

T. R. Zhangirov, A. S. Perkov, S. A. Ivanova, A. A. Liss  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

N. Yu. Grigoryeva  
Saint Petersburg SRCES RAS

L. V. Chistyakova  
Center for Culture Collection of Microorganisms SPSU

## COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF SOLUTION OF CLASSIFICATION TASK BY METHODS OF LINEAR DISCRIMINANT ANALYSIS AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

*We compare two methods of classification: linear discriminant analysis and artificial feedforward neural networks. The comparison is carried out on the example of the task of classifying cyanobacteria in a series of self-fluorescence spectra of the individual cells. Methods of visualization and analysis of classification results, including new methods based on the entropy of classification results, have been demonstrated. The correlation between the results of linear discriminant analysis and classification of neural networks is determined. The key moments are shown, on the basis of which it is possible to reveal an incorrectly trained model of the neural network, and also a new method for analyzing the quality of the generalization is proposed. The methods of comparing the results of linear discriminant analysis and neural networks presented in the paper are applicable for comparing neural networks with other machine learning algorithms and statistical classifiers. The proposed method allows analyzing the learning process of a neural network in order to quickly identify critical deviations in its operation and possible illogical behavior in the future.*

**Classification, linear discriminant analysis, neural networks, statistical analysis, gradient descent**

УДК 519.852.6

В. Е. Герцман  
АО «НИЦ СПб ЭТУ»

А.-В. И. Середа  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Аппроксимация траекторных рядов с использованием кубических В-сплайнов (практический аспект)

*Анализируется практическая эффективность использования аппарата кубических В-сплайнов для аппроксимации временных рядов траекторных измерений. Аппроксимирующая функция представляется в виде линейной комбинации базисных сплайнов, обеспечивающей минимум суммы квадратов невязок измерений. Рассматривается возможность аппроксимации рядов с различной степенью сглаженности, согласованная аппроксимация координатных рядов и соответствующих рядов скоростей, интерполяция аппроксимированных данных между узлами исходной сетки. Заполнение пропусков в измерениях осуществляется с помощью линейной модели. Обнаружение интервалов с аномальными измерениями и их корректировка на этих интервалах осуществляется с помощью медианной обработки исходного ряда с последующим сглаживанием с помощью фильтра Хэннинга. Для оценки практической эффективности предлагаемого подхода к аппроксимации траекторных измерений были реализованы алгоритмы расчетов в программе пакете MATLAB и проведена серия вычислительных экспериментов с различными наборами реальных данных.*

**Временные ряды, кубические В-сплайны, аппроксимация, интерполяция**

Под траекторными рядами подразумевается временная последовательность измерений трех составляющих радиуса-вектора и вектора скоро-

сти движущегося высокодинамического объекта, выполненных бортовым навигационным прибором. Предполагается, что частота измерений су-

щественно выше верхней границы частотного спектра параметров движения объекта, а ошибка измерений является аддитивной и статистически независимой от измеряемого параметра.

Наибольшие трудности при аппроксимации траекторных рядов вызывают участки резкого изменения динамики объекта, что обусловлено следующими причинами:

- резким увеличением значений второй производной по времени от скорости объекта (появлением так называемых *jerks*-толчков);
- возможным пропуском нескольких тактов измерений;
- появлением дополнительного шума в измерениях.

Кроме этого, на разных участках траектории требуется либо подчеркнуть, либо, наоборот, сгладить динамические колебания в скоростных параметрах движения объекта, предоставив оператору-обработчику информации эффективные средства для анализа динамики движения объекта.

Предлагаемый в данной работе подход к аппроксимации траекторных рядов позволяет успешно с практической точки зрения преодолевать указанные трудности. Вместе с тем он является вполне универсальным и применим к временным рядам любой природы. В этой связи дальнейшее изложение как постановки задачи, так и предлагаемого метода ее решения осуществляется применительно к временным рядам достаточно общего вида.

**1. Постановка задачи аппроксимации временного ряда.** Пусть заданы значения  $x_k^{\sim}$  – результаты измерений значений некоторой физической величины  $X(t)$  в точках  $t_k^{\sim}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , расположенных на отрезке  $[a, b]$ . Будем называть переменную  $t$  временем. Предполагается, что функция  $X(t)$  дважды непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , но ее аналитическое задание неизвестно.

Значения  $t_k^{\sim}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  упорядочены по возрастанию и расположены на отрезке  $[a, b]$  практически регулярно в том смысле, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} t_{k+1}^{\sim} - t_k^{\sim} &= h_k > 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ t_0^{\sim} &= a; \quad t_N^{\sim} = b; \\ |h_k - h| &\leq \delta_k, \quad h > 0, \quad \delta_k \leq \delta > 0, \\ \forall k &= 0, 1, 2, \dots, N-1; \end{aligned}$$

где  $\delta > 0$  – пренебрежимо малая величина по сравнению со значением  $h$ .

С практической точки зрения будем считать, что измерения  $x_k^{\sim}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  образуют временной ряд  $X_0^{\sim N}(t)$ , отсчеты которого заданы в узлах  $t_k$  равномерной одномерной сетки  $\omega_t$  с шагом  $h = (b - a)/N$ :

$$\begin{aligned} \omega_t &= \{t_k : t_0 = a; \quad t_{k+1} = t_k + h, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad t_N = b\}. \end{aligned}$$

Предполагается, что значения  $x_k^{\sim}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  связаны с  $x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  – истинными значениями функции  $X(t)$  в узлах сетки  $\omega_t$  в соответствии с соотношением:

$$x_k^{\sim} = x_k + \varepsilon_k^x, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где  $\varepsilon_k^x$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  – реализации случайной величины  $\varepsilon^x$  – погрешности измерений. Будем считать, что  $\varepsilon^x$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{\varepsilon^x}$ .

Требуется аппроксимировать временной ряд  $X_0^{\sim N}(t)$  дважды непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$  функцией  $S(t)$ .

**2. Решение задачи аппроксимации временного ряда с использованием В-сплайнов.** Для решения поставленной задачи предлагается использовать  $B_k(t)$  – базисные кубические В-сплайны. Общая схема построения с помощью кубических В-сплайнов дважды непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$  функции  $S(t)$ , аппроксимирующей временной ряд  $X_0^{\sim N}(t)$  на равномерной сетке  $\omega_b$  хорошо известна (см., напр., [1], [2]). Рассмотрим эту схему в редакции, адаптированной к рассматриваемой в данной работе задаче.

Введем в рассмотрение разреженную одномерную регулярную сетку  $\omega_t^R$  с шагом  $h_R = R \cdot h$ , где  $h = (b - a)/N$ ;  $R \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \omega_t^R &= \{t_k^R : t_0^R = a; \quad t_{k+1}^R = t_k^R + h_R, \\ k &= -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n+2; \quad t_{n-1}^R < b; \quad t_n^R \geq b\}, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $R$  – коэффициент, характеризующий большую или меньшую разреженность сетки  $\omega_t^R$  по сравнению с сеткой  $\omega_b$  в узлах которой представлены реальные данные. Чем больше значение  $R$ , тем в большей степени будет наблюдаться сглаживаю-

ший эффект в результате аппроксимации, а на проведение расчетов будет требоваться при прочих равных условиях меньше времени и наоборот.

Функции  $B_i(t)$  задаются на каждом отрезке  $[t_i^R, t_{i+4}^R]$ ,  $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1$ , расширенной сетки  $\omega_i^R$  в соответствии с формулами:

$$B_i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_i^R; \\ (t - t_i^R)^3 / (6h_R^3), & t \in [t_i^R, t_{i+1}^R]; \\ (h_R^3 + 3h_R^2(t - t_{i+1}^R) + 3h_R(t - t_{i+1}^R)^2 - \\ - 3(t - t_{i+1}^R)^3) / (6h_R^3), & t \in [t_{i+1}^R, t_{i+2}^R]; \\ (h_R^3 + 3h_R^2(t_{i+3}^R - t) + 3h_R(t_{i+3}^R - t)^2 - \\ - 3(t_{i+3}^R - t)^3) / (6h_R^3), & t \in [t_{i+2}^R, t_{i+3}^R]; \\ (t_{i+4}^R - t)^3 / (6h_R^3), & t \in [t_{i+3}^R, t_{i+4}^R]; \\ 0, & t \geq t_{i+4}^R, \end{cases} \quad (2)$$

где  $t_{i+1}^R - t_i^R = h_R, i = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, n-1, n, n+1, n+2$ .

Здесь  $t_{-3}^R, t_{-2}^R, t_{-1}^R$  – три узла, дополняющих сетку  $\omega_i^R$  слева от отрезка  $[a, b]$ , а  $t_{n+1}^R, t_{n+2}^R, t_{n+3}^R$  – три узла, дополняющие сетку  $\omega_i^R$  справа от отрезка  $[a, b]$ .

Функция (сплайн)  $S(t)$ , аппроксимирующая данные измерений, представляется в виде линейной комбинации базисных сплайнов  $B_i(t)$ :

$$S(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t). \quad (3)$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_i, i = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, n-1$  в (3) определяются в результате решения системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t_k) = x_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Система (4) является переопределенной ( $N+1 > n+3$ ). Для таких систем, как известно, ищется обобщенное решение, обеспечивающее минимум суммы квадратов невязок уравнений системы. Другими словами, обобщенное решение соответствует точке минимума функции  $F(\alpha)$ :

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^N [x_k^{\sim} - \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t_k)]^2,$$

где вектор  $\alpha = (\alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})^T$  – вектор, компонентами которого являются искомые коэффициенты.

Обобщенное решение системы (4) может быть найдено с помощью так называемой первой трансформации Гаусса, которая приводит к решению системы линейных уравнений с квадратной неособенной матрицей:

$$A^T A \alpha = A^T b, \quad (5)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов системы (4);  $b$  – вектор правых частей системы (4).

Система (5) имеет единственное решение и представляет собой систему линейных уравнений с симметричной положительно определенной квадратной матрицей. Ее решение может быть найдено, например, методом квадратных корней (схема Холецкого), согласно которому [3] матрица системы (5)  $A^T A$  представляется в виде:

$$A^T A = LL^T,$$

где  $L$  – левая треугольная матрица.

В результате решение системы (5) сводится к последовательному решению двух систем линейных уравнений с треугольными матрицами:

$$L\beta = A^T b$$

и

$$L^T \alpha = \beta.$$

После подстановки в (3) найденных в результате решения системы (5) значений коэффициентов  $\alpha_i, i = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, n-1$  получим искомую функцию  $S(t)$ , которая будет аппроксимировать данные измерений на отрезке  $[a, b]$ .

Отметим, что при необходимости в рамках рассмотренной схемы может быть реализована взвешенная аппроксимация временного ряда. С этой целью система линейных уравнений (4) переписывается в виде:

$$\lambda_k \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t_k) = \lambda_k x_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где  $\lambda_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots, N$  – весовые множители, назначаемые в зависимости от степени важности точного выполнения того или иного уравнения в переопределенной системе линейных уравнений (4).

Обобщенное решение системы (6) будет соответствовать, очевидно, точке минимума функции  $F^{\sim}(\alpha)$ :

$$F^{\sim}(\alpha) = \sum_{k=0}^N \lambda_k^2 [x_k^{\sim} - \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t_k)]^2.$$

**3. Согласованная аппроксимация.** При анализе траекторных рядов часто возникает необходимость согласованной аппроксимации координатных рядов и соответствующих рядов скоростей. Эта проблема может быть успешно решена в рамках рассмотренного подхода.

Пусть наряду с временным рядом  $X_0^{\sim N}(t)$ , заданным на отрезке  $[a, b]$  в узлах временной сетки  $\omega_t$ , в узлах той же сетки задан временной ряд  $V_0^{\sim N}(t)$ , отсчеты которого  $v_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N$  являются результатом измерения  $v_k$  – скорости изменения  $X(t)$  в узлах  $t_k, k = 0, 1, 2, \dots, N$  сетки  $\omega_t$ .

Аналогично измерениям  $x_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N$  предполагается, что значения  $v_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N$  связаны с  $v_k, k = 0, 1, 2, \dots, N$  истинными значениями функции  $V(t)$  в узлах сетки  $\omega_t$  в соответствии с соотношением:

$$v_k^{\sim} = v_k + \varepsilon_k^v, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где  $\varepsilon_k^v, k = 0, 1, 2, \dots, N$  – реализации случайной величины  $\varepsilon^v$  – погрешности измерений. Будем считать, что  $\varepsilon^v$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{\varepsilon^v}$ .

Требуется аппроксимировать временной ряд  $V_0^{\sim N}(t)$  непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$  функцией  $P(t)$ , физически согласованной с дважды непрерывно дифференцируемой функцией  $S(t)$ , аппроксимирующей временной ряд  $X_0^{\sim N}(t)$ .

Решение этой задачи будем осуществлять в рамках рассмотренной ранее общей схемы аппроксимации временных рядов с помощью кубических В-сплайнов. С этой целью на каждом отрезке  $[t_i^R, t_{i+4}^R], i = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, n-1$  расширенной сетки  $\omega_t^R$  зададим функции  $B_i^{\wedge}(t)$  – производные от кубических В-сплайнов  $B_i(t)$  (2), определяемые в соответствии с формулами:

$$B_i^{\wedge}(t) = \begin{cases} 0, t \leq t_i^R; \\ (t - t_i^R)^2 / (2h_R^3), t \in [t_i^R, t_{i+1}^R]; \\ (h_R^2 + 2h_R(t - t_{i+1}^R) - \\ - 3(t - t_{i+1}^R)^2) / (2h_R^3), t \in [t_{i+1}^R, t_{i+2}^R]; \\ (-h_R^2 - 2h_R(t_{i+3}^R - t) + \\ + 3(t_{i+3}^R - t)^2) / (2h_R^3), t \in [t_{i+2}^R, t_{i+3}^R]; \\ -(t_{i+4}^R - t)^2 / (2h_R^3), t \in [t_{i+3}^R, t_{i+4}^R]; \\ 0, t \geq t_{i+4}^R. \end{cases}$$

Функцию (сплайн)  $S(t)$ , аппроксимирующую временной ряд  $X_0^{\sim N}(t)$ , зададим, как и ранее, согласно (3) в виде:

$$S(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t),$$

а функцию (сплайн)  $P(t)$ , аппроксимирующую временной ряд  $V_0^{\sim N}(t)$ , зададим в виде:

$$P(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i^{\wedge}(t).$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_i, i = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, n-1$  в выражениях для  $S(t)$  и  $P(t)$  определяются в результате решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t_k) = x_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N; \\ \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i^{\wedge}(t_k) = v_k^{\sim}, k = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) является переопределенной ( $2N + 2 > n + 3$ ), ее обобщенное решение может быть найдено так же, как отыскивалось решение системы (4). В результате будут определены значения коэффициентов  $\alpha_i, i = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, n-1$ , что позволит построить аппроксимирующие функции  $S(t)$  и  $P(t)$ , согласованно аппроксимирующие в указанном ранее смысле ряды  $X_0^{\sim N}(t)$  и  $V_0^{\sim N}(t)$  соответственно.

По сравнению с аппроксимацией одного временного ряда, совместная аппроксимация рядов  $X_0^{\sim N}(t)$  и  $V_0^{\sim N}(t)$  требует дополнительных вычислений только при вычислении произведения  $A^T A$ , где  $A$  – матрица коэффициентов системы

(7). Поскольку эта матрица имеет специфическую структуру и слабую заполненность, это не приводит к заметному увеличению вычислительной трудоемкости метода.

**4. Интерполяция аппроксимированных данных между узлами исходной сетки.** Часто возникающая необходимость интерполяции данных между узлами исходной временной сетки  $\omega_t$  легко реализуется при аппроксимации временного ряда с помощью кубических В-сплайнов посредством вычисления значений аппроксимирующей функции  $S(t)$ , определяемой в соответствии с (3), в заданных точках, расположенных между узлами сетки  $\omega_t$ . Свойства кубических В-сплайнов  $B_i(t)$  обеспечивают при этом необходимую гладкость и отсутствие необъяснимых выбросов в получаемых между узлами модельных значениях.

**5. Вычислительная апробация.** Рассмотренный подход к аппроксимации временного ряда  $X_0^N(t)$  был реализован в математическом пакете MATLAB. При разработке программного модуля была в полной мере учтена специфическая структура  $A$  – матрицы системы (4), что позволило существенным образом снизить вычислительную трудоемкость предлагаемого метода. Разработанный программный модуль, помимо собственно построения аппроксимирующего сплайна  $S(t)$ , включает в себя предобработку исходного временного ряда, в ходе которой происходит заполнение возможных пропусков в данных и анализ на наличие интервалов с необъяснимыми значениями – «выбросами». Заполнение пропусков в данных осуществляется с помощью линейной модели. Обнаружение интервалов с «выбросами» и корректировка данных на этих интервалах осуществляется с помощью так называемой процедуры «Тьюки53Х» [4], включающей в себя двухэтапную медианную обработку исходного ряда с последующим сглаживанием с помощью фильтра Хэннинга.

Была проведена серия вычислительных экспериментов с реальными данными, подтвердившими практическую эффективность предлагаемого подхода к аппроксимации траекторных рядов как с точки зрения вычислительной трудоемкости, так и с точки зрения требуемой точности аппроксимации. Аппроксимация реальных временных рядов  $X_0^N(t)$ , содержащих порядка 10 000 отсчетов, осуществлялась в пределах одной минуты. Предельные отклонения значений аппроксимирующей функции от измеренных данных при

значении коэффициента  $R$  (см. (1)), не превышающем 7, как правило, не превышали  $\sigma_{\varepsilon}^x$ .

Результаты вычислительных экспериментов по совместной аппроксимации координатных рядов и соответствующих им рядов скоростей могут быть охарактеризованы аналогично.

Далее приведено выполненное в математическом пакете MATLAB графическое отображение некоторых результатов аппроксимации фрагментов реальных рядов, иллюстрирующее влияние значения коэффициента  $R$  на качественные характеристики получаемой аппроксимации. Результаты аппроксимации полезного (не зашумленного) сигнала (сплошная линия) аппроксимирующими сплайнами (пунктирная линия) при  $R = 2$  показаны на рис. 1.

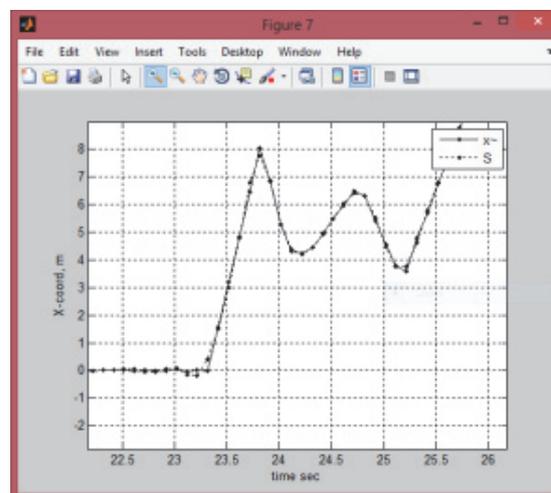


Рис. 1

Результаты аппроксимации полезного (не зашумленного) сигнала (сплошная линия) аппроксимирующими сплайнами (пунктирная линия) при  $R = 3$  показаны на рис. 2.

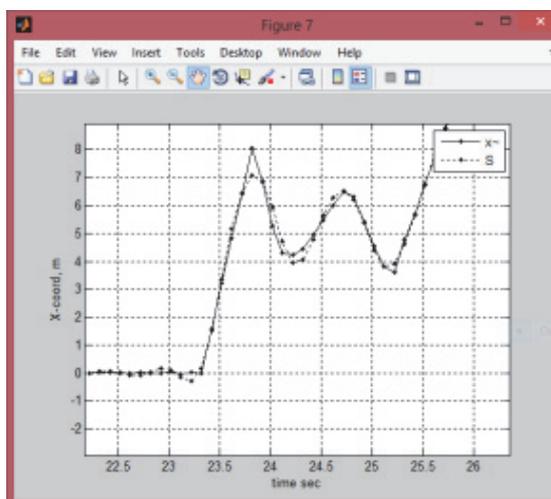


Рис. 2

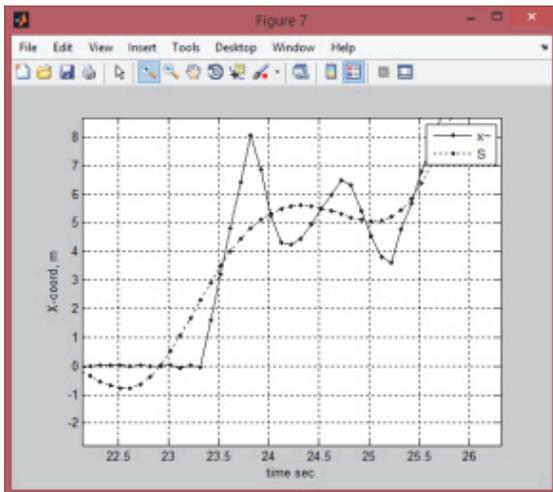


Рис. 3

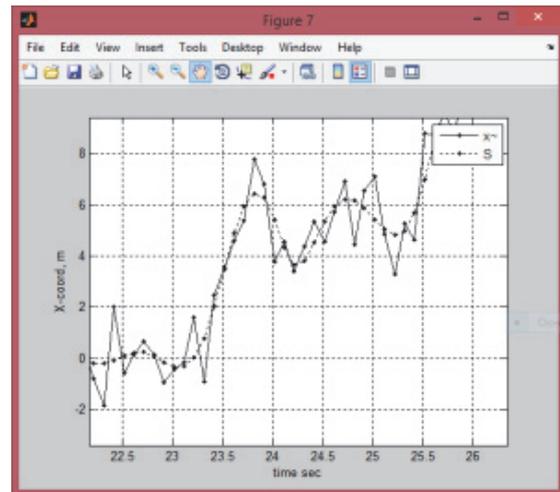


Рис. 5

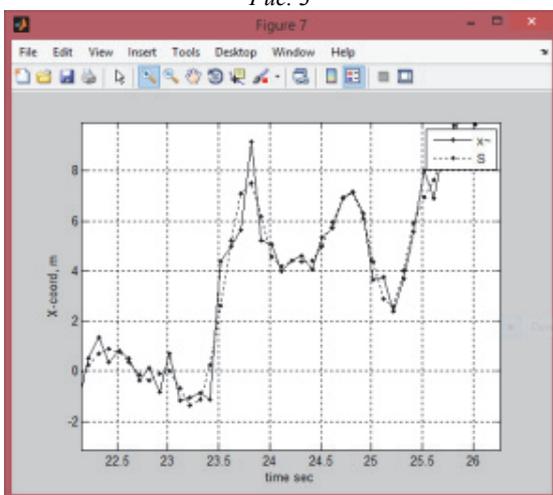


Рис. 4

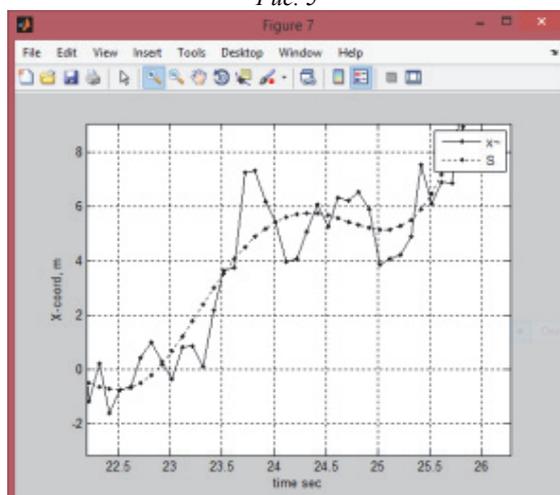


Рис. 6

Результаты аппроксимации полезного (не зашумленного) сигнала (сплошная линия) аппроксимирующими сплайнами (пунктирная линия) при  $R = 9$  показаны на рис. 3.

Результаты аппроксимации полезного сигнала с аддитивным гауссовским шумом (сплошная линия) аппроксимирующими сплайнами (пунктирная линия) при  $R = 2$  показаны на рис. 4.

Результаты аппроксимации полезного сигнала с аддитивным гауссовским шумом (сплошная линия) аппроксимирующими сплайнами (пунктирная линия) при  $R = 3$  показаны на рис. 5.

Результаты аппроксимации полезного сигнала с аддитивным гауссовским шумом (сплошная линия) аппроксимирующими сплайнами (пунктирная линия) при  $R = 9$  показаны на рис. 6.

Как видно из приведенных иллюстраций, тот или иной выбор значения параметра  $R$  позволяет

обеспечить либо необходимую степень точности аппроксимации динамического сигнала, либо требуемую степень сглаживания.

Выводы:

1. Разработанные алгоритмы аппроксимации временных рядов траекторных измерений ориентированы на использование специфической структуры матрицы решаемой системы линейных уравнений, что позволяет существенным образом снизить вычислительную трудоемкость предлагаемого метода.

2. Результаты вычислительных экспериментов с различными наборами реальных данных подтвердили практическую эффективность предлагаемого подхода к аппроксимации временных рядов траекторных измерений как с точки зрения вычислительной трудоемкости, так и с точки зрения требуемой точности аппроксимации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение / пер. с англ., под

ред. Х. Д. Икрамова. 2-е изд., стереотип. М.: Мир, 2001. 575 с.

2. Шикин Е. В., Плис Л. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. 240 с.

3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / пер. с англ. Х. Д. Икрамова, А. В. Князева, Е. Е. Тыртышникова; под ред. Х. Д. Икрамова. М.: Мир, 1989. 655 с.

4. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы / пер. с англ. В. И. Хохлова; под ред. И. Г. Журбенко. М.: Мир, 1982. 428 с.

V. E. Hertzman

JSC «R&EC»

A.-V. I. Sereda

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## APPROXIMATION OF TRAJECTORY SERIES USING CUBIC B-SPLINES (PRACTICAL ASPECT)

*The practical efficiency of using the apparatus of cubic B-splines for approximating time series of trajectory measurements is analyzed. The approximating function is represented as a linear combination of basis splines providing a minimum of the sum of squares of the residuals of measurements. The possibility of approximation of series with different degree of smoothness, consistent approximation of the coordinate series and the corresponding series of speeds, interpolation of the approximated data between nodes of the original grid. Filling in the gaps in the measurements is carried out using a linear model. Detection of intervals with anomalous measurements and their correction at these intervals is carried out by median processing of the initial series, followed by smoothing using the Hanning filter. To assess the practical effectiveness of the proposed approach to the approximation of trajectory measurements, the calculation algorithms were implemented in the MATLAB software package and a series of computational experiments with different sets of real data was carried out.*

**Time series, cubic B-splines, approximation, interpolation**