – неопределенность по частоте; Δt – неопределенность по времени. Равенство достигается для гауссовских сигналов, имеющих наилучшую частотно-временную локализацию.

Возможно использование оконного преобразования Фурье, суть которого заключается в том, что для исследования определенный участок сигнала подвергается выделению с помощью заранее выбранной оконной функции. Также возможен анализ всего сигнала с использованием скользящего окна, т. е. окна, которое движется по сигналу, выделяя отдельные его фрагменты и улучшая тем самым степень временной локализации. Однако зачастую неизвестно, какие именно события и в какой момент времени возникают в исследуемом сигнале, следовательно, довольно велика вероятность их пропуска либо попадания на одну из границ скользящего окна, что не позволит верно обнаружить соответствующие особенности. В общем случае, безусловно, использование скользящего окна позволяет улучшить качество частотно-временного анализа сигнала, однако проблема выбора оптимальной длины окна при отсутствии каких-либо априорных сведений о сигнале является на данный момент трудноразрешимой.

Концепция, связанная с преобразованием Гильберта и представлением мгновенной частоты каждой эмпирической моды (ЭМ) как функции времени, позволяет получить хорошее частотно-временное разрешение, что может быть использовано при выявлении кратковременного быстро меняющегося переходного процесса.

Декомпозиция на эмпирические моды (ДЭМ). *Эмпирическая мода* – функция, заданная непрерывно на интервале существования сигнала или дискретно в виде вектора отсчетов, имеющая в общем случае произвольную форму и произвольную аналитическую запись (аналитическая запись может не существовать), но при этом удовлетворяющая двум необходимым условиям:

1) общее число максимумов и минимумов такой функции (т. е. общее число экстремумов) должно быть строго равно числу нулей функции (в дискретном варианте задания нули могут быть найдены с использованием различных алгоритмов интерполяции) либо отличаться от числа нулей исходной функции по модулю не более, чем на единицу:

$$N_{\max} + N_{\min} = N_{\text{zero}} \pm 1 \text{ или}$$
$$N_{\max} + N_{\min} = N_{\text{zero}},$$

где $N_{\max}, N_{\min}, N_{\text{zero}}$ – число максимумов, минимумов и нулей функции соответственно, не считая краевые отсчеты сигнала, которые в некоторых случаях могут оказаться единственными экстремумами сигнала (при этом имеем случай монотонно возрастающей или монотонно убывающей функции на всей ее области определения);

2) *локальное (мгновенное) среднее значение ЭМ*, определенное в виде полусуммы двух *огибающих*: верхней, полученной интерполяцией найденных локальных максимумов, и нижней, полученной интерполяцией найденных локальных минимумов, – должно быть меньше или равно заранее определенному пороговому значению η, зависящему от машинной точности ε и погрешностей, связанных с получением, преобразованием и передачей сигнальной информации.

В качестве средства интерполяции чаще всего используются *кубические сплайны*. Добиться точного равенства нулю локального среднего значения в каждый момент времени невозможно по ряду объективных причин. К их числу относятся вычислительные погрешности (связанные с особенностями машинной арифметики с плавающей запятой), плохая обусловленность систем уравнений, на основе которых осуществляется расчет коэффициентов сплайнов, а также особенности самого сигнала (например, краевые эффекты – сильные осцилляции интерполирующей функции на краях, благодаря которым вблизи краев локальное среднее практически всегда отличается от нуля). Аналитически данное условие записывается в виде

$$\frac{U(k)+L(k)}{2} \le \eta, \quad k=\overline{0, N-1},$$

где $U(k)$ и $L(k)$ – значения верхней и нижней огибающих сигнала в k-й дискретный момент времени; k – дискретное нормированное время (номер отсчета сигнала); η – некоторый порог, устанавливаемый обработчиком-экспертом и обычно принимающий близкие к нулю значения; N – общее количество отсчетов (длина сигнала).

Равенство числа экстремумов и нулей с точностью до 1 необходимо для того, чтобы ЭМ была *узкополосной* функцией, т. е. удовлетворяла следующему условию:

$$\Delta\omega \ll \omega_0,$$

где $\Delta\omega$ – эффективная ширина фурье-спектра ЭМ; ω_0 – ее центральная частота. Факт узкополосности дает преимущества при частотной локализации, так как мера узкополосности функции, как будет показано далее, связана с числом экстремумов и нулей.

Условие, касающееся равенства нулю полусуммы двух интерполированных огибающих, имеет свою физическую интерпретацию. Из него следует, что ЭМ является стационарной функцией (не содержит тренда), поскольку ее локальное среднее значение не превосходит некоторого порога в любой момент времени (фактически локальное среднее значение равно нулю в каждой точке). Кроме того, для достижения этого условия (отсутствия тренда) ЭМ должна иметь положительные значения в точках максимумов и отрицательные значения в точках минимумов, поскольку иначе для отдельных моментов времени данное условие может не выполниться. Наконец, важно отметить, что ЭМ в общем случае обладает одновременно и амплитудной, и частотной модуляциями. Закон амплитудной модуляции может быть установлен из огибающих, полученных интерполяцией экстремумов или на основе преобразования Гильберта (как квадратный корень из суммы квадратов отсчетов исходного сигнала и сигнала, сопряженного по Гильберту), а закон частотной модуляции устанавливается на основании закона изменения мгновенной частоты. В качестве информативного параметра в ЧВР Гильберта–Гуанга выступает цвет (цвет определяется значением наносимой абсолютной величины), так как именно по его перепадам можно определить соответствующие зависимости (изменение амплитудных соотношений, амплитудные модуляции, частотные модуляции и др.).

Понятие огибающей, введенное для определения ЭМ, всегда рассматривается с учетом выбранного способа интерполяции. Как было отмечено, используется в основном кубическая сплайн-интерполяция, а также эрмитова интерполяция. У сплайнов вообще и кубических в частности есть ряд преимуществ перед другими функциями, обладающими, как и они, высокой степенью гладкости. Во-первых, по сравнению с полиномиальными функциями у сплайнов нет эффекта «раскачивания» – сильных осцилляций интерполирующей функции в случае, если фрагмент (участок сигнала) имеет заведомо не полиномиальную природу. Кроме того, кубические сплайны являются непрерывными (подразумевается равенство значений на стыках) и дважды дифференцируемыми. Последнее означает, что сам сплайн не имеет острых углов (определенность первой производной) и в любой точке определен радиус его кривизны (определенность второй производной), что дает возможность оценивать интенсивность осцилляций самой ЭМ. Но самым важным является то, что кубический сплайн минимизирует осциллирующее поведение функции, т. е. из всех дважды дифференцируемых, непрерывных на некотором интервале $[a; b]$ функций $f(x)$, интерполирующих заданную совокупность точек $\left\{(x_k, y_k)\right\}_{k=0}^{N-1}$, кубический сплайн меньше всего осциллирует. Математически данное утверждение можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b \left(S''(x)\right)^2 dx \le \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 dx$$

при условии, что $S'(a)=f'(a)$, $S'(b)=f'(b)$, где $S(x)$ – кубический сплайн; $f(x)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Условие записано для непрерывного случая, но оно также верно и для дискретного. Следует отметить, что аналогичное условие справедливо для сплайнов более высоких порядков (в этом случае рассматривается множество n раз дифференцируемых функций, где n – порядок сплайна). Помимо требований непрерывности, дифференцируемости и минимизации осциллирующего поведения необходимо также учитывать случаи не только равенства значений интерполирующей функции самим отсчетам в узлах интерполяции, но и соответствующие равенства производных. Для согласования значений производных интерполирующей функции с заданными может использоваться эрмитова интерполяция. Она обладает хорошими свойствами локальности, позволяет составлять сплайн из звеньев разных степеней, допускает использование односторонних производных. Основным недостатком данного способа является вычислительная сложность, которая имеет большое значение при выборе порядка сплайна. Она значительно возрастает с увеличением порядка сплайна.

Помимо интерполяционных сплайнов возможно также применение сглаживающего сплайна, т. е. функции, которая не будет гарантированно проходить через все узлы интерполяции. Эта методика весьма эффективна в случае, если данные заведомо содержат погрешности и ошибки, поскольку операция сглаживания позволяет уменьшить их влияние. Сглаживающий сплайн минимизирует следующий функционал:

$$J(s) = p\sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_i - s(x_i)\right)^2 +$$

$$+(1-p)\int_{x_1}^{x_N} \lambda(t)\left(s^{(m)}(t)\right)^2 dt,$$

где p – параметр сглаживания, причем $p \in [0;\ 1]$; N – число узлов интерполяции; w_i – неотрицательные весовые множители, часто выбираемые равными 1; $\lambda(t)$ – неотрицательная весовая функция, которая обычно полагается константой и равной 1; m – число, на 1 меньшее степени сглаживающего сплайна.

ЭМ должна обладать симметрией относительно оси времени, которая подразумевает наличие чередующихся локальных максимумов и локальных минимумов, при этом интенсивность чередования, т. е. среднее число экстремумов за определенный интервал, определяется конкретной функцией. Между локальным максимумом и локальным минимумом, как правило, располагается хотя бы один ноль функции, который в дискретном случае рассчитывается не точно, а приближенно, с помощью алгоритмов интерполяции (линейной, квадратичной, сплайновой).

ЭМ формируются, правильнее сказать, *извлекаются*, непосредственно из исходного сигнала, следовательно, такой базис всегда *уникален, апостериорен* (становится полностью известным лишь после разложения данных, а не до него, как, например, в случае с тригонометрическим базисом, где функции известны заранее) и *адаптивен* (т. е. приспосабливается к особенностям и свойствам данных). ДЭМ можно отнести к *непараметрическим* методам обработки и анализа данных в силу отсутствия необходимости выбора априорного базиса для проведения разложения сигнала. Кроме того, ДЭМ ориентирована на так называемую *нелинейную обработку данных,* направленную на поиск нелинейных статистических связей. В таком случае ДЭМ должна оказаться эффективнее методов классического корреляционного и спектрального анализа сигналов, ориентированных на поиск линейных закономерностей в данных.

Применительно к ДЭМ термин «адаптивность» имеет иной смысл, чем в его классической трактовке в цифровой обработке сигналов, где встречается понятие «адаптивный фильтр». *Адаптивный* фильтр – система, параметры которой *адаптируются* (подстраиваются) к сигналу с заранее неопределенной статистической моделью в процессе его обработки. При этом под «адаптацией» понимается настройка параметров (коэффициентов) фильтра в соответствии с заданным критерием. Адаптивный фильтр, являясь параметрической системой (системой с переменными параметрами), осуществляет нелинейную обработку сигналов и не удовлетворяет требованиям аддитивности и однородности, свойственным классическим линейным цифровым фильтрам. Адаптивные фильтры используются в целом ряде практических задач, включая оценивание импульсной характеристики неизвестной системы, очистку сигнала от шума, выравнивание частотной характеристики неизвестной системы (компенсацию искажений, вносимых неизвестной системой), линейное предсказание сигнала, эхоподавление, подавление узкополосной помехи в широкополосном сигнале, идентификацию многолучевого канала связи и пр.

Несмотря на то что существуют, по крайней мере, две различные трактовки понятия «адаптивность», они являются близкими по смыслу.

ДЭМ наиболее эффективно применять для обработки *многокомпонентных* сигналов. Понятие «компонента» синонимично понятию «составляющая». Таким образом, многокомпонентный сигнал – сигнал, состоящий из конечного аддитивного набора разномасштабных компонент (составляющих) различной физической природы, занимающих различные частотные полосы. Под разномасштабностью компонент подразумевается их различное разрешение по времени (различный масштаб) и, следовательно, различная средняя частота. По причине разномасштабности целесообразно применение именно мультимасштабного подхода к обработке и дальнейшему анализу широкого класса нестационарных сигналов.

Понятие ЭМ тесно связано с понятием монокомпонентной функции. Понятие «монокомпонентая функция» допускает, в общем случае, несколько возможных способов определения. Согласно основному из них монокомпонентной называют функцию, одновременно удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция имеет *каноническое амплитудно-фазовое представление*, соответствующее монокомпонентной функции, принимающей вещественные значения (*вещественная монокомпонентная функция*);

2) монокомпонентная функция должна иметь неотрицательную мгновенную частоту. Только неотрицательная мгновенная частота имеет физический смысл;

3) монокомпонентная функция должна иметь неотрицательный модуль (неотрицательную амплитудную огибающую).

В отдельных случаях функцию считают монокомпонентной, только если выполняется условие неотрицательности мгновенной частоты (при этом первое и третье условия не являются обязательными).

Примерами монокомпонентных функций являются атомы Фурье. Все атомы Фурье, будучи монокомпонентными функциями, также являются и ЭМ. Кроме того, если в результате суммирования монокомпонентных функций получается ЭМ, то она не может быть декомпозирована в результате применения алгоритма ДЭМ. Другими словами, классический алгоритм ДЭМ не позволяет получить разложение сигнала на монокомпонентные функции. Применение алгоритма ДЭМ к монокомпонентным функциям приводит к тому, что в разложении присутствуют ЭМ. Таким образом, хотя монокомпонентные функции являются элементарными с точки зрения декомпозиции сигнала, они раскладываются на другие функции. Это объясняется тем, что данные монокомпонентные функции не являются ЭМ.

Установим связь между ЭМ, монокомпонентными функциями, слабыми ЭМ и атомами Фурье. ЭМ входят в число слабых ЭМ. Атомы Фурье входят в число ЭМ. Разность множества монокомпонентных функций и ЭМ образует пустое множество. Атомы Фурье образуются в результате пересечения множества ЭМ и монокомпонентных функций. Справедливость первого соотношения вытекает непосредственно из определения ЭМ и «слабой» ЭМ (обе имеют совпадающее число экстремумов и нулей или число экстремумов и нулей, отличающееся по модулю на 1). Второе утверждение объясняется свойством атомов Фурье, которые относятся к ЭМ. Кроме того, атомы Фурье не раскладываются на более элементарные компоненты при применении ДЭМ, что также подтверждает их принадлежность к ЭМ. Третье соотношение говорит о том, что существуют монокомпонентные функции, которые могут быть декомпозированы с помощью ДЭМ. Наконец, четвертое соотношение обусловлено свойством атомов Фурье.

Формирование аналитического сигнала. После применения преобразования Гильберта к каждой из ЭМ формируются соответствующие комплексные аналитические сигналы, которые могут быть представлены в виде вещественной части (самой ЭМ) и мнимой части (ЭМ, сопряженной по Гильберту), а также в виде модуля (огибающей ЭМ) и фазы (фазы ЭМ) [4], [5]:

$$z_1(k) = c_1(k) + jH\left[c_1(k)\right] = a_1(k)e^{j\varphi_1(k)};$$

$$z_2(k) = c_2(k) + jH\left[c_2(k)\right] = a_2(k)e^{j\varphi_2(k)};$$

$$\ldots$$

$$z_M(k) = c_M(k) + jH\left[c_M(k)\right] = a_M(k)e^{j\varphi_M(k)},$$

где $z_i(k)$ – комплексный аналитический сигнал, соответствующий i-й ЭМ; H – оператор преобразования Гильберта; c_i – вещественная часть аналитического сигнала; a_i – амплитудная огибающая (модуль аналитического сигнала).

При этом сам исходный осциллирующий сигнал $s(t)$ или $s(k)$ представляется следующим образом:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{M-1} a_i(t)e^{\left(j\int \omega_i(t)dt\right)}\right\}$$

– для случая непрерывного сигнала;

$$s(k) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{M-1} a_i(k)e^{\left(j\sum_k \omega_i(k)\Delta k\right)}\right\}$$

– для случая дискретного сигнала, где $a_i(k)$ характеризует зависимость амплитуды i-й ЭМ от времени, т. е. описывает закон амплитудной модуляции, в то время как $\omega_i(k)$ показывает, как изменяется мгновенная частота со временем, т. е. описывает закон частотной модуляции. Сам сигнал представляется в виде конечного набора амплитудно-модулированных и частотно-модулированных функций.

Если тот же самый сигнал разложить, используя классическое преобразование Фурье, то в результате получится следующее выражение:

$$s(k) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{j\omega_i k}\right\},$$

где a_i и ω_i – константы, не зависящие от времени, в отличие от представления по Гильберту. Различие между выражениями очевидно: ДЭМ представляет собой *обобщенное разложение Фурье*. Изменяющаяся амплитуда и мгновенная частота не только заметно повышают эффективность представления, приближая даваемые им результаты по точности к реальным, но и позволяют применять его к нестационарным сигналам, у которых и амплитуда, и мгновенная частота не остаются постоянными. При помощи разложения на ЭМ также хорошо разделяются амплитудная и частотная модуляции. Таким образом, удалось обойти существующее для разложения Фурье ограничение на постоянство амплитуды и частоты.

Расчет спектра Гильберта–Гуанга. Выражение для расчета спектра Гильберта позволяет представлять амплитуду и мгновенную частоту как функции времени в трехмерном пространстве, в котором амплитуда (или соответствующая ей энергия) изображается на частотно-временной плоскости. Это частотно-временное распределение называется *спектром Гильберта–Гуанга* $H(\omega, t)$. Если учесть, что квадрат амплитуды используется для представления мгновенной плотности энергии, то для получения энергетического спектра Гильберта можно использовать квадраты значений амплитуд.

Необходимо отметить, что преобразование Гильберта от функции вида $\cos[\theta(k)]$ или $\sin[\theta(k)]$ не является в точности ее квадратурным сдвигом, а зависит от конкретного вида функции $\theta(k)$. Другими словами, преобразование Гильберта от $\cos[\theta(k)]$ не всегда в точности равняется $\sin[\theta(k)]$. Между истинным преобразованием Гильберта и квадратурным сдвигом исходной функции существует отличие, которое можно оценить следующим образом:

$$\Delta E = \sum_{k=0}^{N-1}\left[c_q(k) - c_h(k)\right]^2,$$

где $c_q(k)$ – квадратурный сдвиг исходной функции $c(k)$: $c_h(k)$ – истинное значение преобразования Гильберта от функции $c(k)$. Основным недостатком данной меры ошибки является то, что она определяет ошибку *интегрально*, т. е. в совокупности всего рассматриваемого сигнала, не позволяя определить конкретные отсчеты, где эта ошибка значительнее, чем у остальных. Это, в свою очередь, существенно затрудняет возможность корректировки данной ошибки. Вместе с тем необходимо отметить, что для большинства рассматриваемых на практике сигналов результаты квадратурного сдвига и преобразования Гильберта совпадают и эти операции эквивалентны друг другу.

Другим возможным способом оценивания ошибки является определение поточечной разницы между квадратом значений мгновенной амплитуды и 1. Очевидно, что если истинное преобразование Гильберта совпадает с квадратурным сдвигом исходной нормированной функции, то эта разница окажется нулевой, т. е. ошибки не будет. В противном случае ошибка будет ненулевой, что будет свидетельствовать либо об ошибках, связанных с проведением нормировки, либо о сложной структуре фазовой функции $\theta(k)$, вносящей эти погрешности.

Для уменьшения ошибки можно также провести предварительную нормировку каждой ЭМ таким образом, чтобы значение амплитудной огибающей ЭМ в каждый момент времени равнялось 1. Единичной константе во временной области соответствует δ-функция в частотной области, локализованная в точке $\omega = 0$. Такой спектр группируется в области низких частот, является предельно узкополосным (его ширина равна нулю) и не перекрывается спектром сигнала $\cos[\theta(k)]$. Итак, для нормировки необходимо сделать следующее:

1) определить все локальные максимумы найденной ЭМ, включив также начальный и конечный отсчеты. В результате будет сформировано множество

$$\{\mathrm{Max}_i\},\ i = 1, 2, 3, \ldots;$$

2) сформировать верхнюю огибающую $\mathrm{Upp}(k)$ для ЭМ

$$\mathrm{Upp}(k) = f_M\left(\mathrm{Max}_i, k\right),\ i = 1, 2, 3, \ldots;$$

3) произвести нормировку ЭМ

$$c_{\mathrm{norm}}(k) = c(k)/\mathrm{Upp}(k).$$

После проведения такой нормировки значения мгновенной амплитуды нормированной ЭМ будут практически всюду равняться 1, и спектр амплитудной огибающей приблизится к δ-функции.

Расчет мгновенных амплитуды и частоты можно выполнить следующим образом. Сначала вычисляется преобразование Гильберта исходного сигнала, после чего формируется комплексный *аналитический сигнал*:

$$A(k) = s(k) + jH[s(k)],$$

где $A(k)$ – комплексный аналитический сигнал; $s(k)$ – исходный сигнал; $H[s(k)]$ – сигнал, преобразованный по Гильберту.

Мгновенная амплитуда сигнала представляет собой модуль аналитического сигнала, а мгновенная фаза (полная фаза), соответственно, является фазой аналитического сигнала. Мгновенная частота определяется дифференцированием полной фазы. Далее приведены соответствующие формулы, поясняющие введенные определения:

$$P(k) = \sqrt{[s(k)]^2 + [H\{s(k)\}]^2};$$

$$\varphi(k) = \mathrm{arctg}\left(\frac{H\{s(k)\}}{s(k)}\right);$$

$$\omega(k) = \varphi'(k) = \frac{[H\{s(k)\}]' s(k) - s'(k) H\{s(k)\}}{[H\{s(k)\}]^2 + s^2(k)},$$

где $P(k)$ – огибающая сигнала; $\varphi(k)$ – фаза сигнала; $\omega(k)$ – мгновенная частота сигнала.

К огибающей и фазе предъявляется ряд требований, основанных на физических представлениях:

– малым изменениям сигнала должны соответствовать малые изменения огибающей и фазы;

– фаза не должна зависеть от энергии сигнала;

– для немодулированного гармонического сигнала огибающая должна равняться амплитуде сигнала, а фаза – его полной фазе, состоящей из линейно нарастающего члена и константы (начальной фазы).

Необходимо отметить, что вычисление мгновенной частоты функции по аналитической формуле, приведенной ранее, возможно лишь в случае, если известны аналитические выражения входящих в эту формулу величин. На практике, однако, все величины определяются численно, поэтому предварительно, чтобы использовать формулу для расчета мгновенной частоты, необходимо аппроксимировать зависимость полной фазы от времени. Это можно сделать полиномом невысокой степени (3–5) по методу наименьших квадратов, поскольку фаза, как правило, является гладкой и монотонной функцией, без резких изменений (иногда требуется предварительно устранить ложные скачки на 360°). Рассчитав коэффициенты аппроксимирующего полинома, можно затем применить к нему операцию дифференцирования по центрально-разностным формулам [6]–[8]. Кроме того, вычисление мгновенной частоты при наличии шума (что практически всегда встречается на практике) является некорректной операцией, и в этом случае сами значения мгновенной частоты будут неинформативными при анализе свойств сигнала. Поэтому предварительно необходимо очистить сигнал от шума (рассматривается случай, когда сигнал и шум занимают разные частотные диапазоны и шум является ярко выраженным ВЧ-процессом), а также устранить краевые эффекты в разложении, чтобы значения мгновенной частоты на краях не порождали ложных выбросов, искажая истинную картину. В случае выполнения этих условий при вычислении мгновенной частоты каждой ЭМ, как правило, получаются результаты, поддающиеся ясному физическому объяснению. Прежде всего, интересуются не столько зависимостью мгновенной частоты отдельно взятой ЭМ от времени, а ЧВР всего сигнала, которое получается при вычислении мгновенной частоты каждой ЭМ и представлении всех этих зависимостей на одной частотно-временной плоскости, что позволяет получить ясную картину частотных свойств сигнала. По виду спектра Гильберта можно определять содержание в сигнале частотной и амплитудной модуляций, а также отчетливо идентифицировать те частотные диапазоны, где сосредоточена основная часть энергии, заключенной в исходном сигнале. Также можно классифицировать сигналы по виду и характеру спектра Гильберта.

Расчет маргинального спектра. Спектр Гильберта–Гуанга является частотно-временным, т. е. его значения зависят и от частоты, и от времени. Для получения спектрального представления нестационарных сигналов, зависящего только от одной переменной, аналогично фурье-анализу, был введен маргинальный спектр, определяемый как

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t)dt,$$

где T – длительность сигнала. Для дискретного случая данная формула принимает вид

$$h(\omega_k) = \sum_i H(\omega_k, i)\Delta i.$$

Физический смысл маргинального спектра в том, что он характеризует полный вклад энергии на конкретной частоте в спектр сигнала. Для этого при вычислении фиксируется конкретная частота на заранее выбранной сетке частот, после чего выполняется интегрирование по времени. Поскольку длительность реальных сигналов всегда конечна, а отсчеты взяты с некоторым, обычно постоянным шагом, то интегрирование можно без потери точности заменить суммированием, так как аналитическое выражение для спектра Гильберта на практике неизвестно. Маргинальный спектр лишен того недостатка, который часто проявляется при применении фурье-преобразования к нестационарным сигналам: он не содержит избыточного количества максимумов и минимумов, имеет более гладкий вид и лучше объясняет физическую природу анализируемых сигналов. Поскольку энергия нестационарных сигналов (очищенных от шума и с удаленными аномалиями) обычно сосредоточена в области низких частот и уменьшается с увеличением частоты, маргинальный спектр также имеет большие значения в области низких частот и спадает до нулевого уровня с ростом частоты. Картина, получаемая после использования преобразования Фурье, может радикально отличаться от описанной: спектр может иметь осциллирующий характер во всем рассматриваемом частотном диапазоне, что не позволяет сделать четких выводов о его истинном частотном содержании.

Частота в спектре Гильберта $H(\omega, t)$ и маргинальном спектре $h(\omega)$ имеет совершенно отличный смысл от того, что известен в спектральном анализе Фурье. В фурье-представлении наличие энергии на некоторой частоте ω означает, что гармоническая компонента содержится в некотором частотном интервале, содержащем данную частоту. В данном случае существование энергии на определенной частоте ω означает только то, что на полном интервале задания сигнала существует большая вероятность появления такой гармонической волны на локальном участке.

На самом деле спектр Гильберта – это взвешенное ненормированное распределение «время–частота–амплитуда». Вес, задаваемый для каждой частотно-временной ячейки, – это локальная амплитуда. Следовательно, частота в маргинальном спектре указывает только на вероятность того, что колебание с такой частотой существует. Конкретное время этого колебания задается в полном спектре Гильберта. Существует небольшое сходство спектра Фурье и маргинального спектра. В то время как спектр Фурье в связи с обычно ненулевым средним сигнала доминируется постоянным слагаемым, маргинальный спектр дает близкое к непрерывному распределение энергии. Фурье-спектр для нестационарных сигналов может быть лишен всякого физического смысла.

В дополнение к маргинальному спектру можно также определить уровень мгновенной плотности энергии IE, зависящий от времени:

$$IE(t) = \int_\omega H^2(\omega, t)d\omega$$

для непрерывного случая. Для дискретного случая данная формула принимает вид

$$IE(k) = \sum_i H^2(\omega_i, k)\Delta\omega.$$

Данная операция выполняется и в фурье-анализе, когда используется преобразование Фурье с окном, а также в разнообразных вейвлет-алгоритмах. Однако в данном случае получаемая мера определения плотности энергии является чувствительной к различным событиям, происходящим в сигнале: изменениям амплитуды по некоторому закону (амплитудная модуляция), флуктуациям, выбросам, резким скачкам и т. д. Таким образом, располагая зависимостью мгновенной плотности энергии от времени, можно выполнить не только анализ сигнала на выявление скрытых особенностей, но и использовать полученную характеристику для сегментации и целенаправленной фильтрации.

Было представлено частотно-временное распределение Гильберта–Гуанга как современный адаптивный метод обработки и анализа осциллирующих сигналов. Сделан обзор основных методов-аналогов, включая оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование. Показаны основные операции по расчету аналитического сигнала и представление исходного осциллирующего сигнала с использованием извлеченных эмпирических мод.

Приведены основные процедуры по расчету частотно-временного спектра Гильберта–Гуанга и показаны отличия квадратурного сдвига исходной функции от истинного значения преобразования Гильберта. Описана процедура нормировки исходной эмпирической моды. Приведены особенности вычисления мгновенной частоты для реальных осциллирующих сигналов в шуме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлет-анализ в Matlab. 4-е изд. М.: ДМК Пресс, 2014.

2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / пер. с англ. М.: Мир, 2005. 671 с.

3. Чуи К. Введение в вейвлеты / пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.

4. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. 3-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 768 с.

5. Huang N. E. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis // Proc. of the Royal Society of London. 1998. Vol. 454. P. 903–995.

6. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование Matlab. М.: Вильямс, 2001. 720 р.

7. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк, 2002. 840 с.

8. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

D. M. Klionskiy, V. V. Geppener
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

APPLICATION OF TIME-FREQUENCY HILBERT-HUANG DISTRIBUTION FOR ANALYZING OSCILLATING SIGNALS

Is devoted to studying the time-frequency Hilbert-Huang spectrum for adaptive signal processing. Time-frequency distribution is constructed using the components extracted from the original signal using the empirical mode decomposition (EMD). Empirical modes are used for calculating the analytic signal and further the time-frequency spectrum. We compute full phase of the signal, which is further used for calculating the instantaneous frequency. The paper also discusses empirical mode normalization for calculating the instantaneous frequency and the necessary preprocessing. Hilbert-Huang spectrum may be used in order to extract amplitude and frequency modulations in signals, classify signals, and find areas of energy concentration. This spectrum may be applied in order to calculate instantaneous energy density and marginal spectrum, which depends only on frequency and can be considered as an analogue of Fourier spectrum for non-stationary signals.

Time-frequency distribution, Hilbert-Huang spectrum, empirical mode decomposition, instantaneous frequency, empirical mode, oscillating signal

УДК-519.688

Ар. Ю. Филатов, Ан. Ю. Филатов, А. Т. Гулецкий, Д. А. Карташов, К. В. Кринкин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Сравнение современных лазерных алгоритмов SLAM

Даётся полное описание общей методологии алгоритмов SLAM (одновременное построение карты и определение на ней собственного местоположения), основанных на данных 2D-сканирования реальных помещений. Существующие подходы могут быть проклассифицированы в рамках представленной модели, а также возможно провести их сравнение. Были рассмотрены следующие алгоритмы: Google Cartographer [1], GMapping [2], tinySLAM [3]. Согласно их оценке, Cartographer и GMapping более точны, чем tinySLAM, а Cartographer – самый надежный из алгоритмов. Рассмотрен вопрос количественного и качественного оценивания результатов работы алгоритма одновременного построения карты и определения на ней местоположения. Количественная оценка предполагает наличие истиной траектории движения робота во время записи тестовых данных. Качественная оценка может быть выполнена только человеком: необходимо оценить консистентность карты, наличие на ней самопересечений, разрывов прямых линий и прочее.

2D лазерный SLAM, cartographer, gmapping, tinySLAM, groundtruth

Одновременное ориентирование и построение карты (англ. вариант, SLAM) – это проблема построения карты и в то же время локализации робота внутри этой карты без предварительного знания окружения и положения мобильной платформы. Существуют различные подходы SLAM, основанные на данных от разных типов датчиков. Популярная конфигурация входных данных для мобильных платформ обеспечивает: