



УДК 621.372.81.09

Д. А. Ходьков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Численный расчет собственных частот цилиндрического волновода произвольного поперечного сечения

*Рассмотрен новый, основанный на строгой постановке подход, позволяющий рассчитать собственные частоты цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками произвольного поперечного сечения. Задача сведена к решению двух уравнений – интегральному и интегродифференциальному относительно составляющих плотности токов, текущих по стенкам волновода. Показано, что полученные уравнения допускают последовательное решение. Предложен эффективный численный алгоритм решения данных уравнений с помощью метода коллокации. Алгоритм проверен на классическом примере бесконечного круглого волновода с идеально проводящими стенками. Констатировалось совпадение в пределах погрешности численных и теоретических значений собственных частот. Приведен пример расчета критических частот волновода сложного поперечного сечения, образованного пересечением частей двух окружностей.*

### Цилиндрические волноводы, собственные частоты, система интегродифференциальных уравнений, численный анализ

**Вывод основных уравнений и постановка задачи.** Определение собственных (критических) частот и соответствующих им собственных функций для цилиндрических волноводов – проблема, имеющая большое практическое значение. В настоящее время для решения подобных задач в основном применяются сеточные методы, ориентированные на прямое использование ЭВМ [1].

Предлагается метод численного решения аналогичной задачи, применимый для любого кусочно-гладкого контура  $\Gamma$ . Подобный подход был рассмотрен в [2], однако был применен лишь к произвольным незамкнутым цилиндрическим поверхностям для случая, когда внешнее (падающее) поле задано, а его область существования не ограничена. Идея метода состоит в сведении трехмерной векторной задачи о нахождении электромагнитного поля внутри цилиндрического волновода к двум одномерным уравнениям (интегродифференциальному и интегральному) первого рода относительно плотности токов, наведенных на стенках волновода. Структура полученных уравнений допускает их последовательное

решение, что существенно повышает эффективность численного алгоритма.

Введем декартову  $x, y, z$  и ортогональную цилиндрическую  $q, t, z$  системы координат с общей осью  $Z$ , параллельной образующей волновода (рис. 1). Связь между декартовой и цилиндрической системами координат в точке наблюдения  $M = M(t, q, z)$  и истока  $P = P(\tau, \nu, \xi)$  задается в виде

$$\begin{aligned}x &= x(t, q) & \xi &= \xi(\tau, \nu) \\y &= y(t, q) & \eta &= \eta(\tau, \nu)\end{aligned}$$

соответственно. Координатные орты  $\mathbf{q}^0, \mathbf{t}^0, \mathbf{z}^0$ , определенные в точке  $M$ , и координатные орты  $\mathbf{v}^0, \mathbf{\tau}^0, \mathbf{\xi}^0$ , определенные в точке  $P$ , определяют правую тройку векторов.

Декартовы составляющие точки наблюдения  $M$  обозначим  $x, y, z$ , ее цилиндрические координаты  $t, q, z$ . Для точки истока  $P$  обозначим декартовы и цилиндрические координаты  $\xi, \eta, z$  и  $\tau, \nu, z$  соответственно.

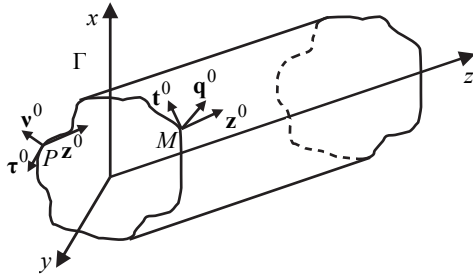


Рис. 1

Поверхность волновода совпадает с координатной поверхностью  $q = q_0 = \text{const}$ . Коэффициенты Ламэ

$$l_q = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2} \quad \text{и} \quad l_t = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

на поверхности  $S$  волновода

равны, соответственно,  $h_v(\tau) = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2}$

и  $h_\tau(\tau) = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)^2}$ .

Учитывая, что конфигурация поверхности  $S$  не зависит от координаты  $z$ , представим искомую функцию определяющую плотность поверхности токов, текущих по стенкам волновода, в виде

$$\mathbf{j}(t, q, z) = \mathbf{j}^\perp(t, q^0) e^{-i\beta z} = \mathbf{j}^\perp(t) e^{-i\beta z},$$

где  $\mathbf{j}^\perp(t) = \mathbf{t}^0 j_t^\perp(t) + \mathbf{z}^0 j_z^\perp(t)$ ;  $\beta$  – постоянная распространения вдоль оси  $z$ . (Временная зависимость принята в виде множителя  $e^{+i\omega t}$ , который всюду опущен.) Эти токи определяют внутри волновода электромагнитное поле, вектор которого можно представить в виде

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\psi - i\omega\mathbf{A}, \quad (1)$$

где  $\psi$  и  $\mathbf{A}$  – скалярный и векторный потенциалы соответственно, связанные условием калибровки Лоренца:

$$\text{div}\mathbf{A} + i\omega\epsilon\mu\psi = 0, \quad (2)$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно, диэлектрическая и магнитная проницаемости однородной изотропной среды, заполняющей волновод. Тогда:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} dl \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}^\perp(\tau) \frac{e^{-ikL}}{L} d\xi, \quad (3)$$

где  $L = \sqrt{R^2 + (z - \xi)^2}$  ( $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  – расстояния между точкой наблюдения  $M$  и точкой истока  $P$ );  $k = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  – волновое число, где  $dl = h_\tau d\tau$  – элемент длины контура  $\Gamma$ .

Используя известное интегральное представление функции Ханкеля [1]

$$H_0^{(2)}(S) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\sqrt{S^2 + \xi^2}}}{\sqrt{S^2 + \xi^2}} d\xi,$$

выражение (3) можно записать в виде

$$\mathbf{A} = e^{-i\beta z} \frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} \mathbf{j}^\perp(\tau) H_0^{(2)}(\gamma R) dl, \quad (4)$$

где  $\gamma = \sqrt{k^2 - \beta^2}$  – поперечное волновое число.

Найдем компоненты  $A_t$  и  $A_z$  векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} A_t = \langle \mathbf{A}, \mathbf{t}^0 \rangle &= -e^{-i\beta z} \frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \langle \mathbf{t}^0, \mathbf{t}^0 \rangle H_0^{(2)}(\gamma R) dl = \\ &= -e^{-i\beta z} \frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \omega(t, \tau) H_0^{(2)}(\gamma R) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega(t, \tau) = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$ ;

$$A_z = \langle \mathbf{A}, \mathbf{z}^0 \rangle = -e^{-i\beta z} \frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} j_z^\perp(\tau) H_0^{(2)}(\gamma R) h_\tau d\tau. \quad (6)$$

Выражение для скалярного потенциала  $\Psi$  можно определить из (2):

$$\begin{aligned} \Psi(t, q, z) &= \frac{i}{\omega\epsilon\mu} \text{div}_M \mathbf{A} = \frac{i}{\omega\epsilon\mu} \text{div}_M (\mathbf{A}^\perp(t, q) e^{-i\beta z}) = \\ &= \frac{i}{\omega\epsilon\mu} e^{-i\beta z} \left\{ \text{div}_M \mathbf{A}^\perp(t, q) - i\beta A_z^\perp(t, q) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Индекс  $M$  означает, что операция  $\text{div}$  определена в точке наблюдения  $M$ . Используя представление (4), первое слагаемое в (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{div}_M \mathbf{A}^\perp(t, q) &= \\ &= -\frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} \text{div}_M \left\{ \mathbf{j}^\perp(\tau), H_0^{(2)}(\gamma R) \right\} h_\tau d\tau = \\ &= \frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} \left\langle \mathbf{j}^\perp(\tau), \text{grad}_P H_0^{(2)}(\gamma R) \right\rangle h_\tau d\tau = \\ &= \frac{\mu i}{4} \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \frac{\partial H_0^{(2)}(\gamma R)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Индекс «р» означает, что операция grad берется в точке истока  $P$ . Тогда выражение для скалярного потенциала  $\psi(t, q, z)$  определяется в следующем окончательном виде:

$$\psi = e^{-i\beta z} \psi^\perp(t, q),$$

где

$$\begin{aligned} \psi^\perp(t, q) = & -\frac{1}{4\omega\epsilon} \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \frac{\partial H_0^{(2)}(\gamma R)}{\partial \tau} d\tau - \\ & -\frac{i\beta}{4\omega\epsilon} \oint_{\Gamma} j_z^\perp(\tau) H_0^{(2)}(\gamma R) h_\tau d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (1) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -e^{-i\beta z} \left\{ \left[ \frac{1}{l_t} \frac{\partial \psi^\perp(t, q)}{\partial t} \mathbf{t}^0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{l_q} \frac{\partial \psi^\perp(t, q)}{\partial q} \mathbf{q}^0 - i\beta \psi^\perp(t, q) \mathbf{z}^0 \right] + i\omega \mathbf{A}^\perp \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что все величины, характеризующие электромагнитное поле внутри волновода, имеют вид  $f = fe^{-i\beta z}$ , в чем есть очевидный физический смысл. Однако указанная зависимость не навязывалась априори, а была получена автоматически, исходя из вида искомой функции  $j(t, q, z)$ , определяющей плотность поверхностных токов.

На идеально проводящих стенках волновода должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{cases} E_t = \langle \mathbf{E}, \mathbf{t}^0 \rangle = -e^{-i\beta z} \frac{1}{l_t} \frac{\partial \psi^\perp(t, q)}{\partial t} - i\omega A_t = 0, \\ E_z = \langle \mathbf{E}, \mathbf{z}^0 \rangle = -e^{-i\beta z} i\beta \psi^\perp(t, q) - i\omega A_z = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Подставив в (9) выражения (5), (6) и (8), получим в результате следующую систему:

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \frac{\partial H_0^{(2)}(\gamma R)}{\partial \tau} d\tau - \gamma^2 \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \omega(\tau, t) H_0^{(2)}(\gamma R) d\tau \right\} = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow q_0} \left\{ \gamma^2 \oint_{\Gamma} j_z^\perp(\tau) H_0^{(2)}(\gamma R) h_\tau(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + i\beta \oint_{\Gamma} j_t^\perp(\tau) \frac{\partial H_0^{(2)}(\gamma R)}{\partial \tau} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, исходная задача сведена к двум уравнениям, которые можно решать последовательно. Так как в (10) входит только неизвестная функция  $j_t^\perp(t)$ , то после ее нахождения (11) можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции  $j_z^\perp(t)$ . Этот путь соответствует определению волновых мод  $H$ -типа. Случай, когда  $j_t^\perp(t) \equiv 0$ , соответствует волновым модам  $E$ -типа. Тогда для нахождения функций  $j_t^\perp(t)$  достаточно решить (11), где второе слагаемое равно нулю.

После нахождения функций  $j_t^\perp(t)$  и  $j_z^\perp(t)$  электромагнитное поле внутри волновода определяется путем численного интегрирования.

**Алгоритм численного решения.** Случай  $H$ -поляризации. Уравнение (10) может быть решено численно, например методом коллокации [3]. Разобьем контур  $\Gamma$  на  $N$  сегментов, обозначив через  $t_{n-1}$  и  $t_n$  начальную и конечную точки  $n$ -го интервала.

Будем искать функцию  $j_t^\perp(t)$  в виде разложения по системе базисных функций  $\{\psi_n(t)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  с неизвестными коэффициентами  $\{C_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ :

$$j_t^\perp(t) = \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(t). \quad (12)$$

Наиболее простой алгоритм получается, если выбрать в качестве базисной систему функций [3]:

$$\psi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [t_{n-1}, t_n], \\ 0, & \text{при } t \notin [t_{n-1}, t_n]. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда (10) может быть записано в виде

$$\sum_{n=1}^N C_n A_n(t) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_n(t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ H_0^{(2)}(\gamma R) \right\}_{\tau=t_{n-1}}^{\tau=t_n} - \\ & - \gamma^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega(\tau, t) H_0^{(2)}(\gamma R) d\tau. \end{aligned}$$

Выбрав в качестве точек коллокации середины элементов разбиения  $\tilde{t}_j = \frac{t_{n-1} + t_n}{2}$ , придем к

следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{n=1}^N A_{jn} C_n = 0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Элементы матрицы  $\|A\|$  определяются выражением

$$A_{jn} = \frac{H_1^{(2)}(\gamma R(\tilde{t}_j, t_{n-1}))}{R(\tilde{t}_j, t_{n-1})} g(\tilde{t}_j, t_{n-1}) - \frac{H_1^{(2)}(\gamma R(\tilde{t}_j, t_n))}{R(\tilde{t}_j, t_n)} g(\tilde{t}_j, t_n) - \gamma^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega(\tau, t) H_0^{(2)}(\gamma R) d\tau, \quad (15)$$

где

$$R(t, \tau) = \sqrt{(x(t) - \xi(\tau))^2 + (y(t) - \eta(\tau))^2}, \\ g(t, \tau) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} (x(t) - \xi(\tau)) + \frac{\partial y(t)}{\partial t} (y(t) - \eta(\tau)).$$

После решения СЛАУ (14) и нахождения коэффициентов  $\{C_n\}^m, n = 1, 2, \dots, N$ , функцию  $j_t^\perp(t)$  можно определить по (12). Тогда, можно считать известным и интеграл – второе слагаемое в (11).

Неизвестные функции  $j_z^\perp(t)$ , входящие в (11), можно разложить по базису (13) с неизвестными коэффициентами  $\{D_n\}, n = 1, 2, \dots, N$ :

$$j_z^\perp(t) = \sum_{n=1}^N D_n \psi_n(t).$$

Тогда, определение функции  $j_z^\perp(t)$  сводится к решению СЛАУ

$$\sum_{n=1}^N M_{jn} D_n = f_j,$$

где

$$M_{jn}(t) = \gamma^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} H_0^{(2)}(\gamma R(\tilde{t}_j, \tau)) h_\tau(\tau) d\tau, \quad (16) \\ f_j = -i\beta \sum_{n=1}^N C_n \left\{ H_0^{(2)}(\gamma R(\tilde{t}_j, \tau)) \right\} \Big|_{\tau=t_{n-1}}^{\tau=t_n}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к нахождению ядра матрицы (15), представляющего собой счетное множество векторов  $\{C_n\}$ .

Значение параметра  $\gamma$ , определяющее значение очередного  $\{C_n\}$ , является критическим значением  $\gamma_K^H$ , соответствующим данному  $H$ -типу колебаний.

*Случай E-поляризации.* Уравнение (11), где второе слагаемое в случае  $E$ -поляризации тождественно равно нулю, может быть решено численно, например методом коллокации [3]. Функцию  $j_z^\perp(t)$  будем искать в виде разложения по системе (13) с неизвестными коэффициентами  $\{B_n\}, n = 1, 2, \dots, N$ :

$$j_z^\perp(t) = \sum_{n=1}^N B_n \psi_n(t). \quad (17)$$

Тогда, определение функции  $j_z^\perp(t)$  сводится к решению СЛАУ

$$\sum_{n=1}^N M_{jn} B_n = 0. \quad (18)$$

После нахождения коэффициентов  $\{B_n\}, n = 1, 2, \dots, N$ , функция  $j_z^\perp(t)$  определяется по (17). Коэффициенты  $M_{jn}(t)$  определены выражением (16).

Таким образом, нахождение функции  $j_z^\perp(t)$ , соответствующей случаю  $E$ -поляризации, сведено к нахождению ядра матрицы (16), счетного множества векторов  $\{B_n\}$ . Значение параметра  $\gamma$ , определяющее значение очередного  $B_n$ , является критическим значением  $\gamma_K^E$ , соответствующим данному  $E$ -типу колебаний.

После нахождения функций, определяющих плотность поверхностного тока, текущих по стенкам волновода, составляющие вектора  $\mathbf{E}$  в произвольной точке внутри волновода определяются численным интегрированием.

С целью проверки вышеизложенного подхода на основе (14), (18) был осуществлен расчет собственных частот круглого волновода с идеально проводящими стенками единичного радиуса. В табл. 1 приведены числовые значения  $\gamma_K^H, \gamma_K^E$  и, соответствующие им известные теоретические значения  $\gamma_{кр}^*$  для случаев  $E$ - и  $H$ -поляризации первых

Таблица 1

Параметр	Тип волны								
	$H_{11}$	$H_{21}$	$H_{01}$	$H_{31}$	$E_{01}$	$E_{11}$	$E_{21}$	$E_{02}$	$E_{31}$
$\gamma_K^H, \gamma_K^E$	1.8412	3.0543	3.8317	4.2006	2.4049	3.8316	5.1351	5.5200	6.3784
$\gamma_{кр}^*$	1.841	3.054	3.832	4.200	2.405	3.832	5.136	5.520	6.380

Таблица 2

Тип	$E$	$E$	$H$	$H$	$E$	$E$	$H$
$\frac{\lambda_{кр}}{d}$	0.890	0.563	0.523	0.469	0.457	0.418	0.400

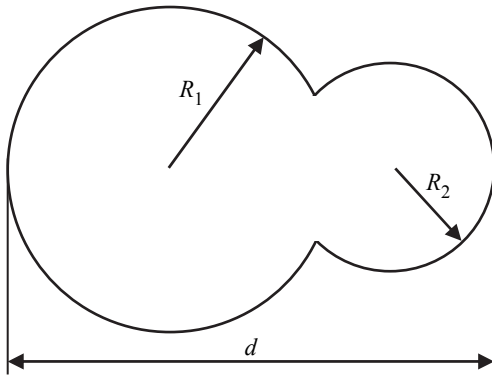


Рис. 2

шести основных типов волн. (Теоретические значения в данном случае являются корнями функции Бесселя и ее первой производной.) Как видно, имеет место совпадение числовых и теоретических значений в пределах заданной  $\Delta = 10^{-3}$  относительной погрешности. Также на основе описанного ранее подхода был произведен расчет собственных частот волновода с идеально проводящими стенками, поперечное сечение которого образовано частью двух пересекающихся окружностей (рис. 2) для случаев  $R_2 = 2R_1, d = 1.8(R_1 + R_2)$ . В табл. 2 приведены числовые значения критических длин волн  $\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\gamma_{кр}}$  относи-

тельно  $d$ . В процессе численного решения контролировалась сходимость результата путем последовательного увеличения ранга разбиения (размерностью СЛАУ (14), (18) при относительной погрешности результата  $\Delta = 10^{-3}$ ).

Таким образом, показано, что задача о нахождении собственных частот цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками произвольного поперечного сечения может быть сведена к системе двух интегральных уравнений (10), (11). Данная система может быть решена численно методом коллокации и сведена к решению двух СЛАУ (14), (18) с комплексными коэффициентами. Описанный алгоритм был применен к задаче нахождения собственных частот бесконечного цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками. Зафиксировано совпадение теоретических и числовых значений в пределах заданной точности. В развитие вышеописанного подхода определены собственные частоты для случая волновода сложного поперечного сечения (рис. 2). Данный подход применим для любого кусочно-гладкого контура  $\Gamma$  (см. рис. 1), участки которого могут быть аппроксимированы частью координатной линии любой ортогональной системы координат.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиткин Н. Н., Альшина Е. А. Численные методы. Кн. 1: Численный анализ. М., 2013.
2. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
3. Пименов Ю. В., Ходьков Д. А. Излучение симметричного электрического вибратора, расположенного параллельно прямоугольному экрану // Радиотехника и электроника. 1991. Вып. 12. С. 2403–2405.

D. A. Khodkov

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## NUMERICAL CALCULATION OF EIGENFREQUENCIES OF A CYLINDRICAL WAVEGUIDE WITH AN ARBITRARY CROSS-SECTION

*A new approach based on a strict formulation is considered, which allows to calculate the eigenfrequencies of a cylindrical waveguide with ideally conducting walls and an arbitrary cross-section. The problem is reduced to the solution of two equations – integral and integro-differential relative to the components of the current density flowing along the walls of the waveguide. It is shown that the equations obtained allow a sequential solution. An effective numerical algorithm for solving these equations using the collocation method is proposed. The algorithm is tested on the classical example of an infinite round waveguide with perfectly conducting walls. Matching between the numerical and theoretical values of eigenfrequencies within the error was found. An example of calculating the critical frequencies of a waveguide of a complex cross-section formed by the intersection of the parts of two circles is given.*

**Cylindrical waveguides, eigenfrequencies, system of integro-differential equations, numerical analysis**

---